Tentamen
MVE035 Flervariabelanalys F/TM

2018-03-10 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Peter Hegarty, telefon: 0705705475 (alt. Ankn. 5325, Gustav Kettil)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 40% (20 poäng), inklusive eventuella bonuspoäng från Maple-TA uppgifterna och Matlab. Preliminärt så krävs 60% (30 poäng) för betyget 4 och 80% (40 poäng) för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentan. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 3 april. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s studieexpedition.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak tillvägagångssätten och motiveringarna som ger poäng, inte svaren.

Uppgifterna

1. Låt

$$f(x,\,y) = 3x\ln(y+2) + x - 2y^2, \qquad g(x,\,y,\,z) = x + ye^z + x^2y^2.$$

(a) Bestäm ekvationen för tangenplanet till ytan $g(x,\,y,\,z) = 5$ i punkten $(2,\,-1,\,0)$. (1.5p)

(b) Bestäm en riktningsvektor för tangentlinjen till skärningskurvan mellan ytorna $z = f(x,\,y)$ och $g(x,\,y,\,z) = 5$ i punkten $(2,\,-1,\,0)$. (1.5p)

(c) Bestäm Taylorpolynomet av grad 2 till $f(x,\,y)$ i punkten $(2,\,-1)$ och därmed beräkna ett approximativt värde för $f(2.01,\,-0.98)$. (1.5p)

(d) Förklara varför ekvationen $g(x,\,y,\,z) = 5$ definierar y som en funktion $y = y(x,\,z)$ i en omgivning av punkten $(2,\,-1,\,0)$ och bestäm även $\frac{\partial y}{\partial x}(2,\,0)$ och $\frac{\partial y}{\partial z}(2,\,0)$. (1.5p)

2. (a) Skärningen mellan (.....) $y^2 + z^2 = 2$ och (.....) $z = x$ är en (.....). Fyll i de tre korrekta orden. (0.6p)
(OBS! Orden "ytan" och "kurvan" godkänns ej, man måste vara mer specifikt!).

(b) Utan att räkna något, förklara varför funktionen $f(x,\,y,\,z) = x + y^2z$ *måste* anta både ett maximum och ett minimum värde på skärningen. (0.6p)

(c) Bestäm dessa värden. (3.8p)

3. Bestäm den allmänna lösningen till den partiella differentialekvationen (5p)

$$f_{xx} + 2f_{xy} + f_{yy} - 2(f_x + f_y) = 0,$$

där $f(x,\,y) \in C^2(\mathbb{R})$, genom att införa de nya variablerna $u = e^{x+y}$, $v = e^{x-y}$.

(TIPS! Kan underlätta att konstatera att $u_x = u_y = u$, $v_x = v$, $v_y = -v$).

Var god vänd!

4. Bestäm masscentrumet $\bar{m} = (m_x, m_y, m_z)$ för föremålet som ockuperar området (4p)

$$D = \{(x, y, z) : -x \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \pi, -2 \leq z \leq 2\}$$

och vars densitet ges av $\rho(x, y, z) = e^{z^2}(1 + \cos y)$.

5. Låt $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara fältet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x^2 - 2x\sin(x^2+y^2)e^{\cos(x^2+y^2)+z^2}, y^2 - 2y\sin(x^2+y^2)e^{\cos(x^2+y^2)+z^2}, z^2 + 2ze^{\cos(x^2+y^2)+z^2}\right)$$

och låt γ vara kurvan med parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, -2t^2, t^3), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

(a) Bestäm kurvans längd. (2p)

(b) Bestäm $\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. (3p)

6. En trumma ges av unionen av de tre ytorna Y_1, Y_2, Y_3 där

$$Y_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\},$$
$$Y_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1 + z^2, 0 \leq z \leq 1\},$$
$$Y_3 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 2, z = 1\}.$$

(a) Skissa trumman. (1p)

(b) Bestäm flödet av vektorfältet $\mathbf{F} = (x^3, y^3, x^2)$ ut ur trumman genom att använda Gauss sats. (3p)

(c) Bestäm samma flöde men *utan* att använda Gauss sats (dvs direkt). (3p)

7. Låt $D \subseteq \mathbb{R}^2$ vara en domän, dvs en öppen och sammanhängande mängd, och låt $f : D \to \mathbb{R}$ vara en funktion.

(a) Definiera vad som menas med att (2p)
- f *är differentierbar* i en punkt $(a, b) \in D$
- f *tillhör klassen* $C^2(D)$.

(b) Bevisa att om f är av klassen C^2 då gäller att (5p)

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \qquad \forall\, (a, b) \in D.$$

8. (a) Ge en formell definition av termen "*orienterat C^1-ytstycke med positivt orienterad rand*". (1p)

(b) Formulera Stokes sats. (1p)

(c) Bevisa satsen då ytan är en del av en C^2-funktionsyta. (5p)
(OBS! Du kan använda Greens sats i ditt bevis utan vidare motivering).

9. Låt $0 < a \leq b$ vara två positiva reella tal. Bevisa att (4p)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 + (b^2 - a^2)\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Go n'eirí an bóthar libh!

Lösningar Flervariabelanalys F/TM, 180310

1. (a) $\nabla g = (1 + 2xy^2,\, e^z + 2x^2y,\, ye^z) \overset{(2,\,-1,\,0)}{=} (5,\, -7,\, -1)$. Så tangentplanets ekvation är $5x - 7y - z = d$ för något d, som bestäms genom att sätta in punkten $(2,\, -1,\, 0)$. Så $d = 5(2) - 7(-1) - 0 = 17$.

Svar: $5x - 7y - z = 17$.

(b) En normal till funktionsytan $z = f(x,\, y)$ ges av $\mathbf{n} = (f_x,\, f_y,\, -1) =$
$= \left(3\ln(y+2) + 1,\, \frac{3x}{y+2} - 4y,\, -1\right) \overset{(2,\,-1,\,0)}{=} (1,\, 10,\, -1)$.
En riktningsvektor för tangenten till skärningskurvan ges då av

$$\mathbf{n} \times \nabla g = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 10 & -1 \\ 5 & -7 & -1 \end{vmatrix} = (-17,\, -4,\, -57).$$

(c) Vi har redan att $f(2,\, -1) = 0$, $f_x(2,\, -1) = 1$, $f_y(2,\, -1) = 10$. Och sedan,

$$f_{xx} \equiv 0, \quad f_{xy} = \frac{3}{y+2} \overset{(2,-1)}{=} 3, \quad f_{yy} = \frac{-3x}{(y+2)^2} - 4 \overset{(2,-1)}{=} -10.$$

Så Taylorpolynomet av grad 2 i punkten $(2,\, -1)$ är

$$P(h,\, k) = 0 + [1 \cdot h + 10 \cdot k] + \frac{1}{2}\left[0 \cdot h^2 + 2 \cdot 3 \cdot hk - 10 \cdot k^2\right] = h + 10k + 3hk - 5k^2.$$

Slutligen har vi approximationen

$$f(2.01,\, -0.98) \approx P(0.01,\, 0.02) =$$
$$= 0 + 0.01 + 10(0.02) + 3(0.01)(0.02) - 5(0.02)^2 = 0.2086.$$

(d) Från del (a) har vi, i punkten $(2,\, -1,\, 0)$, att $(g_x,\, g_y,\, g_z) = (5,\, -7,\, -1)$. Eftersom $g_y \neq 0$ så är $y = y(x,\, z)$ i en omgivning av $(2,\, 0)$, enligt Implicita Funktionssatsen. Dessutom är

$$\frac{\partial y}{\partial x}(2,\, 0) = -\frac{g_x}{g_y} = \frac{5}{7}, \quad \frac{\partial y}{\partial z}(2,\, 0) = -\frac{g_z}{g_y} = -\frac{1}{7}.$$

2. (a) Cylindern, planet, ellips.

(b) Ty ellipsen är en kompakt mängd (den är sluten och begränsad) och f är en kontinuerlig funktion (uppenbart).

(c) Vi vill maximiera/minimera $f(x,\, y,\, z) = x + y^2 z$ under bivillkoren $g_1 = g_2 = 0$ där $g_1(x,\, y,\, z) = x - z$ och $g_2(x,\, y,\, z) = y^2 + z^2 - 2$. Vi kör Lagranges metod:

$$f_x = \lambda \cdot g_{1,\,x} + \mu \cdot g_{2,\,x} \Rightarrow 1 = \lambda \quad (1)$$
$$f_y = \lambda \cdot g_{1,\,y} + \mu \cdot g_{2,\,y} \Rightarrow 2yz = \mu(2y) \quad (2)$$
$$f_z = \lambda \cdot g_{1,\,z} + \mu \cdot g_{2,\,z} \Rightarrow y^2 = -\lambda + \mu(2z) \quad (3)$$
$$g_1 = 0 \Rightarrow x = z \quad (4)$$
$$g_2 = 0 \Rightarrow y^2 + z^2 = 2. \quad (5)$$

Ekv. (2) ger två möjligheter, $y = 0$ eller $\mu = z$.
Fall 1: $y = 0$. Insättning i (5) ger $z = \pm\sqrt{2}$. Pga (4) har vi då två kandidatpunkter: $(\sqrt{2},\, 0,\, \sqrt{2})$ och $(-\sqrt{2},\, 0,\, -\sqrt{2})$.
Fall 2: $\mu = z$. Insättning av detta och av (1) in i (3) ger $y^2 = 2z^2 - 1$. Sätt in detta i (5) så får vi $3z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow y^2 = 2(\pm 1)^2 - 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Vi har också $x = z$ enligt (4). Totalt har vi fyra kandidatpunkter här: $(1,\, 1,\, 1)$, $(1,\, -1,\, 1)$, $(-1,\, 1,\, -1)$, $(-1,\, -1,\, -1)$.

Slutligen beräknar vi f:s värde i var och en av de sex kandidatpunkterna:

$$f(\sqrt{2},\, 0,\, \sqrt{2}) = \sqrt{2}, \quad f(-\sqrt{2},\, 0,\, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}, \quad f(1,\, 1,\, 1) = f(1,\, -1,\, 1) = 2,$$
$$f(-1,\, 1,\, -1) = f(-1,\, -1,\, -1) = -2.$$

Så f:s största värde är $+2$ och dess minsta värde är -2.

3. Enligt kedjeregeln har vi först

$$f_x = f_u u_x + f_v v_x = u f_u + v f_v, \tag{6}$$
$$f_y = f_u u_y + f_v v_y = u f_u - v f_v. \tag{7}$$

Derivera (6) en gång till m.a.p. x med hjälp av både kedjeregeln och produktregeln:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= u(f_{uu} \cdot u + f_{uv} \cdot v) + f_u \cdot u + v(f_{vu} \cdot u + f_{vv} \cdot v) + f_v \cdot v \\ &= \cdots = u^2 f_{uu} + 2uv f_{uv} + v^2 f_{vv} + u f_u + v f_v. \end{aligned} \tag{8}$$

Om vi deriverar (6) m.a.p. y i stället så får vi, efter en liknande beräkning,

$$f_{xy} = u^2 f_{uu} - v^2 f_{vv} + u f_u - v f_v. \tag{9}$$

Om vi deriverar (7) m.a.p. y igen så får vi på liknande vis

$$f_{yy} = u^2 f_{uu} - 2uv f_{uv} + v^2 f_{vv} + u f_u + v f_v. \tag{10}$$

Efter insättning av (6)-(10) får vi helt enkelt att

$$f_{xx} + 2f_{xy} + y_{yy} - 2(f_x + f_y) = \cdots = 4u^2 f_{uu}.$$

Men $u = e^{x+y}$ kan inte vara noll, så PDE:n reduceras till $f_{uu} = 0$. Första integrationen ger $f_u = G(v)$ och andra ger $f = u \cdot G(v) + H(v)$. Här är G, H valfria C^2-funktioner av en variabel. Slutligen skriver vi den allmänna lösningen åter i termer av x och y:

$$f(x, y) = e^{x+y} G(e^{x-y}) + H(e^{x-y}), \quad \text{där } G(t),\, H(t) \in C^2.$$

4. Både området och föremålets densitet är symmetriska kring planet $y = 0$ samt kring planet $z = 0$, vilket direkt innebär att $m_y = m_z = 0$. Det återstår att beräkna

$$m_x = \frac{\iiint_D x\rho\, dV}{\iiint_D \rho\, dV} = \frac{\int_{-2}^{2} e^{z^2}\, dz \int_0^{\pi} x\, dx \int_{-x}^{x} (1 + \cos y)\, dy}{\int_{-2}^{2} e^{z^2}\, dz \int_0^{\pi} dx \int_{-x}^{x} (1 + \cos y) dy}.$$

Notera att z-integralerna tar ut varandra, så det spelar ingen roll att vi inte har en enkel primitiv funktion för dessa. Vi har att $\int_{-x}^{x} (1 + \cos y)\, dy = 2(x + \sin x)$. Så

$$m_x = \frac{\int_0^{\pi} x(x + \sin x)\, dx}{\int_0^{\pi} (x + \sin x)\, dx} = \frac{\left[\frac{x^3}{3} - x\cos x + \sin x\right]_0^{\pi}}{\left[\frac{x^2}{2} - \cos x\right]_0^{\pi}} = \cdots = \frac{\frac{\pi^3}{3} + \pi}{\frac{\pi^2}{2} + 2}.$$

Så $\bar{m} = \left(\frac{\pi^3/3 + \pi}{\pi^2/2 + 2}, 0, 0\right)$.

5. (a) Kurvlängden ges av

$$\begin{aligned} \int_0^1 ||\mathbf{r}'(t)||\, dt &= \int_0^1 ||(2t, -4t, 3t^2)||\, dt = \\ = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (-4t)^2 + (3t^2)^2}\, dt &= \int_0^1 \sqrt{20t^2 + 9t^4}\, dt = \\ = \int_0^1 t\sqrt{20 + 9t^2}\, dt \overset{u=20+9t^2}{=} \frac{1}{18} \int_{20}^{29} \sqrt{u}\, du &= \cdots = \frac{1}{27}\left(29\sqrt{29} - 20\sqrt{20}\right). \end{aligned}$$

(b) Man kan se ganska så direkt att $\mathbf{F} = \nabla V$ där

$$V(x, y, z) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) + e^{\cos(x^2+y^2)+z^2}.$$

Eftersom γ går från $(0, 0, 0)$ till $(1, -2, 1)$ så är

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = V(1, -2, 1) - V(0, 0, 0) = \left(-2 + e^{\cos 5 + 1}\right) - \left(0 + e^{\cos 0 + 0}\right) = e^{1+\cos 5} - e - 2.$$

6. (a) Se Figur 1. Notera att sidorn är konkava, ty $z = z(r) = \sqrt{r^2 - 1}$ så $z''(r) = \frac{-1}{(r^2-1)^{3/2}} < 0$.

(b) Enligt Gauss Sats så ges flödet av $\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV$ där K är området som innesluts av trummen. Vi har $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3(x^2 + y^2)$ och $K = \{(x,\, y,\, z) : 0 \le z \le 1,\ x^2 + y^2 \le 1 + z^2\}$. Så

$$\begin{aligned}\iiint_K \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= 3\int_0^1 dz \iint_{x^2+y^2 \le 1+z^2} (x^2 + y^2)\, dx dy = \\ &\overset{\text{polära}}{=} 3\int_0^1 dz \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{1+z^2}} r^2 \cdot r\, dr\, d\theta = \\ &= \cdots = \frac{3\pi}{2}\int_0^1 (1 + z^2)^2\, dz = \cdots = \frac{14\pi}{5}.\end{aligned}$$

(c) Sätt $Y = Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3$, så Y är hela trummans yta. Vi söker $\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS$, där normalen pekar hela tiden utåt. Vi kan dela upp flödesintegralen:

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS + \iint_{Y_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS.$$

På Y_1 är $\hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, -1)$ så

$$\iint_{Y_1} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = -\iint_{x^2+y^2 \le 1} x^2\, dx\, dy, \tag{11}$$

vilket skulle kunna räknas ut men det behövs ej (vi ska se om en stund varför!). På Y_3 är $\hat{\mathbf{N}} = (0,\, 0,\, 1)$ så

$$\iint_{Y_3} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{x^2+y^2 \le 2} x^2\, dx\, dy, \tag{12}$$

vilket vi inte heller behöver räkna ut. Eftersom $z \ge 0$ på Y_2 kan den betraktas som en funktionsyta, $z = f(x,\, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$. Vi har således

$$\hat{\mathbf{N}}\, dS = \pm(f_x,\, f_y,\, -1)\, dx\, dy = \pm\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},\, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}},\, -1\right) dx\, dy.$$

Vi väljer $+$ tecknet eftersom den utåtgående normalen måste ha en negativ z-komponent (se Figur 1). Notera att projektionen av Y_2 på xy-planet är en annulus $1 \le x^2 + y^2 \le 2$. Således har vi

$$\iint_{Y_2} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{1 \le x^2+y^2 \le 2} \left(\frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} - x^2\right) dx\, dy. \tag{13}$$

Nu konstaterar vi att om integralen i (13) delas upp i två delar, så kommer den andra delen, nämligen $\iint_{1 \le x^2+y^2 \le 2} -x^2\, dx\, dy$, att exakt kancellera summan av integralerna i (11) och (12). Så vi har att

$$\iint_Y \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \iint_{1 \le x^2+y^2 \le 2} \frac{x^4 + y^4}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}\, dx\, dy \overset{\text{polära}}{=} \int_0^{2\pi} (\cos^4\theta + \sin^4\theta)\, d\theta \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^5}{\sqrt{r^2 - 1}}\, dr. \tag{14}$$

Först θ-integralen. Av symmetriskäl så är $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^4\theta\, d\theta$. Sedan lite trigonometri:

$$\begin{aligned}\cos^4\theta &= \cos^2\theta(1 - \sin^2\theta) = \cos^2\theta - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta = \\ &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) - \frac{1}{8}(1 - \cos 4\theta) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{1}{8}\cos 4\theta.\end{aligned}$$

När vi integrerar från 0 till 2π så kommer endast konstanten att bidra, alltså $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4}$. Så θ-integralen i (14) är $\frac{3\pi}{2}$. Vi vet från del (b) att flödesintegralens värde är $\frac{14\pi}{5}$. Därför återstår att visa att

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^5}{\sqrt{r^2-1}}\, dr = \frac{28}{15},$$

vilket kan göras med hjälp av substitutionen $u = r^2 - 1$. Detaljerna lämnas till läsaren.

7. (a) i. f säga vara differentierbar i punkten $(a,\, b)$ om det finns konstanter $A_1,\, A_2$ sådana att

$$f(a+h,\, b+k) = f(a,\, b) + h \cdot A_1 + k \cdot A_2 + \sqrt{h^2+k^2}\,\rho(h,\, k),$$

där $\rho(h,\, k) \to 0$ då $(h,\, k) \to (0,\, 0)$.

ii. f sägs tillhöra klassen $C^2(D)$ om alla de partiella derivatorna $f_x,\, f_y,\, f_{xx},\, f_{xy},\, f_{yy}$ existerar och är kontinuerliga funktioner i hela D.

(b) Sats 2.5.9 i boken (eller ge beviset på kurshemsidan).

8. (a) Se s.379 i boken.

(b) Sats 10.3.2 i boken.

(c) Beviset av Sats 10.3.2 såsom i boken.

9. Låt $\mathbf{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara fältet

$$\mathbf{B}(x,\, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2},\, \frac{x}{x^2+y^2} \right).$$

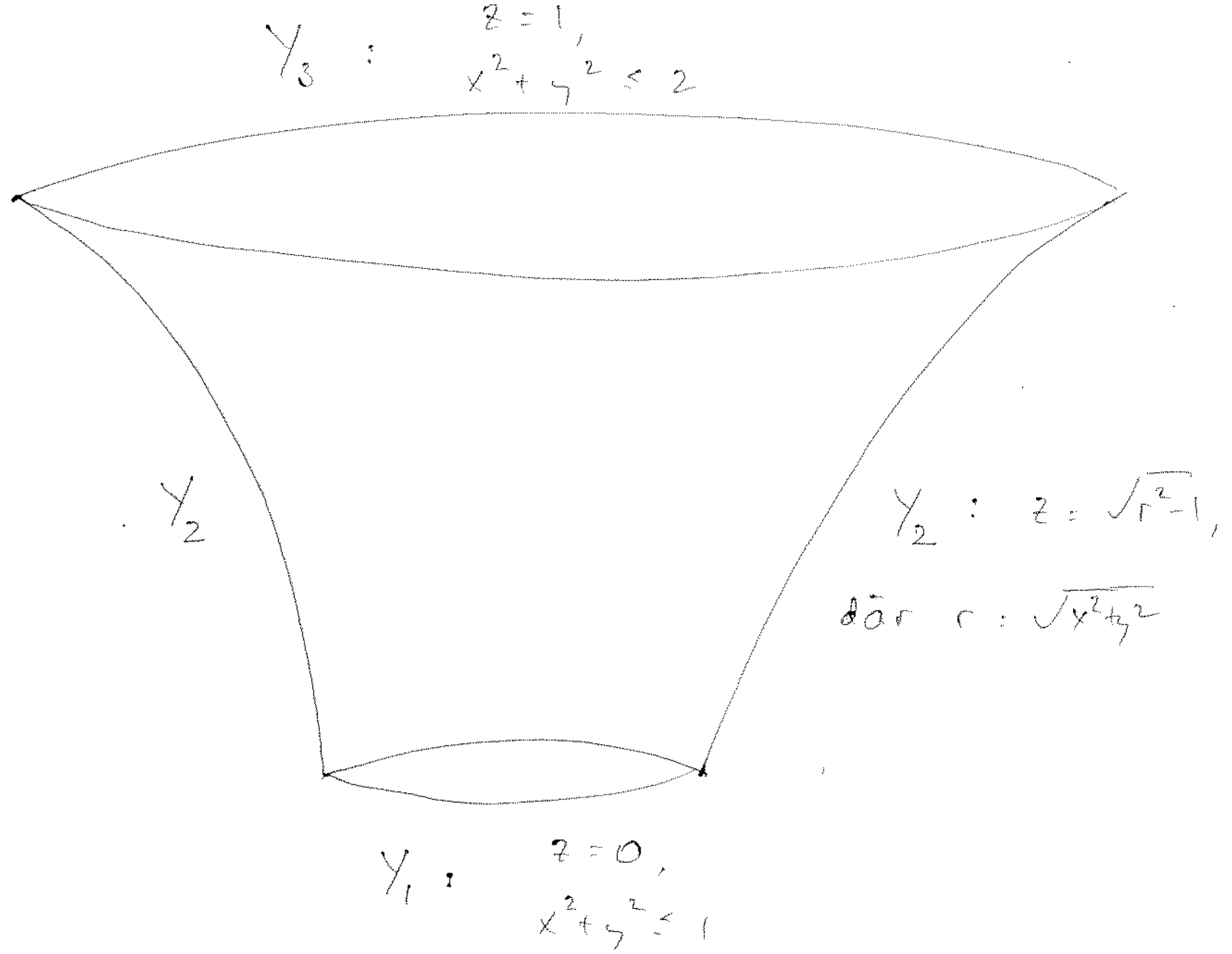
Med hjälp av Greens Sats kan man bevisa (precis som i Exempel 9, s.340 i boken) att, för en godtycklig enkel och sluten C^1-kurva γ i planet som innesluter origo och som är orienterad moturs, så gäller att $\oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi$. Nu väljer vi som γ ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, vilken vi parametriserar med elliptiskt polära koordinater: $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$. Således blir

$$2\pi = \oint_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint_\gamma B_1\, dx + B_2\, dy =$$

$$= \oint_\gamma \frac{-y\, dx + x\, dy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(-b\sin t)(-a\sin t\, dt) + (a\cos t)(b\cos t\, dt)}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} =$$

$$= \cdots = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t}\, dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2+(b^2-a^2)\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}, \quad \text{v.s.v.}$$

Figur 1



Trumman : Notera att sidorna är konkava