

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2008-08-25, kl. 8.30-12.30 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Ragnar Freij, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

1. Låt $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sinh(x + y) + z, \sinh(x + y) + y + \cosh(y - z), x - \cosh(y - z))$.
Beräkna divergensen och rotationen av \mathbf{F} . I vilken riktning ökar divergensen mest i punkten $(1, 1, 1)$? Är \mathbf{F} konservativt i \mathbb{R}^3 . (7p)

2. Låt $f(x, y) = 2|xy|\cos(x^2 + y^2)$.
 - a) Beräkna volymen av kroppen $K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$. (6p)
 - b) Är f differentierbar i origo? (4p)

3. Låt D vara den parallelogram i planet som begränsas av linjerna $2y + x = 4$, $2y + x = 2$, $2y - x = 2$ och $2y - x = 1$.
Beräkna den totala massan av kroppen $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, xe^{-2xy} \leq z \leq 2ye^{-2xy}\}$ då dess densitet är $\rho(x, y, z) = ze^{x^2 + 4y^2}$. (7p)

4. Lös problemet $3yf'_x + 2xf'_y = 6yf$, $0 < x, 0 < y$. (7p)

5. Låt $\mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right)$ och $C : \begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t \end{cases}, 0 \xrightarrow{t} \pi$.
 - a) Beräkna det arbete som \mathbf{F} uträttar då en partikel förflyttas längs C . (7p)
 - b) Beräkna det största värde som fältstyrkan $|\mathbf{F}(x, y)|$ antar på $D : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x$. (7p)

6.
 - a) Definiera positivt definit kvadratisk form i \mathbb{R}^2 . (2p)
 - b) Visa att om $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är C^1 och konservativt i \mathbb{R}^3 och Φ en potential till \mathbf{F} i \mathbb{R}^3 så är $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(P_1) - \Phi(P_0)$ för alla C^1 -vägar C med samma startpunkt P_0 och samma ändpunkt P_1 . (5p)
 - c) Formulera och bevisa Gauss sats. (8p)

Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 08-08-25

uppg. 1

$$\mathbb{F}(x, y, z) = (\sinh(x+y) + z, \sinh(x+y) + y + \cosh(y-z), x - \cosh(y-z)).$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\mathbb{F}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(\sinh(x+y) + z) + \frac{\partial}{\partial y}(\sinh(x+y) + y + \cosh(y-z)) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(x - \cosh(y-z)) = 2\cosh(x+y) + 2\sinh(y-z) + 1. \end{aligned}$$

$\operatorname{div}\mathbb{F}$ växer i punkten $(1, 1, 1)$ snabbast i riktningen $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(1, 1, 1)$,
 $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(x, y, z) = 2(\sinh(x+y), \sinh(x+y) + \cosh(y-z), -\cosh(y-z))$,
 alltså $\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbb{F})(1, 1, 1) = 2(\sinh 2, \sinh 2 + 1, -1)$. $\operatorname{rot}\mathbb{F}(x, y, z) =$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sinh(x+y) + z & \sinh(x+y) + y + \cosh(y-z) & x - \cosh(y-z) \end{vmatrix} =$$

$= (0, 0, 0)$; eftersom \mathbb{F} är C^1 i \mathbb{R}^3 så är \mathbb{F} konservativt i \mathbb{R}^3 ;

det kan du även visa genom att ange en potential till \mathbb{F}

(t.ex. $xz + \frac{1}{2}y^2 + \cosh(x+y) + \sinh(y-z)$).

svar:

$\operatorname{div}\mathbb{F} = 2(\cosh(x+y) + \sinh(y-z)) + 1$, ökar i $(1, 1, 1)$ mest i riktningen $(\sinh 2, \sinh 2 + 1, -1)$; $\operatorname{rot}\mathbb{F} = (0, 0, 0)$, \mathbb{F} är konservativt i \mathbb{R}^3

uppg. 2

a) $f(x, y) = 2|xy| \cos(x^2 + y^2) \geq 0$ för $(x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq \frac{\pi}{2}$, kroppen
 $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ har alltså volymen $V(K) =$
 $= \iint_D 2|xy| \cos(x^2 + y^2) dx dy = [\text{pga symmetri}] = 4 \iint_{D_+} 2xy \cos(x^2 + y^2) dx dy$

där $D_+ = D \cap \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$, alltså med pol. koord.

$$\begin{aligned} V(K) &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} 2r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos r^2 r dr d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\varphi) d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} r^2 r \cos r^2 dr = [\text{part. int.}] = \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2} \cos(2\varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} r^2 \sin r^2 + \frac{1}{2} \cos r^2\right]_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \underline{\underline{\pi - 2}}. \end{aligned}$$

b) $\left. \begin{aligned} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} &= \frac{0-0}{x} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } x \rightarrow 0 \\ \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} &= \frac{0-0}{y} = 0 \rightarrow 0 \text{ då } y \rightarrow 0 \end{aligned} \right\} \implies f \text{ är partiellt}$

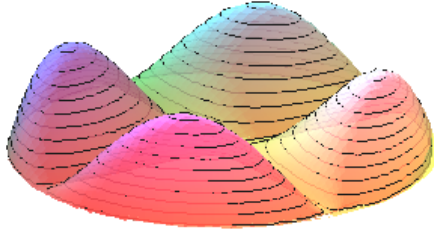
deriverbar i origo med $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ och för

$$\rho(x, y) = \frac{f(x, y) - (f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2|xy| \cos(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

gäller $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \rho(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \rho(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} r |\sin(2\varphi)| \cos r^2 = 0$
 (r, φ polära koordinater). Det visar att f är differentierbar i origo.
 Du kan även visa att f är C^1 i origo.

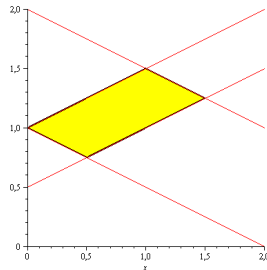
sva: a) $\pi-2$ b) ja

kroppen K :



uppg. 3

Området D ges av $2 \leq x + 2y \leq 4$, $1 \leq -x + 2y \leq 2$:



På D gäller $\rho(x,y,z) = ze^{x^2+4y^2} \geq 0$ ty $z \geq xe^{-2xy} \geq 0$, K 's massa är alltså

$$\begin{aligned} M(K) &= \iiint_K \rho(x,y,z) dx dy dz = \iint_D \left(\int_{xe^{-2xy}}^{2ye^{-2xy}} ze^{x^2+4y^2} dz \right) dx dy = \\ &= \iint_D e^{x^2+4y^2} \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_{z=xe^{-2xy}}^{z=2ye^{-2xy}} dx dy = \iint_D e^{x^2+4y^2} \frac{1}{2} (4y^2 - x^2) e^{-4xy} dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D e^{(2y-x)^2} (4y^2 - x^2) dx dy \text{ (observera att } x < 2y \text{ på } D). \end{aligned}$$

Vi inför variablerna $u = x+2y$, $v = -x+2y$, området blir då $D' : \begin{cases} 2 \leq u \leq 4 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{och } M(K) &= \frac{1}{2} \iint_{D'} e^{v^2} v u \left| \frac{d(x,y)}{d(u,v)} \right| du dv = \left[\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \frac{1}{\frac{d(u,v)}{d(x,y)}} \right] = \left| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{matrix} \right| = 4 = \\ &= \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} e^{v^2} \right]_1^2 \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_2^4 = \frac{12}{32} (e^4 - e). \end{aligned}$$

sva: $\frac{3(e^4 - e)}{8}$

uppg. 4

En karaktäristisk koordinat till (DE) $3yf'_x + 2xf'_y = 6yf$ fås genom att lösa differentialekvationen $y' = \frac{2x}{3y}$ ($x > 0, y > 0$). Den allmänna lösningen (till den

separabla ekvationen $3yy' = 2x$) är $\frac{3}{2}y^2 = x^2$, vi väljer alltså som nya koordinater (den karakteristiska) $u = 2x^2 - 3y^2$ och (t. ex.) $v = x$. Då blir

$$\begin{cases} f'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x = 4xf'_u + f'_v \\ f'_y = f'_u u'_y + f'_v v'_y = -6yf'_u + 0 \end{cases} \text{ och } (DE) \quad 3yf'_x + 2xf'_y = 3yf'_v = 6yf, \text{ dvs.} \\ (y \neq 0) \quad f'_v = 2f \text{ med lösningen } f(u, v) = g(u) e^{2v} \text{ (} g \text{ en godt. deriverbar fkt.)}, \\ \text{alltså } f(x, y) = g(2x^2 - 3y^2) e^{2x}.$$

svar: $f(x, y) = g(2x^2 - 3y^2) e^{2x}$

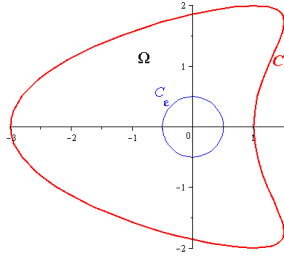
uppg. 5

$$\mathbb{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \left(\frac{y^3 - yx^2}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \right).$$

$$\text{a) } P'_y = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2 + y^2)^2 - (y^3 - yx^2)(x^2 + y^2)4y}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^3}$$

$$Q'_x = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2 + y^2)^2 - (x^3 - xy^2)(x^2 + y^2)4x}{(x^2 + y^2)^4} = \frac{6x^2y^2 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^3},$$

C är en sluten kurva, men origo ligger innanför C och \mathbb{F} är inte C^1 i origo; vi kan dock använda Green på området Ω mellan C och en cirkel C_ε innanför C , t.ex. $C_\varepsilon : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ (\mathbb{F} är C^1 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \supset \Omega$), se figur:



C genomlöps moturs från $(1, 0)$ till $(-3, 0)$ till $(1, 0)$;

om C_ε genomlöps medurs så ger Green ($C + C_\varepsilon = \partial\Omega$):

$$\int_{C+C_\varepsilon} \mathbb{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_{\Omega} (Q'_x - P'_y) dx dy = 0, \text{ det sökta arbete är alltså}$$

$$A = \int_C \mathbb{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{-C_\varepsilon} P dx + Q dy =$$

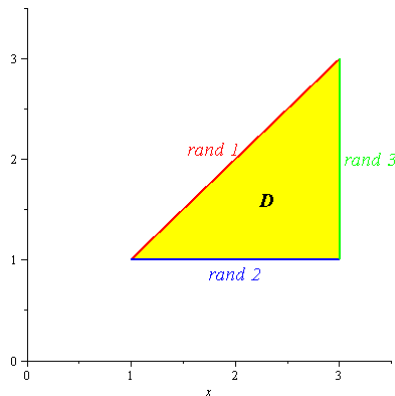
$$\left[-C_\varepsilon : \begin{cases} x = \frac{1}{4} \cos \varphi, & dx = -\frac{1}{4} \sin \varphi d\varphi \\ y = \frac{1}{4} \sin \varphi, & dy = \frac{1}{4} \cos \varphi d\varphi \end{cases}, 0 \xrightarrow{\varphi} 2\pi \right]$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{16^2} ((\sin^3 \varphi - \sin \varphi \cos^2 \varphi)(-\sin \varphi) + (\cos^3 \varphi - \cos \varphi \sin^2 \varphi) \cos \varphi)}{\frac{1}{16^2}} d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi = 0.$$

b) $f(x, y) = |\mathbb{F}(x, y)| = \sqrt{P^2(x, y) + Q^2(x, y)} = \sqrt{\frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^3}} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$
 ty $y \leq x$ för $(x, y) \in D : 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x$. f är C^1 i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \supset D$.



I. Inre punkter:

$$\begin{cases} f'_x = \frac{2x(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2-y^2)3x(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{2x(x^2+y^2) - (x^2-y^2)3x}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{x(5y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \\ f'_y = \frac{-2y(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} - (x^2-y^2)3y(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-2y(x^2+y^2) - (x^2-y^2)3y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{y(y^2-5x^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}} \end{cases}$$

alltså $\begin{cases} f'_x = 0 \iff -x^2 + 5y^2 = 0 \\ f'_y = 0 \iff 5x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$, enda lösningen är $x = y = 0$,
 men $(0, 0) \notin D$.

II. Randpunkter:

rand 1: $x = y$: där är $f(x, x) = 0$.

rand 2: $y = 1, 1 < x < 3$: $f(x, 1) = g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$, $g'(x) = f'_x(x, 1) =$
 $= \frac{-x(5-x^2)}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0 \iff x = \sqrt{5}$, ger en kandidat ($1 < \sqrt{5} < 3$).

rand 3: $x = 3, 1 < y < 3$: $f(3, y) = h(y) = \frac{9-y^2}{(9+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, $h'(y) = f'_y(3, y) =$
 $= \frac{y(y^2-45)}{(9+y^2)^{\frac{5}{2}}} = 0 \iff y = 3\sqrt{5}$ ger inget ($3\sqrt{5} > 3$).

f är kontinuerlig på D , D är kompakt, alltså antar f ett största värde (det minsta värdet är 0), detta måste finnas bland

$$f(\sqrt{5}, 1) = \frac{4}{6\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{9} \quad \text{och (hörnpunkt!) } f(3, 1) = \frac{8}{10\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{25};$$

$$\text{kvadrera så ser du } \left(\frac{\sqrt{6}}{9}\right)^2 = \frac{6}{81} = \frac{2}{27} = \frac{8}{107} > \left(\frac{2\sqrt{10}}{25}\right)^2 = \frac{8}{125},$$

dvs. det största värde som f antar är $\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Anm: Du kunde även bestämma maximum av $|\mathbb{F}(x, y)|^2 = \frac{(x^2 - y^2)^2}{(x^2 + y^2)^3}$.

svar: a) 0 b) $\frac{\sqrt{6}}{9}$