Tentamen
MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

2020-06-08 kl. 08.30–11.30 (08.30 - 13.00 för dem med förlängd tid) + 30 minuter för scanning

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 20 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2020 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 30 poäng för betyget 4 och 40 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms i Canvas Speed Grader. Resultatet meddelas i Ladok senast den 30 juni. Online granskning ordnas därefter av kursansvrig.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.
I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Låt

$$F(x, y, z) = x^2 e^{yz} + y + yz^2, \qquad G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$f(x, y) = x^2 e^y + 1 + y, \quad g(x, y) = G(x, y, 1) = x^2 + y^2 + 1.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $F(x, y, z) = 5$ i punkten $(2, 1, 0)$. (3p)

(b) Bestäm en tangentvektor till kurvan $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 5$ i punkten $(2, 1, 0)$. (2p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad två till $f(x, y)$ i punkten $(3, 0)$. (2p)

(d) Motivera varför $F(x, y, z) = 5$ definierar en implicit funktion $z = h(x, y)$ i en omgivning av $(2, 1, 0)$. Bestäm h_x och h_y i punkten $(2, 1)$. (2p)

(e) Låt $\mathbf{K} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $\mathbf{K}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$. Bestäm funktionalmatrisen $D(\mathbf{K} \circ \mathbf{K})$ i punkten $(3, 0)$. (4p)

2. (a) Bestäm masscentrumet för det två-dimensionella föremål som ockuperar den övre halvan av enhetsskivan $x^2 + y^2 \leq 1$ och vars densitet varierar enligt $\rho(x, y) = \frac{1}{1+(x^2+y^2)}$. (4p)

(b) Beräkna den generaliserade integralen (4p)

$$\iint_D x^2 e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy,$$

där $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0 \text{ och } x + y > 0\}$.

Var god vänd!

3. Låt C vara cirkeln med radie 1 och centrum i $(1, 0)$, och låt γ var den övre halvan av C, orienterad moturs. Beräkna

$$\int_\gamma (3xy^2 + 1)\, dx + (x^2 + 3x^2y)\, dy$$

(a) med hjälp av Greens sats (4p)

(b) *utan* Greens sats, dvs via en lämplig direkt parametrisering av γ. (Obs! Här kan symmetrier underlätta uträkningarna). (4p)

4. Låt vektorfältet $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ges av $\mathbf{F}(x, y, z) = (zx, -yz, x^2y + z)$.

(a) .... $z = x^2+y^2$ och .... $z = 1+2x$ skär varandra i en ..... Fyll i de tre utelämnade orden. (Obs! Det räcker inte att skriva "yta" eller "kurva", man måste vara mer precis). (1.5p)

(b) Beräkna flödet ut ur området som innesluts av $z = x^2 + y^2$ och $z = 1 + 2x$. (4p)

(c) Använd Stokes sats för att beräkna $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där γ är skärningskurvan i (a), orienterad medurs sett uppifrån längs z-axeln. (4p)

5. Låt $S \subset \mathbb{R}^3$ vara den parametriserade ytan (4.5p)

$$S = \{(u^2, v^2, \sqrt{2}\, uv) : u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \leq 1\}.$$

Beräkna ytarean av S.

6. Låt

$$f(x, y, z) = x - y + 2z, \quad g_1(x, y, z) = x + y + z, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

(a) Motivera varför funktionen f *måste* anta både ett största och ett minsta värde under bivillkoren $g_1 = 1$, $g_2 = 5$. (1p)

(b) Bestäm sedan dessa värden. (6p)

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 200608

1. (a)

$$\nabla F = (F_x,\, F_y,\, F_z) = (2xe^{yz},\, zx^2e^{yz} + 1 + z^2,\, yx^2e^{yz} + 2yz) \overset{(2,1,0)}{=} (4,\, 1,\, 4).$$

Så tangentplanets ekvation lyder

$$\nabla F \cdot (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0) = 0 \Rightarrow 4(x-2) + (y-1) + 4z = 0 \;\Rightarrow\; 4x + y + 4z = 9.$$

(b) En riktningsvektor ges av $\nabla F \times \nabla G$ i punkten. Vi har beräknat ∇F i uppgift (a). Vi har $\nabla G = (2x,\, 2y,\, 2z) \overset{(2,1,0)}{=} (4,\, 2,\, 0)$. Alltså,

$$\nabla F \times \nabla G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \cdots = (-8,\, 16,\, 4) = 4(-2,\, 4,\, 1).$$

Svar: $(-2,\, 4,\, 1)$.

(c)

$$\begin{aligned} f(3,\, 0) &= 10, \\ f_x = 2xe^y &\overset{(3,0)}{=} 6, \\ f_y = x^2e^y + 1 &\overset{(3,0)}{=} 10, \\ f_{xx} = 2e^y &\overset{(3,0)}{=} 2, \\ f_{xy} = f_{yx} = 2xe^y &\overset{(3,0)}{=} 6, \\ f_{yy} = x^2e^y &\overset{(3,0)}{=} 9. \end{aligned}$$

Således ges Taylorpolynomet av grad två i $(3,\, 0)$ av

$$P(h,\, k) = 10 + (6h + 10k) + \frac{1}{2}(2h^2 + 12hk + 9k^2).$$

(d) Eftersom $F_z(2,\, 1,\, 0) = 4 \neq 0$ så är z en implicit funktion av x och y i en omgivning. Dessutom enligt Implicita Funktionssatsen gäller i punkten $(2,\, 1)$ att

$$h_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{4}{4} = -1, \quad h_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{1}{4}.$$

(e) För det första,

$$\mathbf{K}\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(3,\, 0) \\ g(3,\, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

För det andra,

$$D\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xe^y & x^2e^y + 1 \\ 2x & 2y \end{bmatrix}.$$

Då gäller enligt kedjeregeln att

$$\begin{aligned} D(\mathbf{K} \circ \mathbf{K})(3,\, 0) &= D\mathbf{K}(\mathbf{K}(3,\, 0)) \cdot D\mathbf{K}(3,\, 0) = D\mathbf{K}(10,\, 10) \cdot D\mathbf{K}(3,\, 0) = \\ &= \begin{bmatrix} 20e^{10} & 100e^{10} + 1 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 720e^{10} + 6 & 200e^{10} \\ 240 & 200 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

2. (a) Låt $\overline{m} = (m_x,\, m_y)$. Vi har $m_x = 0$ av symmetriskäl. Sedan gäller

$$m_y = \frac{\iint_D y\,\rho(x,\,y)\,dx\,dy}{\iint_D \rho(x,\,y)\,dx\,dy},$$

där $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1;\ y \geq 0\}$. Vi byter till polära koordinater. Först täljaren:

$$\iint_D \frac{y}{1+(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r\sin\theta}{1+r^2}\,r\,dr\,d\theta =$$
$$= \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) dr = 2[r - \arctan r]_0^1 = \cdots = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

Sedan nämnaren:

$$\iint_D \frac{1}{1+(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^\pi \int_0^1 \frac{r\,dr\,d\theta}{1+r^2} =$$
$$= \pi \int_0^1 \frac{r}{1+r^2}\,dr \overset{u=1+r^2}{=} \frac{\pi}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

SVAR: $\overline{m} = \left(0,\, \frac{4-\pi}{\pi\ln 2}\right)$.

(b) Vi använder polära koordinater igen, ty $D = \{(r,\,\theta) : 0 < r < \infty,\ 0 < \theta < 3\pi/4\}$. Så integralen blir

$$\int_0^{3\pi/4} \int_0^\infty r^2\cos^2\theta\, e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{3\pi/4} \cos^2\theta\,d\theta \int_0^\infty r^3 e^{-r^2}\,dr =$$
$$\overset{u=r^2}{=} \int_0^{3\pi/4} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta \int_0^\infty \frac{1}{2}ue^{-u}\,du = \cdots = \left[\frac{3\pi-2}{8}\right]\left[\frac{1}{2}\right] = \frac{3\pi-2}{16}.$$

3. (a) Integralen kan skrivas $\int_\gamma P\,dx + Q\,dy$, där $P(x,\,y) = 3xy^2 + 1$, $Q(x,\,y) = x^2 + 3x^2y$. Låt γ_2 vara raksträckan från $(0,\,0)$ till $(2,\,0)$. Då gäller enligt Greens sats att

$$\int_{\gamma+\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy, \tag{1}$$

där $D = \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$. Högerledet av (1) blir således

$$\iint_D 2x\,dx\,dy = \iint_D [2(x-1)+2]\,dx\,dy = 0 + 2 \times \text{Area}(D) = \pi.$$

Därför är

$$\int_{\gamma+\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \pi \Rightarrow \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \pi - \int_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy =$$
$$\overset{y=dy=0}{=} \pi - \int_0^2 dx = \pi - 2.$$

(b) En lämplig parametrisering av γ är

$$x = 1 + \cos t,\quad y = \sin t,\quad 0 \leq t \leq \pi.$$

Insättning in i kurvintegralen ger

$$\int_0^\pi [3(1+\cos t)(\sin^2 t) + 1](-\sin t\,dt) + [(1+\cos t)^2 + 3\sin t(1+\cos t)^2](\cos t\,dt) = \tag{2}$$
$$= \cdots = \left[-\int_0^\pi \sin t\,dt - 3\int_0^\pi \sin^3 t\,dt + 2\int_0^\pi \cos^2 t\,dt + 6\int_0^\pi \sin t\cos^2 t\,dt\right] +$$
$$\left[-3\int_0^\pi \cos t\sin^3 t\,dt + \int_0^\pi \cos t\,dt + \int_0^\pi \cos^3 t\,dt + 3\int_0^\pi \sin t\cos t\,dt + 3\int_0^\pi \sin t\cos^3 t\,dt\right].$$

Av symmetriskäl så är alla integralerna i den andra [...] parentesen lika med noll. Integralerna i den första [...] parentesen kan beräknas var för sig m.h.a. standarda trigonometriska manipulationer. Vi ger bara svaren:

$$\int_0^\pi \sin t\,dt = 2, \quad \int_0^\pi \sin^3 t\,dt = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\pi \sin t\cos^2 t\,dt = \frac{2}{3}.$$

Insättning in i (2) ger

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = -2 - 3\left(\frac{4}{3}\right) + 2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 6\left(\frac{2}{3}\right) = \cdots = \pi - 2,$$

vilket stämmer överens med uppgift (a).

4. (a) Paraboloiden, planet, ellips.

(b) Vi använder Gauss sats. Först har vi

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}(zx) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y+z) = z - z + 1 = 1.$$

Låt K vara området som innesluts av paraboloiden och planet. Enligt Gauss sats så ges flödet ut ur K av

$$\iiint_K \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_K 1\,dV = \mathrm{vol}(K).$$

Volymen beräknas lättast m.h.a. cylindriska koordinater:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(K) = \iint_{\pi(K)} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{1+2x} dz = \iint_{\pi(K)} [(1+2x) - (x^2+y^2)]\,dx\,dy = \\ = \iint_{\pi(K)} [2 - (x-1)^2 - y^2]\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{3}$$

Notera att $\pi(K)$ är området i xy-planet vars rand ges av $x^2+y^2 = 1+2x \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 = 2$, dvs $\pi(K)$ är en cirkelskiva med centrum i $(1, 0)$ och radie $\sqrt{2}$. Därför gäller:

$$\iint_{\pi(K)} 2\,dx\,dy = 2\times \mathrm{Area}(\pi(K)) = 2\times\pi(\sqrt{2})^2 = 4\pi,$$

$$\iint_{\pi(K)} (x-1)^2\,dx\,dy = \iint_{\pi(K)} y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} (r\sin\theta)^2 r\,dr\,d\theta = \cdots = \pi.$$

Insättning in i (3) ger att flödet blir $4\pi - \pi - \pi = 2\pi$.

(c) Eftersom γ är orienterad medurs sett uppifrån så gäller enligt Stokes sats att

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_D (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS, \tag{4}$$

där D är den del av planet som skärs ut av paraboloiden. Notera att projektionen $\pi(D)$ av D på xy-planet är samma skiva som i uppgift (b). Vi har

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zx & -yz & x^2y+z \end{vmatrix} = \cdots = (x^2+y,\, x-2xy,\, 0)$$

och

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS \overset{-2x+z=1}{=} (-2,\, 0,\, 1)\,dx\,dy.$$

Insättning in i (4) ger

$$\oint_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\iint_{\pi(D)} (x^2+y,\, x-2xy,\, 0)\cdot(-2,\,0,\,1)\,dx\,dy = 2\iint_{\pi(D)} (x^2+y)\,dx\,dy =$$

$$= 2\left[\iint_{\pi(D)} (x-1)^2\,dx\,dy + \iint_{\pi(D)} 1\,dx\,dy + 2\iint_{\pi(D)} (x-1)\,dx\,dy + \iint_{\pi(D)} y\,dx\,dy\right] =$$

$$\overset{(b)+\text{symmetri}}{=} 2(\pi + 2\pi + 2\cdot 0 + 0) = 6\pi.$$

5. Ytarean ges av

$$\iint_S dS = \iint_{u\geq 0,\, v\geq 0,\, u^2+v^2\leq 1} ||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v||\,du\,dv. \tag{5}$$

Vi har

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2u & 0 & \sqrt{2}v \\ 0 & 2v & \sqrt{2}u \end{vmatrix} = \cdots = (-2\sqrt{2}v^2,\, -2\sqrt{2}u^2,\, 4uv).$$

Således är

$$||\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v|| = \sqrt{(-2\sqrt{2}v^2)^2 + (-2\sqrt{2}u^2)^2 + (4uv)^2} = \sqrt{8v^4 + 8u^4 + 16u^2v^2} = 2\sqrt{2}(u^2+v^2).$$

Insättning in i (5) ger att ytarean blir

$$\iint_{u\geq 0,\, v\geq 0,\, u^2+v^2\leq 1} 2\sqrt{2}(u^2+v^2)\,du\,dv = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2\,r\,dr\,d\theta = \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

6. (a) $g_1 = 1$ är ett plan och $g_2 = 5$ är en sfär. Dessa skär varandra i en ellips, vilket är en kompakt mängd. Dessutom är f en kontinuerlig funktion och därmed måste f anta både ett största och minsta värde på den kompakta skärningen.

(b) Vi använder Lagranges metod och får ett system av fem ekvationer i fem obekanta:

$$f_x = \lambda g_{1,x} + \mu g_{2,x} \Rightarrow 1 = \lambda + \mu(2x), \tag{6}$$
$$f_y = \lambda g_{1,y} + \mu g_{2,y} \Rightarrow -1 = \lambda + \mu(2y), \tag{7}$$
$$f_z = \lambda g_{1,z} + \mu g_{2,z} \Rightarrow 2 = \lambda + \mu(2z), \tag{8}$$
$$g_1 = 1 \Rightarrow x + y + z = 1, \tag{9}$$
$$g_2 = 5 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 5. \tag{10}$$

Om vi subtraherar (7) från (6) får vi

$$\mu = \frac{1}{x-y}. \tag{11}$$

Om vi subtraherar (1) från (3) får vi

$$\mu = \frac{1}{2(z-x)}. \tag{12}$$

Från (11) och (12) får vi

$$x - y = 2(z-x) \Rightarrow z = \frac{3x-y}{2}. \tag{13}$$

Insättning in i (9) ger

$$x + y + \frac{3x-y}{2} = 1 \Rightarrow y = 2 - 5x \overset{(13)}{\Rightarrow} z = 4x - 1. \tag{14}$$

Vi sätter dessa in i (10) och får:

$$x^2 + (2 - 5x)^2 + (4x - 1)^2 = 5 \Rightarrow \cdots \Rightarrow 42x^2 - 28x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ eller } x = \frac{2}{3}.$$

Sedan enligt (14) får vi två kandidatpunkter: $(0,\, 2,\, -1)$ och $\left(\frac{2}{3},\, -\frac{4}{3},\, \frac{5}{3}\right)$. Vi beräknar f i båda punkterna:

$$f(0,\, 2,\, -1) = -4, \quad f\left(\frac{2}{3},\, -\frac{4}{3},\, \frac{5}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

Därför är minsta värdet -4 och största värdet $16/3$.