

Tentamensskrivning i flervariabelanalys F1 (MVE035) och reell matematisk analys F, delB (TMA975), 2006-08-30, kl. 14.00-18.00 i V

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa

Telefon: Jonatan Vasilis, tel. 0762-721860

OBS: Ange linje och inskrivningsår samt namn och personnummer på skrivningsomslaget.
Ange namn och personnummer på varje inlämnat blad du vill ha rättat.

=====

1. Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är C^1 . Visa att funktionen $h(x, y, z) = zf\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ satisfierar differentialekvationen $xh'_x + yh'_y + zh'_z = h$. (7p)

2. Låt $f(x, y) = (x - x^2)(y - y^2)$.

a) Bestäm alla stationära punkter till f och deras karaktär. (8p)

b) Vilka värden antar $f(x, y)$ på $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$? (3p)

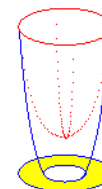
3. Beräkna arean av ytan $Y: \begin{cases} x = u^2 \\ y = 2uv, 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1; \\ z = 2v^2 \end{cases}$ (7p)

ange även en ekvation för tangentplanet till ytan Y i punkten $(1, 1, \frac{1}{2})$. (2p) (9p)

4. En vas definieras av olikheterna $0 \leq 3e^{x^2+y^2} - 4 \leq 2z \leq 2e^{x^2+y^2}$.

a) Hur mycket vatten ryms i vasen? (4p)

b) Beräkna vasens totala massa då dess densitet är $\rho(x, y, z) = 1$. (4p)



5. Låt $\mathbf{F} = (ye^{\cos x}, xe^{\sin z}, y(z+1)e^{\cos x} \sin x)$.

a) Har \mathbf{F} en potential i \mathbb{R}^3 ? (3p)

b) Har \mathbf{F} en vektorpotential i \mathbb{R}^3 ? (3p)

c) Beräkna flödet av \mathbf{F} uppåt genom ytan $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ i uppgift 2. (6p)

6. a) Formulera och bevisa Green's sats. (8p)

b) Låt \mathbf{F} vara ett virvelfritt C^1 -fält i \mathbb{R}^3 . Visa $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ är oberoende av vägen. (5p)

Betygsgränser:

24p – 35p ger betyget 3, 36p – 47p ger betyget 4, 48p eller mer ger betyget 5

BB

Tentamen i flervariabelanalys för F1 (mve035), 06-08-30

uppg. 1

Med $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$ och $w = z$ gäller för funktionen $h(x, y, z) = zf(\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$:
 $h'_x = z(f'_u u_x + f'_v v'_x) = f'_u$, $h'_y = z(f'_u u'_y + f'_v v'_y) = f'_v$, $h'_z = f + z(f'_u u'_z + f'_v v'_z) =$
 $= f - \frac{x}{z} f'_u - \frac{y}{z} f'_v$, alltså är $xh'_x + yh'_y + zh'_z = zf = h$. vsv

uppg. 2

$f(x) = (x - x^2)(y - y^2)$ är C^3 i \mathbb{R}^2 .

a) $\begin{cases} f'_x = (1 - 2x)(y - y^2) = (1 - 2x)y(1 - y) = 0 \\ f'_y = (x - x^2)(1 - 2y) = x(1 - x)(1 - 2y) = 0 \end{cases}$; $f'_x = 0$ ger tre fall:

1. $x = \frac{1}{2} \implies f'_y(\frac{1}{2}, y) = \frac{1}{4}(1 - 2y) = 0 \implies y = \frac{1}{2}$
2. $y = 0 \implies f'_y(x, 0) = x(1 - x) = 0 \implies x \in \{0, 1\}$
3. $y = 1 \implies f'_y(x, 1) = -x(1 - x) = 0 \implies x \in \{0, 1\}$,

f :s stationära punkter är således $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$.

För att bestämma deras karaktär beräknar vi f :s andra derivator:

| i punkterna \rightarrow | $(0, 0)$ | $(1, 0)$ | $(0, 1)$ | $(1, 1)$ | $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|------------------------------|
| $f''_{xx} = -2(y - y^2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |
| $f''_{xy} = (1 - 2x)(1 - 2y)$ | 1 | -1 | -1 | 1 | 0 |
| $f''_{yy} = -2(x - x^2)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}$ |

Den kvadratiske formen $Q(h, k) = f''_{xx}(a, b)h^2 + 2f''_{xy}(a, b)hk + f''_{yy}(a, b)k^2$ är då indefinit ($= \pm 2hk$) i punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$ och negativt definit ($= -\frac{1}{2}(h^2 + k^2)$) i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ vilket visar att punkterna $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ och $(1, 1)$ är sadelpunkter (detta inses även lätt direkt) och $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är en sträng lokal minimipunkt.

- b) f är kontinuerlig på D , D är kompakt och bågvis sammanhängande, alltså antar f på D ett minsta värde m och ett största värde M och alla värden mellan m och M . Dessa värden antas i inre (och då stationära punkter eller på randen; enda stationära punkten i D är $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ med $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, på randen är $f = 0$, svaret är alltså $[0, \frac{1}{16}]$.

svår:

| |
|--|
| <p>a) $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ (sadelpunkter), $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (str.lokal maximipkt.) b) $[0, \frac{1}{16}]$</p> |
|--|

uppg. 3

$\mathbf{r}(u, v) = (u^2, 2uv, 2v^2)$, $\mathbf{r}'_u = (2u, 2v, 0)$, $\mathbf{r}'_v = (0, 2u, 4v)$
 $\Rightarrow \mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = (8v^2, -8uv, 4u^2)$. Arealen av ytan $Y : \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$

$(0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1)$ är därmed $m(Y) = \iint_D |\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v| \, dudv =$

$$= \iint_D 4\sqrt{4v^4 + 4u^2v^2 + u^4} \, dudv = 4 \int_0^2 \int_0^1 (2v^2 + u^2) \, dvdu =$$

$$= 4 \int_0^2 \left[\frac{2}{3}v^3 + vu^2 \right]_{v=0}^{v=1} du = 4 \int_0^2 \left(\frac{2}{3} + u^2 \right) du = 4 \left[\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}u^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}(4 + 8) = \underline{16}.$$

En normalvektor till ytan Y i punkten $(1, 1, \frac{1}{2}) = \mathbf{r}(1, \frac{1}{2})$ är $\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v(1, \frac{1}{2}) = (2, -4, 4) = 2(1, -2, 2)$, tangentplanet till Y i punkten $(1, 1, \frac{1}{2})$ har alltså ekvationen $\underline{1(x-1) - 2(y-1) + 2(z-\frac{1}{2})}$.

svar: 16; $x - 2y + 2z = 0$

uppg. 4

Vasen är en rotationskropp (kurvorna $z_n = \frac{3}{2}e^{x^2} - 2$ resp. $z_{\text{ö}} = e^{x^2}$ roterar kring z -axeln), nivåkurvorna till kroppens randyta är cirklar $r^2 = x^2 + y^2$, $3e^{r^2} - 4 \geq 0$ ger $r \geq \sqrt{\ln \frac{4}{3}} =: a$, $3e^{r^2} - 4 \leq 2e^{r^2}$ ger $r \leq \sqrt{\ln 4} =: b$, $z_{\text{ö}}(\sqrt{\ln 4}) = 4$.

a) Vattenvolymen är alltså $\iint_{x^2+y^2 \leq b^2} (4 - e^{x^2+y^2}) \, dx dy =$ (med polära

$$\text{koordinater)} = \int_0^{2\pi} \int_0^b (4r - re^{r^2}) \, dr d\varphi = 2\pi \left[2r^2 - \frac{1}{2}e^{r^2} \right]_0^b =$$

$$= 2\pi \left(2 \ln 4 - \frac{4}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\pi(8 \ln 2 - 3)}.$$

b) Vasens massa är (med pol. koord.) $\int_0^{2\pi} \int_0^b e^{r^2} r \, dr d\varphi - \int_0^{2\pi} \int_a^b \left(\frac{3}{2}e^{r^2} - 2 \right) r \, dr d\varphi =$

$$= 2\pi \left(\left[\frac{1}{2}e^{r^2} \right]_0^{\sqrt{\ln 4}} - \left[\frac{3}{4}e^{r^2} - r^2 \right]_{\sqrt{\ln \frac{4}{3}}}^{\sqrt{\ln 4}} \right) = 2\pi \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} - 4 + 1 + \ln 4 - \ln \frac{4}{3} \right) =$$

$$= \underline{2\pi \left(-\frac{1}{2} + \ln 3 \right)}.$$

svar: a) $\pi(8 \ln 2 - 3)$; b) $\pi(2 \ln 3 - 1)$

uppg. 5

- a) Fältet $\mathbf{F} = (ye^{\cos x}, xe^{\sin z}, (z+1)ye^{\cos x} \sin x)$ är C^2 i \mathbb{R}^3 ,
 $\text{rot}\mathbf{F} = (\dots, \dots, e^{\sin z} - e^{\cos x}) \neq (0, 0, 0)$, alltså har \mathbf{F} ej en potential i \mathbb{R}^3
 ($\mathbf{F} = \text{grad}U \Rightarrow \text{rot}\mathbf{F} = \vec{0}$).
- b) $\text{div}\mathbf{F} = -ye^{\cos x} \sin x + 0 + ye^{\cos x} \sin x = 0$, alltså har \mathbf{F} en vektorpotential
 (\mathbb{R}^3 är konvex).

- c) Låt $K = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ med utåtriktat
 enhetsnormalfält \mathbf{N} ; då är $\partial K = Y \cup D$ och $\iint_{\partial K} \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS =$
 $= \iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS + \iint_D \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS = [\text{Gauss}] = \iiint_K \text{div}\mathbf{F} dx dy dz = 0$, alltså
 är $\iint_Y \mathbf{F} \bullet \mathbf{N} dS = \iint_D \mathbf{F} \bullet (0, 0, 1) dx dy = \iint_D ye^{\cos x} \sin x dx dy =$
 $= \int_0^1 \int_0^1 ye^{\cos x} \sin x dx dy = [\frac{1}{2}y^2]_0^1 [-e^{\cos x}]_0^1 = \frac{e - e^{\cos 1}}{2}$.

svar: a) nej; b) ja; c) $\frac{1}{2}(e - e^{\cos 1})$