Tentamen
MVE035/600 Flervariabelanalys F/TM

2020-03-14 kl. 09.00–12.30 (09.00 - 14.00 för dem med förlängd tid)

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070-5705475

Hjälpmedel: Hjälpmedel i enlighet med honor pledge, ej räknedosa

För godkänt på tentan krävs 120 poäng, inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2020 från Möbius uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 130 poäng för betyget 4 och 140 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand. För slutbetyg krävs godkänt på tavelmomentet, samt för TM-studenterna godkänt på extra-vektoranalys momentet.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida dagen efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 3 april. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

I de uppgifter som består av fler olika delar går det alltid att lösa de enskilda delarna oberoende av varandra, även om man kan ibland spara räknetid genom att lösa deluppgifterna sekventiellt.

Uppgifterna

1. Write the following on a sheet of paper and sign it with your name in capital letters. (100p)

"I pledge my honor that, in performing this exam, I have not used any materials other than what is on the course page in Canvas and the course literature".

2. Låt $F(x, y, z) = 2z + e^{-(y-1)}\cos z + 3xy$.

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till nivåytan $F(x, y, z) = 4$ i punkten $(1, 1, 0)$. (3p)

(b) Motivera varför $F(x, y, z) = 4$ definierar en implicit funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(1, 1, 0)$. Bestämma sedan f_x, f_y och f_{xx} i $(1, 1)$. (3p)

3. Låt $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$ och låt $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 \leq y \leq x\}$.

(a) Skissa D och motivera varför f måste anta både ett största och minsta värde i D. (1p)

(b) Bestäm dessa värden. Klassificera dessutom alla kritiska punkter till f (i hela $\mathbb{R}^2$). (5p)

(c) Antar f ett största och/eller minsta värde i mängden $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2 < y \leq x\}$? Motivera ! (1p)

4. Bestäm den allmänna lösningen till PDEn (7p)

$$x^2 f_{xx} + 2xy f_{xy} + y^2 f_{yy} = 0$$

genom att införa de nya variablerna $u = x$, $v = y/x$. Visa alla dina uträkningar !

Var god vänd!

5. (a) Beräkna (4p)

$$\iint_D y^4 \, dx \, dy,$$

där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är området som begränsas av $y = x$, $y = 2x$ och $xy = 3$.

(b) Beräkna (4p)

$$\iint_D \frac{1}{x^2 + 9y^2 + 6xy + 1} \, dx \, dy,$$

där $D \subseteq \mathbb{R}^2$ är triangeln med hörn i (0, 0), (5, 5) och (2, 6).

6. Låt γ vara sträckan från (0, 3/2) till (1/2, 0) närmsta väg längs kurvan $36x^2 + 4y^2 = 9$.

(a) Beräkna (3p)

$$\int_\gamma (2x + x^2 y)e^{xy} \, dx + (x^3 e^{xy} + 1) \, dy.$$

(b) Ange en funktion $f(t)$ och reella tal a, b så att längden av γ är $\int_a^b f(t)\, dt$. (Obs! Du behöver *inte* beräkna kurvlängden). (2.5p)

7. Låt Y vara den del av ytan $z = x^2 + y^2 - 2x$ som ligger under planet $z = 0$.

(a) Med hjälp av Gauss Sats, beräkna flödet upp genom Y av fältet $\mathbf{F} = (y + xz,\, x - yz,\, x + y)$. (4p)

(b) Låt $\mathbf{G} = (x,\, y,\, z)$. Beräkna flödet av $\mathbf{G}$ upp genom Y *utan* Gauss sats, dvs via direkt parametrisering av ytan. (4p)

(Tips! Kvadratkomplettering och symmetrier kan vara nyttiga verktyg i både (a) och (b)).

8. Låt $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ och låt γ vara triangeln med hörn i (1, 0, 0), (0, 1, 0) och (0, 0, 1), genomlöpt medurs sett från långt håll i den första oktanten[1]. Beräkna $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

(a) med hjälp av Stokes sats (5p)

(b) utan Stokes sats, dvs via direkt parametrisering av kurvan. (3.5p)

Go n'eirí an bóthar libh!

[1] Den första oktanten är den del av $\mathbb{R}^3$ där $x > 0$, $y > 0$ och $z > 0$.

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 200314

1.

2. (a) I punkten (1, 1, 0) gäller

$$F_x = 3y = 3, \quad F_y = 3x - e^{-(y-1)}\cos z = 2, \quad F_z = 2 - e^{-(y-1)}\sin z = 2.$$

Tangentplanets ekvation lyder därför

$$\nabla F\cdot(x-x_0,\, y-y_0,\, z-z_0) = 0 \Leftrightarrow (3,\, 2,\, 2)\cdot(x-1,\, y-1,\, z) = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow 3x+2y+2z = 5.$$

(b) Eftersom $F_z = 2 \neq 0$ så medför Implicita Funktionssatsen att $F(x,\, y,\, z) = 4$ implicit definierar en C^1-funktion $z = f(x,\, y)$ i en omgivning av $(1,\, 1,\, 0)$ och att

$$f_x(1,\, 1) = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{3}{2}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z} = -1.$$

Sedan har vi

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = \frac{F_x\frac{\partial F_z}{\partial x} - F_z\frac{\partial F_x}{\partial x}}{(F_z)^2} \overset{(1,1,0)}{=} \frac{3}{4}\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}. \tag{1}$$

Men

$$\frac{\partial F_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3y) = 0$$

och

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2 - e^{-(y-1)}\sin z) = -e^{-(y-1)}\cos z f_x \overset{(1,1,0)}{=} \frac{3}{2}.$$

Insättning in i (1) ger $f_{xx}(1,\, 1) = \frac{9}{8}$.

3. (a) Se Figur L.3 för skiss. D är sluten och begränsad, dvs kompakt, och f är kontinuerlig. Därför antas både max och min.

(b) I en kritisk punkt gäller

$$f_x = 4x = 0 \Rightarrow x = 0,$$
$$f_y = 2y - 1 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$$

Så $\left(0,\, \frac{1}{2}\right)$ är den enda kritiska punkten. Notera att punkten ligger utanför D så behöver inte beaktas för optimering av f inom D. Punkten ska ändå klassificeras. Vi har

$$A = f_{xx} = 4, \quad B = f_{xy} = f_{yx} = 0, \quad C = f_{yy} = 2.$$

Så $AC - B^2 = 8 > 0$ och $A = 4 > 0$, vilket medför ett lokalt minimum.
För optimeringsproblemet återstår att kolla randen $\partial D = \gamma_1 \cup \gamma_2$ i figuren.
Vi har $\gamma_1 = \{\mathbf{r}_1(t) = (t,\, t),\, -1 \le t \le 2\}$. Så $f(\mathbf{r}_1(t)) := g(t) = 3t^2 - t$. Så $g'(t) = 0$ då $t = \frac{1}{6}$, vilket ger kandidatpunkten $\left(\frac{1}{6},\, \frac{1}{6}\right)$.
Vi har $\gamma_2 = \{\mathbf{r}_2(t) = (t,\, t^2-2),\, -1 \le t \le 2\}$. Så $f(\mathbf{r}_2(t)) := h(t) = 2t^2 + (t^2-2)^2 - (t^2-2) = (t^2-2)^2 + t^2 + 2$. Så $h'(t) = \cdots = 2t(2t^2-3) = 0$ då $t = 0$ eller $t = \pm\sqrt{3/2}$. Notera att $t = -\sqrt{3/2}$ ligger utanför definitionsmängden $[-1,\, 2]$. Så vi får två kandidatpunkter: $(0,\, -2)$ och $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\, -\frac{1}{2}\right)$.
Vi måste också beakta randens ändpunkter $(-1,\, -1)$ och $(2,\, 2)$. Vi jämför de fem kandidatpunkterna:

$$f\left(\frac{1}{6},\, \frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{12}, \quad f(0,\, -2) = 2, \quad f\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\, -\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}, \quad f(-1,\, -1) = 4, \quad f(2,\, 2) = 10.$$

Så det minsta (resp. största) värdet som f antar i D är $-\frac{1}{12}$ (resp. 10).

(c) Punkten $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$ ligger i D^* så f kommer fortfarande att anta $-\frac{1}{12}$ som minsta värde. Dock ligger inte $(2, 2)$ i D^* ty där är $x^2 - 2 = y$. Men $(2, 2)$ är en randpunkt till D^* och f är kontinuerlig, så f antar värden godtyckligt nära 10 inom D^*. Därför antar inte f ett största värde i D^*.

4. Kedjeregeln ger

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x = f_u - \frac{y}{x^2} f_v \tag{2}$$

$$f_y = f_u u_y + f_v v_y = \frac{1}{x} f_v. \tag{3}$$

Kedjeregeln plus produktregeln ger sedan

$$\begin{aligned} f_{xx} &= \frac{\partial f_u}{\partial x} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial f_v}{\partial x} + \frac{2y}{x^3} f_v = \\ = (f_{uu} \cdot 1 + f_{uv}(-y/x^2)) - \frac{y}{x^2}&(f_{vu} \cdot 1 + f_{vv}(-y/x^2)) + \frac{2y}{x^3} f_v \Rightarrow \\ \overset{f \in C^2}{\Rightarrow}\ f_{xx} &= f_{uu} - \frac{2y}{x^2} f_{uv} + \frac{y^2}{x^4} f_{vv} + \frac{2y}{x^3} f_v \end{aligned} \tag{4}$$

och

$$\begin{aligned} f_{xy} &= \frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{1}{x}\frac{\partial f_v}{\partial x} - \frac{1}{x^2} f_v = \\ &= \frac{1}{x}(f_{vu} \cdot 1 + f_{vv}(-y/x^2)) - \frac{1}{x^2} f_v \Rightarrow \\ \overset{f \in C^2}{\Rightarrow}\ f_{xy} &= \frac{1}{x} f_{uv} - \frac{y}{x^3} f_{vv} - \frac{1}{x^2} f_v \end{aligned} \tag{5}$$

och

$$f_{yy} = \frac{1}{x}\frac{\partial f_v}{\partial y} = \frac{1}{x}\left(f_{vv} \cdot \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} f_{vv}. \tag{6}$$

Insättning av (2)-(6) in i den givna PDEn ger

$$x^2\left[f_{uu} - \frac{2y}{x^2} f_{uv} + \frac{y^2}{x^4} f_{vv} + \frac{2y}{x^3} f_v\right] + 2xy\left[\frac{1}{x} f_{uv} - \frac{y}{x^3} f_{vv} - \frac{1}{x^2} f_v\right] + y^2\left[\frac{1}{x^2} f_{vv}\right] = 0$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow x^2 f_{uu} = 0 \Rightarrow f_{uu} = 0.$$

Vi kan nu integrera:

$$f_u = \int 0\, \partial u = g(v),$$

$$f = \int g(v)\, \partial u = u \cdot g(v) + h(v).$$

Så den allmänna lösningen är

$$f(x, y) = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + h\left(\frac{y}{x}\right),$$

där g och h är valfria C^2 funktioner av en variabel.

5. (a) Notera att $D = D_1 \sqcup D_3$, där D_3 är spegelbilden i origo av D_1 och D_1 ligger i den första kvadranten - se Figur L.5. Eftersom integranden y^4 är en jämn funktion av y så är integralen över D dubbelt så stor som integralen över D_1.

Nu byter vi variabler till $u = \frac{y}{x}$, $v = xy$. Avbildningen $(x, y) \leftrightarrow (u, v)$ är 1-1 inom D_1 så vi kan skriva $D_1 = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 3\}$. Vi har

$$\left|\frac{d(u, v)}{d(x, y)}\right| = \left|\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix}\right| = \frac{2y}{x} = 2u,$$

så

$$|J(u,\, v)| = \left|\frac{d(x,\, y)}{d(u,\, v)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{d(u,\,v)}{d(x,\,y)}\right|} = \frac{1}{2u}.$$

Notera också att $y^4 = \left(\frac{y}{x}\right)^2 (xy)^2 = u^2v^2$. Så vi får till slut att

$$\iint_{D_1} y^4\, dx\, dy = \int_0^3 \int_1^2 u^2v^2 \left(\frac{1}{2u}\right) du\, dv = \cdots = \frac{27}{4},$$

vilket medför att $\iint_D y^4\, dx\, dy = \frac{27}{2}$.

(b) Notera att $x^2 + 9y^2 + 6xy = (x + 3y)^2$ och att punkterna $(2,\, 6)$ och $(5,\, 5)$ båda ligger på linjen $x + 3y = 20$. Därför är det lämpligt att integrera med hjälp av nivåkurvor. Sätt

$$g(x,\, y) = x + 3y, \quad h(u) = \frac{1}{u^2+1}, \quad A(u) = \text{Area}(\{(x,\, y) \in D : 0 \leq x + 3y \leq u\}).$$

$A(u)$ är arean av en triangel med hörn i $(0,\, 0)$, $\left(\frac{u}{4},\, \frac{u}{4}\right)$ och $\left(\frac{u}{10},\, \frac{3u}{10}\right)$ så kan beräknas via en kryssprodukt

$$A(u) = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} \frac{u}{4} & \frac{u}{10} \\ \frac{u}{4} & \frac{3u}{10} \end{vmatrix}\right\| = \frac{u^2}{40}.$$

Så vi får envariabelsintegralen

$$\int_0^{20} h(u)A'(u)\, du = \frac{1}{20}\int_0^{20} \frac{u}{u^2+1}\, du \overset{v:=u^2+1}{=} \cdots = \frac{\ln 401}{40}.$$

6. (a) Vi har en kurvintegral $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där

$$\mathbf{F}(x,\, y) = ((2x + x^2y)e^{xy},\, x^3e^{xy} + 1).$$

$\mathbf{F}$ verkar krångligt så man kan misstänka att det är konservativt. Vi söker alltså ϕ s.a. $\mathbf{F} = \nabla\phi$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x^3e^{xy} + 1 \Rightarrow \phi = x^2e^{xy} + y + f(x), \quad \exists\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = (2x + x^2y)e^{xy} + f'(x) \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = C.$$

Så vi kan ta $\phi(x,\, y) = x^2e^{xy} + y$. Då har vi att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi\left(\frac{1}{2},\, 0\right) - \phi\left(0,\, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}.$$

(b) γ hör till ellipsen centrerad i origo med radii $1/2$ och $3/2$ i x- resp. y-led. Den är orienterad medurs, och dess moturs motsvarighet (som har samma längd) kan parametriseras enligt

$$\gamma = \left\{\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{2}\cos t,\, \frac{3}{2}\sin t\right),\, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Längden av γ ges således av

$$\int_0^{\pi/2} ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \cdots = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t}\, dt.$$

M.a.o. kan vi ta $a = 0$, $b = \pi/2$, $f(t) = \frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t}$.

7. (a) Notera att kvadratkomplettering ger att ekvationen för Y kan skrivas

$$z + 1 = z - (-1) = (x-1)^2 + y^2,$$

vilket tydliggör att Y är en del av en paraboloid med sin spets i $(1,\,0,\,-1)$. Låt Y_2 vara "locket" i xy-planet, dvs cirkelskivan med centrum i $(1,\,0,\,0)$ och radie 1. Låt K vara området i $\mathbb{R}^3$ som begränsas av $Y \cup Y_2$. Då säger Gauss sats att

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS,$$

så länge $\hat{\mathbf{N}}$ alltid pekar ut från K. På Y är "ut" samma sak som "ner". På Y_2 är det klart att $\hat{\mathbf{N}} = (0,\,0,\,1)$. Konstatera också att $\nabla \cdot \mathbf{F} = z - z + 0 = 0$. Slusatsen är att

$$\text{Flöde upp genom } Y = \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot (0,\,0,\,1)\, dS = \iint_{Y_2 : (x-1)^2 + y^2 \le 1} (x+y)\, dx\, dy =$$

$$= \iint_{Y_2} (x-1)\, dx\, dy + \iint_{Y_2} y\, dx\, dy + \iint_{Y_2} dx\, dy \overset{\text{symmetri}}{=} 0 + 0 + \operatorname{Area}(Y_2) = \pi.$$

(b) Y hör till en funktionsyta $z = f(x,\,y) = x^2 + y^2 - 2x$. Således är

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(-f_x,\,-f_y,\,1)\, dx\, dy \overset{\text{flöde upp}}{=} +(-2x+2,\,-2y,\,1)\, dx\, dy.$$

Notera att $\pi(Y) = Y_2$. Så vi har

$$\text{Flöde upp} = \iint_Y \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{Y_2} (x,\,y,\,z) \cdot (-2x+2,\,-2y,\,1)\, dx\, dy =$$

$$\overset{z = x^2+y^2-2x}{=} \cdots = -\iint_{Y_2} (x^2+y^2)\, dx\, dy \overset{u = x-1}{=} -\iint_{u^2+y^2 \le 1} (u^2 + 2u + 1 + y^2)\, du\, dy =$$

$$\overset{\text{symmetri}}{=} -\operatorname{Area}(Y_2) - 2\iint_{u^2+y^2 \le 1} u^2\, du\, dy = -\pi - 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta \int_0^1 r^3\, dr = \cdots = -\frac{3\pi}{2}.$$

8. (a) Vi beräknar först

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2 & y^2 & x \end{vmatrix} = \cdots = (0,\,2z-1,\,0).$$

Näst konstaterar vi att triangeln ligger i planet $x + y + z = 1$, där

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(1,\,1,\,1)\, dx\, dy. \tag{7}$$

Eftersom γ genomlöps medurs sett från långt håll i första oktanten så måste $\hat{\mathbf{N}}$ peka neråt för att $\hat{\mathbf{N}} \times d\mathbf{r}$ ska peka in mot triangelns insida T. Så vi väljer minustecknet i (7) och Stokes sats nu säger att

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_T (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_{\pi(T)} (0,\,2z-1,\,0) \cdot (1,\,1,\,1)\, dx\, dy =$$

$$= -\iint_{\pi(T)} (2z-1)\, dx\, dy \overset{z = 1-x-y}{=} \iint_{\pi(T)} (2x+2y-1)\, dx\, dy \overset{\text{symmetri}}{=} \iint_{\pi(T)} (4x-1)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 (4x-1)\, dx \int_0^{1-x} dy = \int_0^1 (4x-1)(1-x)\, dx = \cdots = \frac{1}{6}.$$

(b) Vi har $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ där

- γ_1 är raksträckan från $(0,\,0,\,1)$ till $(0,\,1,\,0)$,
- γ_2 är raksträckan från $(0,\,1,\,0)$ till $(1,\,0,\,0)$,

- γ_3 är rakssträckan från $(1,\,0,\,0)$ till $(0,\,0,\,1)$.

Således är

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{8}$$

och vi beräknar de tre kurvintegralerna separat.
γ_1 kan parametriseras enligt

$$\gamma_1 = \{\mathbf{r}(t) = (0,\,t,\,1-t) : 0 \le t \le 1\}.$$

Så

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 ((1-t)^2,\,t^2,\,0)\cdot(0,\,1,\,-1)\,dt = \cdots = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}. \tag{9}$$

γ_2 kan parametriseras enligt

$$\gamma_2 = \{\mathbf{r}(t) = (t,\,1-t,\,0) : 0 \le t \le 1\}.$$

Så

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (0,\,(1-t)^2,\,t)\cdot(1,\,-1,\,0)\,dt = \cdots = -\int_0^1 (1-t)^2 dt = -\frac{1}{3}. \tag{10}$$

γ_3 kan parametriseras enligt

$$\gamma_3 = \{\mathbf{r}(t) = (1-t,\,0,\,t) : 0 \le t \le 1\}.$$

Så

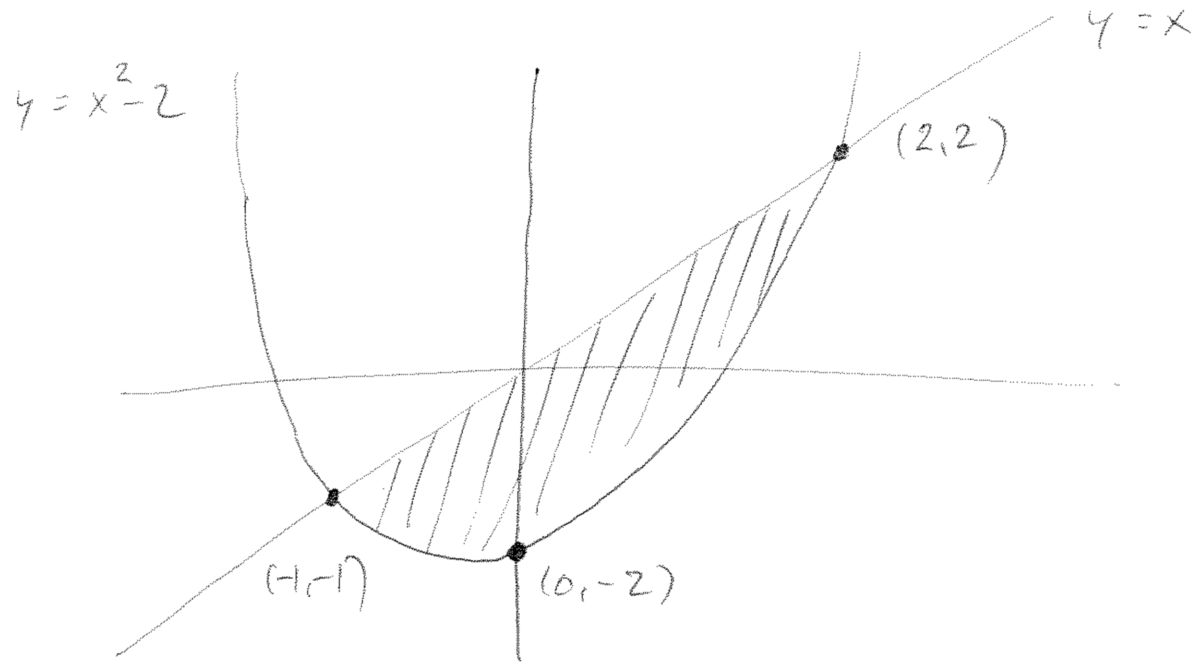
$$\int_{\gamma_3} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^2,\,0,\,1-t)\cdot(-1,\,0,\,1)\,dt = \cdots = \int_0^1 (1-t-t^2) dt = \cdots = \frac{1}{6}. \tag{11}$$

Insättning av (9), (10) och (11) in i (8) ger

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

vilket överensstämmer med resultatet från del (a).

Figur L.3



Figur L.5