Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2018-06-05 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 070 570 54 75 (alt. Ankn. 5325, Tim Cardillin)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 40% (20 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng erhållna under VT-2018 från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 60% (30 poäng) för betyget 4 och 80% (40 poäng) för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 28 juni. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

Uppgifterna

1. Låt

$$f_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}, \qquad f_2(x, y) = \frac{9}{x^2 + y}.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan $z = f_1(x, y)$ i punkten $(1, 2, 3)$. (1.5p)

(b) Bestäm en riktningsvektor för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $z = f_1(x, y)$ och $z = f_2(x, y)$ i punkten $(1, 2, 3)$. (1.5p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet $P(h, k)$ av grad 2 till $f_1(x, y)$ i punkten $(1, 2)$. (1.5p)

(d) Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara den vektorvärda funktionen $\mathbf{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. Bestäm funktionalmatrisen och funktionaldeterminanten för $\mathbf{F}$ i punkten $(1, 2)$ och därmed ett approximativt värde för Area$(\mathbf{F}(\Delta))$, där Δ är rektangeln med hörn i $(0.98, 1.97)$, $(0.98, 2.03)$, $(1.01, 1.97)$, $(1.01, 2.03)$. (1.5p)

2. (a) Bestäm alla kritiska punkterna till funktionen (2.5p)

$$f(x, y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

(b) Motivera varför f antar både ett största och minsta värde i området $D = \{(x, y) : \max\{x, y\} \le -1\}$ och ange dessa värden. Klassificera också de kritiska punkterna från (a), utan att beräkna några andragrads partiella derivator. (3.5p)

3. Bevisa att ekvationen (4p)

$$xye^{1+z} + yz^2 + (x + y)z = 0$$

definierar z implicit som en funktion $z = f(x, y)$ i en omgivning av punkten $(2, 1, -1)$. Bestäm sedan f_x, f_y och f_{xy} i punkten $(2, 1)$.

Var god vänd!

4. Beräkna följande dubbelintegraler: (6p)

(a)

$$\iint_D \frac{x}{y}\, e^y \, dx\, dy, \quad \text{där } D = \{(x,\, y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}.$$

(b)

$$\iint_D \frac{y}{x}\, dx\, dy, \quad \text{där } D = \{(x,\, y) : x \ge 0,\ y \ge 0,\ y \le x,\ x^2 + 4y^2 \le 4\}.$$

(Tips för (b): Variabelbyte).

5. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av $\mathbf{F}(x,\, y) = (x - y^3,\, x^3 + y^3)$ och låt $\mathcal{C} = \{(x,\, y) : x^2 + y^2 = 9,\ |x| \le y\}$. Bestäm $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, där $\mathcal{C}$ genomlöps moturs,

(a) dels via direkt parametrisering (2.5p)

(b) dels med hjälp av Greens sats. (2.5p)

6. Låt a, b vara positiva tal. Låt (4p)

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad \mathcal{S} = \{(x,\, y,\, z) : x^2 + z^2 = a^2,\ 0 \le y \le b\}.$$

Med hjälp av Gauss sats bestäm, i termer av a och b, flödet av $\mathbf{F}$ uppåt genom den del av ytan $\mathcal{S}$ som ligger i första oktanten.

(Obs! *Noll* poäng för en lösning som inte använder sig av Gauss sats).

7. (a) Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definiera vad som menas med att f är *differentierbar* i en punkt $(a_1,\, \ldots,\, a_n)$. (1p)

(b) Låt f vara en differentierbar funktion av n variabler, som ovan, och låt $g_1,\, \ldots,\, g_n$ vara differentierbara funktioner av en variabel. Formulera och bevisa *kedjeregeln* för sammansättningen $f(g_1(t),\, \ldots,\, g_n(t))$. (6p)

8. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ett n-dimensionellt vektorfält.

(a) Definiera vad som menas med att $\mathbf{F}$ är ett *potentialfält.* (1p)

(b) Låt $\mathbf{F}$ vara ett kontinuerligt fält. Bevisa att $\mathbf{F}$ är ett potentialfält om och endast om det för varje enkel, sluten kurva γ i $\mathbb{R}^n$ gäller att $\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$. (7p)

(Obs! Du får full poäng om du bara behandlar fallet $n = 2$).

9. Låt $\mathcal{C}$ vara skärningskurvan mellan ytorna $(x-1)^2 + 4y^2 = 16$ och $2x + y + z = 3$, orienterad moturs sett uppifrån längs z-axeln. Låt (4p)

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \sin x^2)\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}.$$

Bestäm $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 180605

1. (a) Vi har

$$f_{1,x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^3}} \overset{(1,2)}{=} \frac{1}{3},$$
$$f_{1,y} = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2+y^3}} \overset{(1,2)}{=} 2.$$

Tangentplanens ekvation lyder

$$z-z_0 = f_{1,x}(x-x_0)+f_{1,y}(y-y_0) \Rightarrow z-3 = \frac{1}{3}(x-1)+2(y-2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow x+6y-3z = 4.$$

(b) Vi har

$$f_{2,x} = \frac{-18x}{(x^2+y)^2} \overset{(1,2)}{=} -2,$$
$$f_{2,y} = \frac{-9}{(x^2+y)^2} \overset{(1,2)}{=} -1.$$

En riktningsvektor för tangenten till skärningskurvan ges då av

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ f_{1,x} & f_{1,y} & -1 \\ f_{2,x} & f_{2,y} & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1/3 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots = \left(-3, \frac{7}{3}, \frac{11}{3}\right).$$

(c) Vi har redan att $f_1(1,2) = 3$, $f_{1,x}(1,2) = 1/3$, $f_{1,y}(1,2) = 2$. Och sedan,

$$f_{1,xx} = \frac{y^3}{(x^2+y^3)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} \frac{8}{27},$$
$$f_{1,xy} = \frac{-3xy^2}{2(x^2+y^3)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} -\frac{2}{9},$$
$$f_{1,yy} = \frac{12x^2y+3y^4}{4(x^2+y^3)^{3/2}} \overset{(1,2)}{=} \frac{2}{3}.$$

Så Taylorpolynomet av grad 2 i punkten (1, 2) är

$$P(h,k) = 3+\left(\frac{h}{3}+2k\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{8h^2}{27}-\frac{4hk}{9}+\frac{2k^2}{3}\right) = \frac{1}{54}(162+18h+108k+8h^2-12hk+36k^2).$$

(d) Funktionalmatrisen ges av

$$D\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_{1,x} & f_{1,y} \\ f_{2,x} & f_{2,y} \end{bmatrix} \overset{(1,2)}{=} \begin{bmatrix} 1/3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Funktionaldeterminanten är då $\left(\frac{1}{3}\right)(-1)-(-2)(2) = \frac{11}{3}$. Slutligen,

$$\text{Area}(\mathbf{F}(\Delta)) \approx \det(D\mathbf{F}) \cdot \text{Area}(\Delta) = \frac{11}{3} \cdot (0.03)(0.06) = 0.0066.$$

2. (a) Med hjälp av produktregeln får vi

$$f_x = -\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right),$$
$$f_y = -\frac{1}{y^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{y}+\frac{1}{x}\right).$$

Ingen av faktorerna $1/x^2$ eller $1/y^2$ kan bli noll, så vi får fyra möjligheter för en kritisk punkt:

FALL 1: $1+\frac{1}{y} = 1+\frac{2}{y}+\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x,y) = (1,-1)$,
FALL 2: $1+\frac{1}{y} = 1+\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x,y) = (-1,-1)$,
FALL 3: $1+\frac{1}{x} = 1+\frac{2}{x}+\frac{1}{y} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x,y) = (-1,1)$,
FALL 4: $1+\frac{2}{x}+\frac{1}{y} = 1+\frac{2}{y}+\frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow (x,y) = (-3,-3)$.

(b) Notera först att

$$x \leq -1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} \geq 0, \tag{1}$$

$$y \leq -1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{y} \geq 0, \tag{2}$$

$$x \leq -1 \ \&\ y \leq -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} < 0. \tag{3}$$

Således är $f(x, y) \leq 0$ för alla $(x, y) \in D$ och lika med noll om och endast om $x = -1$ eller $y = -1$, dvs på randen till D. Noll är således det största värdet som antas av f i D. Man kan också härleda från (1)-(3) att de tre första kritiska punkterna ovan är alla sadelpunkter. T.ex. betrakta $(-1, -1)$ och låt $\varepsilon > 0$ vara liten. Om $(x, y) = (-1+\varepsilon, -1-\varepsilon)$ så blir $1 + \frac{1}{x} < 0$, $1 + \frac{1}{y} > 0$ och således är $f(x, y) > 0$. Å andra sidan om $(x, y) = (-1+\varepsilon, -1+\varepsilon)$ så blir $1 + \frac{1}{x} < 0$, $1 + \frac{1}{y} < 0$ och således är $f(x, y) < 0$. M.a.o. f antar både positiva och negativa värden godtyckligt nära $(-1, -1)$ så denna punkt kan inte vara en lokal extrempunkt. Liknande resonemang kan föras för punkterna $(-1, 1)$ och $(1, -1)$.

Det återstår att motivera att f antar sitt minsta värde för hela D i punkten $(-3, -3)$ som således är en lokal minimum. Och för att bevisa detta räcker det i sin tur att bevisa att f faktiskt antar ett minsta värde i D, för vi har redan konstaterat att max-värdet är noll och antas i varje randpunkt så om ett min antas så måste det ske i en kritisk punkt, och det finns inga fler kritiska punkter.

Notera att $f(-3, -3) = -\frac{8}{27}$. Eftersom $f(x, y) = f(y, x)$ så räcker det att visa att det finns $y_0 < -1$ sådan att, om $y < y_0$ så är $f(x, y) > -\frac{8}{27}$ för varje $x \leq -1$. Då $y \to -\infty$ går $17Y \to 0$ så $f(x, y) \to g(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right)$. Sätt $u := 1/x$. Om $x \leq -1$ så är $u \in [-1, 0)$. Vi har $g(u) = u(1+u)$ så $g'(u) = 0$ då $u = -1/2$. Vi måste betrakta båda denna stationära punkt samt ändpunkterna: $g(-1) = g(0) = 0$, $g(-1/2) = -1/4$.

Och nu, eftersom $-1/4 > -8/27$ och f är kontinuerlig, vad allt detta innebär är att, om y är tillräckligt negativ, så kommer $f(x, y) > -8/27$ att gälla för alla $x \leq -1$, v.s.v.

3. Låt $F(x, y, z) := xye^{1+z} + yz^2 + (x+y)z$. Vi har

$$F_z = xye^{1+z} + 2yz + (x+y) \overset{(2,1,-1)}{=} 3 \neq 0,$$

vilket innebär, enligt Implicta Funktionsstasen, att en implciit funktion $z = f(x, y)$ definieras i en omgivning av $(2, 1, -1)$. Näst har vi

$$F_x = ye^{1+z} + z \overset{(2,1,-1)}{=} 0,$$
$$F_y = xe^{1+z} + z^2 + z \overset{(2,1,-1)}{=} 2,$$

och därmed, enligt Implicta Funktionssatsen,

$$f_x(2, 1) = -\frac{F_x}{F_z} = 0, \quad f_y(2, 1) = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{2}{3}. \tag{4}$$

Sedan har vi

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} f_x = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{F_x}{F_z}\right) = -\frac{F_z \frac{\partial F_x}{\partial y} - F_x \frac{\partial F_z}{\partial y}}{(F_z)^2} =$$
$$\overset{(2,1,-1)}{=} -\frac{3 \cdot \frac{\partial F_x}{\partial y} - 0 \cdot \frac{\partial F_z}{\partial y}}{3^2} = -\frac{1}{3}\frac{\partial F_x}{\partial y}(2, 1, -1).$$

Men

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(ye^{1+z} + z) = e^{1+z} + ye^{1+z} f_y + f_y \overset{(2,1,-1)}{=} \ldots \text{från (4)} \ldots = -\frac{1}{3},$$

så $f_{xy}(2, 1) = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$.

4. (a) Det gäller att byta ordning i integrationen. Vi kan konstatera att området kan i stället beskrivas som $D = \{(x,\, y) : 0 \le y \le 1,\, y \le x \le \sqrt{y}\}$. Således blir integralen

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^y}{y}\,dy \int_y^{\sqrt{y}} x\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^y}{y}\,dy\,[x^2]_y^{\sqrt{y}} = \\ = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{e^y}{y}(y-y^2)\,dy &= \frac{1}{2}\int_0^1 (e^y - ye^y)\,dy = \\ &= \frac{1}{2}[2e^y - ye^y]_0^1 = \cdots = \frac{e-2}{2}.\end{aligned}$$

(b) Vi byter variabler till $u = x^2 + 4y^2$, $v = y/x$ sådan att $D = \{(u,\, v) : 0 \le u \le 4,\, 0 \le v \le 1\}$. Vi har

$$\frac{\partial(u,\,v)}{\partial(x,\,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 8y \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2 + 8\frac{y^2}{x^2} = 2 + 8v^2$$

och därmed

$$dx\,dy = \frac{\partial(x,\,y)}{\partial(u,\,v)}\,du\,dv = \frac{1}{2+8v^2}\,du\,dv.$$

Vidare, eftersom $y/x = v$ så blir integralen, i termer av u och v,

$$\int_0^4 du \int_0^1 \frac{v}{2+8v^2}\,dv \overset{t:=2+8v^2}{=} 4 \times \frac{1}{16} \times \int_2^{10} \frac{dt}{t} = \cdots = \frac{\ln 5}{4}.$$

5. (a) Kurvan kan parametriseras enligt

$$\mathcal{C} = \{(3\cos t,\, 3\sin t) : \pi/4 \le t \le 3\pi/4\}.$$

Således blir kurvintegralen

$$\begin{aligned}&\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (3\cos t - 27\sin^3 t)(-3\sin t\,dt) + (27\cos^3 t + 27\sin^3 t)(3\cos t\,dt) = \\ &= -9\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin t\cos t\,dt + 81\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^3 t\cos t\,dt + 81\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\sin^4 t + \cos^4 t)\,dt.\end{aligned}$$

Eftersom $\sin t$ är symmetrisk och $\cos t$ är antisymmetrisk kring $t = \pi/2$ så kommer de två första integralerna att bli noll. Nu lite trigonometri:

$$\begin{aligned}\sin^4 t &= (\sin^2 t)(\sin^2 t) = (\sin^2 t)(1-\cos^2 t) = \sin^2 t - \frac{1}{4}\sin^2 2t = \\ &= \frac{1}{2}(1-\cos 2t) - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(1-\cos 4t) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos^4 t &= (\cos^2 t)(\cos^2 t) = (\cos^2 t)(1-\sin^2 t) = \cos^2 t - \frac{1}{4}\sin^2 2t = \\ &= \frac{1}{2}(1+\cos 2t) - \frac{1}{4}\frac{1}{2}(1-\cos 4t) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t,\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin^4 t + \cos^4 t = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t.$$

Således blir kurvintegralen

$$\frac{81}{4}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (3+\cos 4t)\,dt = \frac{81}{4}\left[3t + \frac{1}{4}\sin 4t\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = \frac{81}{4}\left[\left(\frac{9\pi}{4}+0\right) - \left(\frac{3\pi}{4}+0\right)\right] = \frac{243\pi}{8}.$$

(b) Låt $\mathcal{C}_2$ vara raksträckan från $(0, 0)$ till $\frac{3}{\sqrt{2}}(1, 1)$ och låt $\mathcal{C}_3$ vara raksträckan från $\frac{3}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ tillbaka till $(0, 0)$. Låt D vara området som innesluts av $\gamma = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C} + \mathcal{C}_3$. Då gäller enligt Greens sats att

$$\oint_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y^3) \right] dx\, dy =$$

$$= 3 \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 3 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\theta \int_0^3 r^3\, dr = \cdots = \frac{243\pi}{8}.$$

Således är

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{243\pi}{8} - \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Jag hävdar att de två sista kurvintegralerna tar ut varandra, som skulle göra att resultatet överensstämmer med (a). Betrakta först $\mathcal{C}_2$. Använd x som parameter, sådan att $y = x$ längs kurvan. Vi har då

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{3/\sqrt{2}} (x - x^3)\, dx + (x^3 + x^3)\, dx = \int_0^{3/\sqrt{2}} (x^3 + x)\, dx.$$

På $\mathcal{C}_3$ kan vi använda y som parameter och då är $x = -y$ längs kurvan. Således är

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{3/\sqrt{2}}^0 (-y - y^3)\,(-dy) + ((-y)^3 + y^3)\, dy = \int_{3/\sqrt{2}}^0 (y^3 + y)\, dy = -\int_0^{3/\sqrt{2}} (y^3 + y)\, dy.$$

Så integralerna längs $\mathcal{C}_2$ och $\mathcal{C}_3$ mycket riktigt tar ut varandra, v.s.v.

6. För att få till ett inneslutet område så måste man lägga till fyra ytor $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$, såsom i Figur 1. Låt K vara det inneslutna området. Då gäller att

$$\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \iiint_K (2 + 2y)\, dV = 2V(1 + \bar{y}),$$

där V är volymen av K och $\bar{y}$ är medelvärdet av y i K. Eftersom K är bara en fjärdedel av en cylinder så är $\bar{y} = b/2$ av symmetriskäl och $V = \frac{1}{4} \cdot \pi a^2 b$. Så $\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{2}\right)\pi a^2 b$.

Således gäller enligt Gauss sats att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{2}\right)\pi a^2 b - \sum_{i=1}^{4} \iint_{\mathcal{S}_i} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS. \tag{5}$$

I (5) så är normalvektorerna alltid riktade utåt från K. På $\mathcal{S}$ är utåt samma sak som uppåt, så VL av (5) är precis den flödesintegral som vi är ute efter. Det återstår alltså att behandla integralerna över de övriga $\mathcal{S}_i$ var för sig.

Fallet $\mathcal{S}_1$: På $\mathcal{S}_1$ är $z = 0$ och $\hat{\mathbf{N}} = (0, 0, -1)$. Således är $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ i varje punkt och $\iint_{\mathcal{S}_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$.

Fallet $\mathcal{S}_2$: På $\mathcal{S}_2$ är $x = 0$ och $\hat{\mathbf{N}} = (-1, 0, 0)$. Således är $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ i varje punkt och $\iint_{\mathcal{S}_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$.

Fallet $\mathcal{S}_3$: På $\mathcal{S}_3$ är $y = 0$ och $\hat{\mathbf{N}} = (0, -1, 0)$. Således är $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = 0$ i varje punkt och $\iint_{\mathcal{S}_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = 0$.

Fallet $\mathcal{S}_4$: På $\mathcal{S}_4$ är $y = b$ och $\hat{\mathbf{N}} = (0, 1, 0)$. Således är $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = b^2$ i varje punkt och $\iint_{\mathcal{S}_4} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = b^2 \times \text{Area}(\mathcal{S}_4) = b^2 \times \frac{\pi a^2}{4}$, ty $\mathcal{S}_4$ är en fjärdedel av en skiva av radie a.

Insättning av de fyra fallen in i (5) ger att

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{2}\right)\pi a^2 b - \frac{\pi a^2 b^2}{4} = \cdots = \frac{\pi a^2 b}{2}.$$

7. (a) f sägs vara differentierbar i punkten $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ om det finns en vektor $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ sådan att

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{h}\cdot\mathbf{A} + ||\mathbf{h}||\rho(\mathbf{h}),$$

där $\rho(\mathbf{h}) \to 0$ då $\mathbf{h} \to (0, \ldots, 0)$.

(b) Sats 2.3.4 i boken (eller ge beviset på kurshemsidan).

8. (a) Definition 9.4.2 i boken.

(b) Satser 9.4.2 och 9.4.3 i boken.

9. Stokes sats lyder

$$\oint_{\partial Y} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_Y (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\hat{\mathbf{N}}\,dS, \tag{6}$$

där Y är ett orienterat ytstycke med positivt orienterad rand ∂Y. I denna uppgift tar vi som Y den del av planet $2x + y + z = 3$ som skärs ut av den elliptiska cylindern $(x-1)^2 + 4y^2 = 16$. Eftersom randen genomlöps moturs sett uppifrån längs z-axeln så är den positivt orienterad, dvs $\partial Y = +\mathcal{C}$. Vi har

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^2+y^2+\sin x^2 & 2xy+z & xz+2yz \end{vmatrix} = \cdots = (2z-1,\, z,\, 0). \tag{7}$$

Planet är en funktionsyta $z = f(x, y) = 3 - 2x - y$ och normalen ska peka uppåt i z-led vid positiv orientering så

$$\hat{\mathbf{N}}\,dS = -(f_x,\, f_y,\, -1)\,dx\,dy = (2,\, 1,\, 1)\,dx\,dy. \tag{8}$$

Insättning av (7) och (8) in i (6) ger

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{\pi(Y)} (2z-1,\, z,\, 0)\cdot(2,\, 1,\, 1)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\pi(Y)} (5z-2)\,dx\,dy = \iint_{\pi(Y)} [5(3-2x-y)-2]\,dx\,dy = \iint_{\pi(Y)} (13-10x-5y)\,dx\,dy.$$

Med $\pi(Y)$ menas projektionen av Y på xy-planet, som är just den elliptiska skivan $(x-1)^2 + 4y^2 \le 16$. Eftersom denna skiva är symmetrisk kring både $x = 1$ och $y = 0$ kan vi konstatera att

$$\iint_{\pi(Y)} (x-1)\,dx\,dy = \iint_{\pi(Y)} y\,dx\,dy = 0.$$

Således är

$$\iint_{\pi(Y)} (13-10x-5y)\,dx\,dy = \iint_{\pi(Y)} [3-10(x-1)-5y]\,dx\,dy =$$

$$= \iint_{\pi(Y)} 3\,dx\,dy = 3\times \text{Skivans area}.$$

Ellipsens ekvation kan skrivas om till $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ så skivans area är $\pi ab = \pi(4)(2) = 8\pi$.

SVAR: $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 24\pi$.

$y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$, calculate
ight h. The base

the plane $z = h$
of two parts: the
z) points directly
$\hat{N} = 0$ on $\mathcal{S}$. On
the cone. Since
n,

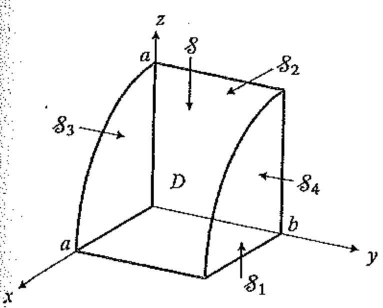

Figure 16.14 The boundary of domain D has five faces, one curved and four planar

Figur 1