

Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035  
2016-08-23, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: anknytning 5361

Telefonvakt: Dennis Eriksson

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt  $f(x, y) = x + 4y - \frac{2}{xy}$ .
  - (a) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan  $3 = f(x, y)$  i punkten  $(1, 1)$ . (2)
  - (b) Bestäm Taylorutvecklingen av  $f$  upp till grad 2 i punkten  $(1, 1)$ . (2)
  - (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till  $f$ . (2)
  - (d) Avgör om funktionen har global max eller min i området  $x, y > 0$ . Motivera! (2)
2. Beräkna arean av ytan  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ . (4)
3. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{B}(x, y, z) = \left(\frac{-ay}{x^2+y^2}, \frac{bx}{x^2+y^2}, 0\right)$  definierat utanför  $x = y = 0$ , och där  $a, b \in \mathbb{R}$  är konstanter.
  - (a) Bestäm relationen mellan konstanterna  $a$  och  $b$  så att  $\mathbf{B}$  blir rotationsfritt. (3)
  - (b) Med  $\mathbf{B}$  rotationsfritt som ovan, bestäm  $a$  och  $b$  precis så att arbetsintegralen längs enhetscirkeln, orienterad moturs, i planet  $z = 0$  blir  $2\pi$ . (2)
  - (c) Har  $\mathbf{B}$  en potential? Motivera! (1)
4. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y) = (-y \sin(x^3), y^2)$ . Beräkna, med hjälp av Greens sats, arbetet som  $\mathbf{F}$  utför längs randen  $C$ , positivt orienterad, till området  $D$  som begränsas av  $x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$  och  $y = 1$ . (5)
5. Låt  $K$  vara området som begränsas av  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ .
  - (a) Beräkna volymen för den del av  $K$  som ligger i första oktanten. (3)

(b) Beräkna flödet ut ur randen  $Y$  av  $K$  av vektorfältet som ges av (4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3 + \sin(zx), e^{-x^3-y^3}).$$

6. Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (6)

7. I denna uppgift är  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en funktion.

(a) Definiera vad det innebär att  $f$  är *differentierbar* respektive  $\mathcal{C}^1$ . (2)

(b) Visa att om  $f$  är  $\mathcal{C}^1$  så är  $f$  *differentierbar*. (5)

8. Låt  $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ . Den konvergerar.

(a) Visa att om  $y > 0$  så kan funktionen  $I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx$  "deriveras under integraltecknet". (2)

(b) Räkna ut  $I'(y)$  och använd detta för att bestämma  $I = I(0)$ . (5)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis

Tentamen i Flervariabelanalys, MVE035  
2016-08-23, kl. 14.00-18.00

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa.

Telefon: anknytning 5361

Telefonvakt: Dennis Eriksson

För godkänt krävs minst 20 poäng.

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40 poäng eller mera. Bonuspoäng från 2016 ingår.

Lösningar kommer på kursens hemsida. Talen i parentes bredvid uppgifterna och deluppgifterna anger antalet poäng de ger.

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

Examinator: Dennis Eriksson, Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola

1. I deluppgifterna nedan, låt  $f(x, y) = x + 4y - \frac{2}{xy}$ .
  - (a) Bestäm tangentlinjen till nivåkurvan  $3 = f(x, y)$  i punkten  $(1, 1)$ . (2)
  - (b) Bestäm Taylorutvecklingen av  $f$  upp till grad 2 i punkten  $(1, 1)$ . (2)
  - (c) Finn och klassificera kritiska (boken: *stationära*) punkter till  $f$ . (2)
  - (d) Avgör om funktionen har global max eller min i området  $x, y > 0$ . Motivera! (2)
2. Beräkna arean av ytan  $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 - 2z = 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ . (4)
3. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{B}(x, y, z) = \left(\frac{-ay}{x^2+y^2}, \frac{bx}{x^2+y^2}, 0\right)$  definierat utanför  $x = y = 0$ , och där  $a, b \in \mathbb{R}$  är konstanter.
  - (a) Bestäm relationen mellan konstanterna  $a$  och  $b$  så att  $\mathbf{B}$  blir rotationsfritt. (3)
  - (b) Med  $\mathbf{B}$  rotationsfritt som ovan, bestäm  $a$  och  $b$  precis så att arbetsintegralen längs enhetscirkeln, orienterad moturs, i planet  $z = 0$  blir  $2\pi$ . (2)
  - (c) Har  $\mathbf{B}$  en potential? Motivera! (1)
4. Betrakta vektorfältet  $\mathbf{F}(x, y) = (-y \sin(x^3), y^2)$ . Beräkna, med hjälp av Greens sats, arbetet som  $\mathbf{F}$  utför längs randen  $C$ , positivt orienterad, till området  $D$  som begränsas av  $x = \sqrt{y}, x = 1, y = 0$  och  $y = 1$ . (5)
5. Låt  $K$  vara området som begränsas av  $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z$ .
  - (a) Beräkna volymen för den del av  $K$  som ligger i första oktanten. (3)

(b) Beräkna flödet ut ur randen  $Y$  av  $K$  av vektorfältet som ges av (4)

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3 + \sin(zx), e^{-x^3-y^3}).$$

6. Formulera och bevisa satsen om att kurvintegralen av ett konservativt fält är en potentialdifferens. (6)

7. I denna uppgift är  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  en funktion.

(a) Definiera vad det innebär att  $f$  är *differentierbar* respektive  $\mathcal{C}^1$ . (2)

(b) Visa att om  $f$  är  $\mathcal{C}^1$  så är  $f$  *differentierbar*. (5)

8. Låt  $I = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$ . Den konvergerar.

(a) Visa att om  $y > 0$  så kan funktionen  $I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx$  "deriveras under integraltecknet". (2)

(b) Räkna ut  $I'(y)$  och använd detta för att bestämma  $I = I(0)$ . (5)

Totalt 8 frågor med totalt 50 poäng. Lycka till! /Dennis

**Lösning 1a:** Eftersom det kommer behövas i de andra deluppgifterna räknar vi ut de partiella derivatorna till  $f$ . De ges av  $f_x = 1 + \frac{2}{x^2y}$ ,  $f_y = 4 + \frac{2}{xy^2}$ ,  $f_{xx} = -\frac{4}{x^3y}$ ,  $f_{xy} = -\frac{2}{x^2y^2}$ ,  $f_{yy} = -\frac{4}{xy^3}$ .

Tangentlinjens ekvation i  $(1, 1)$  ges av  $0 = f_x(1, 1)(x-1) + f_y(1, 1)(y-1)$ . Eftersom  $f_x(1, 1) = 3$ ,  $f_y(1, 1) = 6$  får vi ekvationen  $x + 2y - 3 = 0$ .

**Lösning 1b:** Taylorutvecklingen av  $f$  i  $(a, b)$  upp till grad 2 ges av

$$P(h, k) = f(a, b) + f_x(a, b)h + f_y(a, b)k + \frac{1}{2}[f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2].$$

Här har vi satt  $h = x - a$ ,  $k = y - b$ . Direkt insättning ger oss i detta fallet

$$P(h, k) = 3 + 3h + 6k - 2h^2 - 2hk - 2k^2.$$

**Lösning 1c:** De kritiska punkterna ges av ekvationerna  $f_x = f_y = 0$ , vilket resulterar i ekvationssystemet  $x^2y = -2$ ,  $2xy^2 = -1$ . Genom att lösa ut  $y = -2/x^2$  får man snabbt  $x^3 = -8$ , dvs.  $x = -2$ , och således är  $y = -1/2$ . Vi studerar dess karaktär via den kvadratiske formen  $f_{xx}(a, b)h^2 + 2f_{xy}(a, b)hk + f_{yy}(a, b)k^2$ . Insättning av värden ger i punkten  $(a, b) = (-2, -1/2)$  formen

$$-h^2 - 4hk - 16k^2 = -(h + 2k)^2 - 12k^2.$$

Den är alltså negativt definit, och punkten är således ett strängt lokalt maximum.

**Lösning 1d:** Då  $x, y \rightarrow 0$  så blir termen  $-2/xy$  godtyckligt negativt. Alltså kan inte globalt minimum finnas. Å andra sidan, då  $x, y$  växer för positiva  $x$  och  $y$  går termen  $-2/xy$  mot noll, men  $x + 4y$  blir godtyckligt stor. Alltså finns inte globalt maximum.

**Lösning 2:** Ytan ges av  $z = f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ , och har alltså ytarea-elementet  $dS = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}dxdy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}dxdy$ . Ytan parametriseras lättast med polära koordinater  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $dxdy = r dr d\theta$ ,  $0 \leq r \leq 1$ ,  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ . Det ger oss integralen

$$\iint_S dS = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr d\theta = \pi \int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr.$$

Integralen räknas ut via variabelbytet  $u = 1 + r^2$ ,  $du = 2r dr$ , vilket ger

$$\int_0^1 \sqrt{1+r^2} r dr = \frac{1}{2} \int_1^2 u^{1/2} du = \frac{1}{3} [u^{3/2}]_1^2 = \frac{(2^{3/2} - 1)}{3}.$$

Vi får alltså att arean av ytan ges av  $\frac{\pi}{3}(2^{3/2} - 1)$ .

**Lösning 3a:** Rotationen av vektorfältet ges i det här fallet av  $\left(0, 0, \frac{\partial}{\partial x} \frac{bx}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-ay}{x^2+y^2}\right)$ .

Man räknar snabbt ut  $\frac{\partial}{\partial x} \frac{bx}{x^2+y^2} = \frac{b(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ ,  $-\frac{\partial}{\partial y} \frac{-ay}{x^2+y^2} = \frac{a(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ . För att rotationen ska vara noll måste således

$$\frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{a(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vi får alltså relationen  $a = b$ .

**Lösning 3b:** Enhetscirkeln  $C$  i planet  $z = 0$  kan parametreras som  $x = \cos \theta, y = \sin \theta, z = 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Vi får  $d\mathbf{r} = (dx, dy) = (-\sin \theta, \cos \theta)d\theta$ . Eftersom  $a = b$  så får vi  $\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (a \sin^2 \theta + a \cos^2 \theta) d\theta = 2\pi a$ . Alltså måste  $a = b = 1$ .

**Lösning 3c:** Nej. Om  $\mathbf{B} = \nabla \phi$  för en funktion  $\phi$  så är alla arbetsintegraler vägoberoende. Det innebär å andra sidan att vägintegralen längs alla slutna kurvor nödvändigtvis är noll, men i exemplet ovan med  $a = b = 1$  så får vi svaret  $2\pi$ .

**Lösning 4:** Greens sats säger att

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_D (Q_x - P_y) dA.$$

I detta fallet får vi alltså att arbetsintegralen ges av

$$\iint_D \sin(x^3) dx dy.$$

Beroende på ordningen, får vi alltså att integralen ges av en av följande två integraler

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sin(x^3) dx dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dy dx.$$

Den första integralen ser svår att räkna ut, så vi försöker med den andra. Vi får  $\int_0^1 \int_0^{x^2} \sin(x^3) dy dx = \int_0^1 x^2 \sin(x^3) dx$ . Denna räknas ut genom att sätta  $u = x^3, du = 3x^2 dx$ , vilket ger  $\frac{1}{3} \int_0^1 \sin(u) du = \frac{1 - \cos(1)}{3}$ .

**Lösning 5a:** Området  $K$  parametreras lättast med polära koordinater:  $x = R \cos \theta \sin \phi, y = R \sin \theta \sin \phi, z = R \cos \phi, 1 \leq R \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi/4, dV = R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta$ . Integralen blir således

$$\iiint_K dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 R^2 \sin \phi dR d\phi d\theta = 7/3 * \left( \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} \right) * 2\pi = 7/3 * \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2}).$$

Volymen av området som ligger i första oktanten är en fjärdedel av detta, vilket ger volymen  $7/3 * \sqrt{2} * (2 - \sqrt{2})/4$ .

**Lösning 5b:** Det lättaste angreppssättet borde vara att använda Gauss divergenssats, som säger att flödet ut ur  $V$  ges av  $\iiint_K \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ . Divergensen ges av  $\operatorname{div} \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 3(x^2 + y^2) = 3R^2 \sin^2 \phi$ . Med samma parametrering som ovan, får vi alltså att flödet ut ur området ges av

$$3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^2 R^4 \sin^3 \phi dR d\phi d\theta = 3 * 31/5 * \left[ -\cos \phi + \frac{\cos^3(\phi)}{3} \right]_0^{\pi/4} * 2\pi = 31 \frac{4\sqrt{2} - 5}{10\sqrt{2}}.$$

**Lösning 6:** Se boken

**Lösning 7:** Se boken

**Lösning 8a:** Eftersom  $\|\sin(x)\| \leq \|x\|$  får vi uppskattningen  $\|\frac{\sin(x)}{x}e^{-yx}\| \leq e^{-yx}$ , vilket innebär att relevanta uppskattningar är uppfyllda för att få derivera under integraltecknet.

**Lösning 8b:** För  $y > 0$  deriverar vi med avseende på  $y$ , och får

$$I'(y) = \frac{d}{dy} \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin(x)}{x} e^{-yx} dx = - \int_0^\infty \sin(x) e^{-yx} dx.$$

Denna integral går att räkna ut via partiell integrering, och vi får  $I'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$ . Således är  $I(y) = -\arctan y + C$  för en konstant  $C$ . Om vi tar  $y = \infty$ , eller godtyckligt stort, är  $I(y) = 0$ , eller godtyckligt litet. Eftersom  $\arctan(y)$  går mot  $\pi/2$  då  $y$  går mot oändligheten får vi att  $C = \pi/2$ . Eftersom  $I(y)$  är kontinuerlig för  $y \geq 0$  kan vi nu sätta  $y = 0$  och får  $I(y) = -\arctan(0) + \pi/2 = \pi/2$ .