Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 2024.juni
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
5 Timmar.
Hjälpmedel: BETA (highlights and sticky notes okay as long as no writing on them) & Chalmers godkänt miniräknare.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Julie 0317723419. OBS! Om ni är osäker på något fråga! (If you are unsure about anything whatsoever, please ask!)

1 Uppgifter

1. (Bevisa Samplingsatsen) Låt $f \in L^2(\mathbb{R})$. Antar att det finns $L > 0$ så att om $|x| > L$, $\hat{f}(x) = 0$. Visa att gäller:

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f\left(\frac{n\pi}{L}\right) \frac{\sin(n\pi - tL)}{n\pi - tL}.$$

Solution:. Please see the theory proofs document for the proof! Points: (note that you don't have to do everything in the same order listed below!)

(a) (2p) Idea to expand $\hat{f}(x)$ in a Fourier series on the interval $[-L, L]$.

(b) (2p) Correct calculation of the Fourier coefficients as

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{-in\pi x/L}\hat{f}(x)dx.$$

(c) (2p) Using the FIT to relate f and $\hat{f}$, that is

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ixt}\hat{f}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{ixt}\hat{f}(x)dx.$$

(d) (1p) Substituting the Fourier series into this expression, to get $f(t)$ is equal to an integral of the Fourier series of $\hat{f}$.

(e) (2p) Using the FIT to obtain:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{\mathbb{R}} e^{ix(-n\pi/L)}\hat{f}(x)dx = \frac{2\pi}{2L} f\left(\frac{-n\pi}{L}\right).$$

(f) (1p) Correctly computing the integral of the Fourier series of $\hat{f}$ to obtain the statement in the theorem for $f(t) = \ldots$

2. (Generating function for Bessel functions) Bevisa att $\forall x \in \mathbb{R}$ och $z \in \mathbb{C}$ med $z \neq 0$ Bessel funktionerna, J_n, uppfyller

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n = e^{\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)}.$$

(10 p)

Solution: Please see the theory proofs document for the proof! Points:

(a) (2p) Idea to Taylor expand the exponential function on the right side.

(b) (2p) Idea to expand *each* of the two functions,

$$e^{xz/2} = \sum_{j \geq 0} \frac{\left(\frac{xz}{2}\right)^j}{j!},$$

and

$$e^{-x/(2z)} = \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\frac{-x}{2z}\right)^k}{k!}$$

as their own Taylor series.

(c) (2p) One point each for getting these expansions right.

(d) (2p) Variable change to get a sum from $-\infty$ to ∞ rather than 0 to ∞. (1p for the idea and 1p for doing it right).

(e) (2p) Correct algebraic manipulations to make the series expansion for the Bessel functions to appear.

3. Lös problemet: (Solve the following problem):

$$\begin{aligned}
&v_t(r, \theta, t) = \Delta v(r, \theta, t), \quad 0 < r < 7,\ t > 0,\ -\pi < \theta < \pi, \\
&v(7, \theta, t) = 5, \\
&v(r, \theta, 0) = r(r - 7)\sin(2\theta) + 5.
\end{aligned}$$

(Note that certain integrals do not need to be calculated - they must be correctly stated with correct integrand and limits of integration - but need not be calculated).

Rättningsmall

(1p) Vi har ett inhomogent randvillkor, men det beror inte på t. Därför kan vi hitta en steady-state lösning. Vi sätter $u_t \equiv 0$ och får problemet (i polära koordinater):

$$
\begin{aligned}
0 &= \Delta S(r,\theta,t) = S_{rr} + r^{-1}S_r + r^{-2}S_{\theta\theta}, \\
& \quad 0 < r < 7,\ t > 0,\ -\pi < \theta < \pi, \\
S(7,\theta,t) &= 5
\end{aligned}
$$

Vi vet att konstanta funktioner har derivata 0 och är konstanta på randen – precis det vi behöver här. Därför väljer vi $S(r,\theta) = 5$. Nu kan vi skapa ett problem vi gillar bättre, genom att definiera $u(r,\theta,t) = v(r,\theta,t) - S(r,\theta)$:

$$
\begin{aligned}
& u_t(r,\theta,t) = \Delta u(r,\theta,t), \quad 0 < r < 7,\ t > 0,\ -\pi < \theta < \pi, \\
& u(7,\theta,t) = 0, \\
& u(r,\theta,0) = r(r-7)\sin(2\theta).
\end{aligned}
$$

(1p) Variabelseparera $u_t = \Delta u$ i polära koordinater (r,θ) och tidsvariabeln t.

$$\frac{T'}{T} = \frac{R'' + r^{-1}R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}$$

Låt $\lambda = T'/T$ och skriv

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda r^2$$

eller, ekvivalent,

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

(1p) Eftersom höger- och vänsterled beror på θ respektive r är detta också en separerad ekvation och både sidor måste vara konstant.

(1p) Vi argumenterar för att Θ ska vara 2π-periodisk. Det betyder att Θ'' = konstant gång Θ och $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ och $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$. Vi löser den här ekvation (se boken kapitel 1 exempel med Rings of Saturn).

(1p) Vi skriver ner vår slutsats:

$$\Theta_n(\theta) = e^{in\theta}, \quad \Theta_n'' = -n^2\Theta_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(3p) Vi går igenom fallen $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ och $\lambda < 0$. Om $\lambda > 0$ vi får den modifierade Besselekvationen. Lösningarna K går mot oändligheten när $r \to 0$, och I saknar nollställen för $r > 0$. Alltså kan inte $\lambda > 0$ ge några fysikaliska lösningar som samtidigt uppfyller randvillkoret vid $r = 7$. Säg att $\lambda = 0$ i stället. Då gäller att $r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0$, Eulers ekvation. Lösningarna är $ar^n + br^{-n}$ för konstanter a, b om $n > 0$, eller $R(r) = a + b\log(r)$ ifall $n = 0$. Alltså kan inte heller $\lambda = 0$ ge några fysikaliska lösningar som samtidigt uppfyller randvillkoret vid $r = 7$. Antag $\lambda < 0$. Låt $\lambda = -\nu^2$. Vi erhåller Besselekvationen $r^2 R''(r) + rR'(r) + (\nu^2 r^2 - n^2)R(r) = 0$, som har lösningarna J_n eller Y_n. Lösningarna Y_n går mot ∞ när $r \to 0$, så vi utesluter dem. Randvillkoret $u(7, \theta, t) = 0$ ger $R(7) = 0$ och alltså $J_n(7\nu) = 0$. Det betyder att det finns lösningar för alla λ sådana att

$$\lambda = -\left(\frac{\pi_{n,k}}{7}\right)^2,$$

där $\pi_{n,k}$ är nollställe nummer k till J_n. Så

$$R_{n,k}(r) = J_n(\pi_{n,k} r/7).$$

(1p) Vi löser för T funktionen:

$$T' = \lambda T, \quad \lambda = -\nu^2, \quad \nu = \frac{\pi_{n,k}}{7},$$

altså

$$T_{n,k}(t) = c_{n,k} e^{-\lambda_{n,k} t}, \quad \lambda_{n,k} = \frac{(\pi_{n,k})^2}{49}.$$

(1p) Superposition!

$$u(r, \theta, t) = \sum_{k>0, n\in\mathbb{Z}} T_{n,k}(t)\Theta_n(\theta)R_{n,k}(r)$$

För att uppfylla begynnelsevillkoret ska vi lösa

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{k>0, n\in\mathbb{Z}} T_{n,k}(0)\Theta_n(\theta)R_{n,k}(r) = r(r-7)\sin(2\theta).$$

Så vi har

$$T_{n,k}(0) = c_{n,k} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^7 r(r-7)\sin(2\theta)\overline{R_{n,k}(r)\Theta_n(\theta)}r\,dr\,d\theta}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^7 |R_{n,k}(r)\Theta_n(\theta)|^2 r\,dr\,d\theta}.$$

Till slut har vi:

$$v(r,\theta,0) = \sum_{k>0, n\in\mathbb{Z}} T_{n,k}(0)\Theta_n(\theta)R_{n,k}(r) + 5.$$

4. Sök en begränsad lösning till problemet (find a bounded solution to this problem)

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ &u(x,0) = e^{-x^2/2}. \end{aligned}$$

Rättningsmall

(3p) Det här är värmeledningsekvationen för $x \in \mathbb{R}$ med begynnelsevillkor $u(x,0) = f(x)$ där $f \in L^2(\mathbb{R})$. Det osar Fouriertransform! Vi transformerar ekvationen:

$$\hat{u}_t = -\xi^2 \hat{u},$$

där

$$\hat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x,t)\,dx.$$

(1p Fouriertransform, 1p x variabel, 1p får rätt Fouriertransform av u_{xx}.)

(2p) Löser vi denna nya ekvation får vi, med någon godtycklig funktion av ξ, som vi kallar a,

$$\hat{u}(\xi,t) = a(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

(1p) Begynnelsevillkoret kan Fouriertransformeras eftersom

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

Altså

$$a(\xi) = \hat{f}(\xi) \implies \hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t}.$$

(4p) Om man bara skriver

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{-\xi^2 t}e^{ix\xi}d\xi$$

får man 2p. Om man hitta funktionen som har Fouriertransform $e^{-\xi^2 t}$ och skriva som en faltning

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-(x-y)^2/2} e^{-y^2/(4t)} (4\pi t)^{-1/2} dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} e^{-(x-y)^2/(4t)} (4\pi t)^{-1/2} dy$$

får man 4p.

(0p) I det här fallet kan man räkna ut $u(x,t)$ exakt. Antingen genom att kvadratkompletera, eller så räknar man ut det via Fouriertransformen. Svaret blir att $u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{2t+1}} e^{-x^2/(2(2t+1))}$.

En kul observation är att lösningen till ekvationen när initialvillkoret är täthetsfunktionen för en normalfördelning är att lösningen också är täthetsfunktionen för en normalfördelning. Det är inte en slump, utan är en antydan om att det finns djupa kopplingar mellan partiella differentialekvationer och sannolikhetsteori.

5. Expand, by hand, the function f given as

$$f = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

as a trigonometric Fourier series and use it to compute the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$$

Solution:

A trigonometric Fourier series can be written either with respect to the basis $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ or $1 \cup \{\sin(nx)\}_{n\geq 1} \cup \{\cos(nx)\}_{n\geq 1}$. Here, we choose to use the latter basis consisting of sine and cosine functions.

$\rightarrow$ We compute the coefficients according to the definition of a Fourier expansion with the given basis:

$\rightarrow$ (1p) a_0, the coefficient of the basis function 1.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} 1\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}$$

$\rightarrow$ (1p) a_n, the coefficients of the basis functions $\sin(nx)$.

$$a_n = \frac{\langle f(x), \sin(nx) \rangle}{\|\sin(nx)\|^2}$$

The numerator evaluates to

$$\begin{aligned}\langle f(x), \sin(nx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{x=-1}^{1} = -\frac{1}{n}(\cos(n) - \cos(-n)) = 0.\end{aligned}$$

All we need to know about the denominator is then that it is not equal to zero. The norm of a basis function can never be zero, so we're in the clear here, and we can say without further computation that $a_n = 0\ \forall n \geq 1$.

→ (3p) b_n, the coefficients of the basis functions $\cos(nx)$.

$$b_n = \frac{\langle f(x), \cos(nx)\rangle}{\|\cos(nx)\|^2}$$

Here, we will see that the numerator does not become 0, so we need to evaluate both numerator and denominator:

$$\begin{aligned}\langle f(x), \cos(nx)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_{x=-1}^{1} = \frac{1}{n}(\sin(n) - \sin(-n)) = \frac{2}{n}\sin(n) \\ \|\cos(nx)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{\cos(2nx)}{2}\,\mathrm{d}x = \pi + \left[\frac{\sin(2nx)}{4n}\right]_{x=-\pi}^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

To compute the integral in the denominator, we used the double-angle formula

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Taking both together, we get

$$b_n = \frac{2\sin(n)}{n\pi}$$

→ (1p) So, our full series becomes:

$$\frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin(n)\cos(nx)$$

→ (3p) Now we take Parseval's equality to see that

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin(n)\cos(nx) \right\|^2 &= \left\| \frac{1}{\pi} \right\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{2}{n\pi} \sin(n)\cos(nx) \right\|^2 \\ &= \|f(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}x = 2\end{aligned}$$

→ (1p) Since we already know that $\|\cos(nx)\|^2 = \pi$, this simplifies to almost exactly the sum we want to compute:

$$\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot 2\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi}\sin(n)\right)^2 \pi = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = 2$$

So, in the end,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \left(2 - \frac{2}{\pi}\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$$

6. Solve the following initial boundary value problem for the heat equation:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x^2, \quad 0 \le x \le l, t > 0 \\ u(0,t) &= 0 \\ u_x(l,t) &= 1 \\ u(x,0) &= f(x). \end{aligned}$$

Solution

→ We are dealing with an inhomogeneous problem here. The inhomogeneities are independent of time, so we can use the method of steady states.

→ (2p) First, we find a steady-state solution, i.e., we set the time derivative u_t to 0. We obtain the problem:

$$\begin{aligned} -s''(x) &= x^2, \quad 0 \le x \le l \\ s(0) &= 0 \\ s'(l) &= 1. \end{aligned}$$

We can find $s(x)$ by integrating twice:

$$\begin{aligned} s''(x) &= -x^2 \\ s'(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + c \\ s(x) &= -\frac{1}{12}x^4 + cx + d \end{aligned}$$

Plugging in the boundary conditions, we get:

$$\begin{aligned} s(0) = 0 &\Rightarrow d = 0 \\ s'(l) = -\frac{1}{3}l^3 + c = 1 &\Rightarrow c = 1 + \frac{l^3}{3} \end{aligned}$$

Thus, our steady state is

$$s(x) = -\frac{x^4}{12} + \left(1 + \frac{l^3}{3}\right) x$$

→ (1p) Defining $v(x,t) = u(x,t) - s(x)$, we obtain the homogeneous problem

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= 0, \quad 0 \le x \le l, t > 0 \\ v_x(0,t) &= 0 \\ v(l,t) &= 0 \\ v(x,0) &= \tilde{f}(x) = f(x) - s(x). \end{aligned}$$

→ (1p) We solve this using our favorite method ♡. We start by separating our variables: $v(x,t) = X(x)T(t)$, and obtain:

$$T'X - TX'' = 0$$

and

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda$$

→ (2p) *The boundary conditions will help us see what the value of λ needs to be!*

$$X'' = \lambda X$$

By Theorem 1.0.1, this gives us

$$X(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

With the boundary conditions, we obtain

$$X'(0) = 0 \Rightarrow A\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}0} - B\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}0} \Rightarrow A = B$$

$$X(l) = 0 \Rightarrow A(e^{\sqrt{\lambda}l} + e^{-\sqrt{\lambda}l}) = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ (the boring case) } \vee e^{2\sqrt{\lambda}l} = -1$$

The non-boring case is equivalent to:

$$2\sqrt{\lambda}l = (2n-1)\pi i \iff \sqrt{\lambda} = \frac{(2n-1)\pi i}{2l}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

This leaves us with (up to constants):

$$X_n(x) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{(2n-1)\pi i}{2l}x} + e^{-\frac{(2n-1)\pi i}{2l}x}\right) = \cosh\left(\frac{(2n-1)\pi i}{2l}x\right) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)$$

and the eigenvalues

$$\lambda_n = \left(\frac{(2n-1)\pi i}{2l}\right)^2 = -\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}$$

$\rightarrow$ (1p) We can now solve for T:

$$T' = \lambda T \Rightarrow T(t) = ce^{\lambda t}$$

Thus,

$$T_n(t) = c_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}t}$$

$\rightarrow$ We can now do a superposition:

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}t} \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)$$

where we took all terms for $2n-1 < 0$ together with the corresponding term $-(2n-1)$, since all functions are even in $(2n-1)$.

→ (2p) *The initial condition will help us find, coefficients that depend on time*

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n \cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \stackrel{!}{=} \tilde{f}(x)$$

This can be solved by a Fourier expansion:

$$c_n = \frac{\int_0^l \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\,\mathrm{d}x}{\int_0^l \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\,\mathrm{d}x} = \frac{l}{2}\int_0^l \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\,\mathrm{d}x$$

By a double-angle formula,

$$\int_0^l \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{2(2n-1)\pi}{2l}x\right)}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

→ (1p) Now, we just take it all together, and note that $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) = &\sum_{n\geq 1} \frac{l}{2}\int_0^l \tilde{f}(x)\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right)\,\mathrm{d}x \cdot e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}t}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\right) \\ &- \frac{x^4}{12} + \left(1 + \frac{l^3}{3}\right)x \end{aligned}$$

7. Lös följande integral-ekvation:

$$\begin{aligned} &u(x,t) - \int_0^t (t-s)u_{xx}(x,s)ds = 2, \quad x,t > 0 \\ &u(x,0) = 0, \quad u(0,t) = \sin(t). \end{aligned}$$

Vi löser detta genom att tillämpa Laplacetransformen i variabeln t. Integralen är en konvolutionsintegral. Laplacetransformen av en konvolution är produkten av de transformerade funktionerna, så Laplacetransformen av integralen är Laplacetransformen av $u_{xx}(x,t)$ multiplicerat med Laplacetransformen av t, vilket är $1/z^2$. Laplacetransformen av integralen är Laplacetransformen av $u_{xx}(x,t)$ dividerat med transformvariabeln z. Vi får, med $U(x,z)$ som betecknar Laplacetransformen av u med avseende på t:

$$U(x,z) - U_{xx}(x,t)/z^2 = 2/z$$

vilket vi kan skriva som

$$z^2 U(x,z) - U_{xx}(x,t) = 2z$$

Detta är en inhomogen linjär ordinär differentialekvation i x. Lös den med din favoritmetod för att få att

$$U(x,z) = A(z)e^{zx} + B(z)e^{-zx} + \frac{2}{z}.$$

Vi bestämmer nu $A(z)$ och $B(z)$. För det första vet vi att $U(x,z)$ är en Laplacetransform av någon funktion, så vi kan sätta $A(z) = 0$ eftersom e^{zx} växer för snabbt för att vara en Laplacetransform. Vidare sätter vi $x = 0$ för att få att $U(0,z) = B(z) + 2/z$, men eftersom, enligt randvillkoret, är $U(0,z)$ Laplacetransformen av $\sin(t)$, har vi att $B(z) = \frac{1}{z^2+1} - \frac{2}{z}$. Sålunda,

$$U(x,z) = \frac{1}{z^2+1}e^{-zx} - \frac{2}{z}e^{-zx} + \frac{2}{z}.$$

Vi måste nu den inversa Laplacetransformen av $U(x,z)$. Vi har att den inversa Laplacetransformen av den första termen är $\sin(t-x)H(t-x)$, den inversa Laplacetransformen av den andra termen är $-2H(t-x)$, och dne inversa Laplacetransformen av den tredje termen är $2H(t)$, där $H(t)$ är Heavisides stegfunktion. Således är lösningen på problemet

$$u(x,t) = \sin(t-x)H(t-x) - 2H(t-x) + 2H(t).$$

(a) (2p) Att välja att använda Laplacetransformationsmetoder.

(b) (2p) Korrekt Laplacetransformera ekvationen.

(c) (2p) Lösa ODE:n för Laplacetransformen av lösningen korrekt för att få den allmänna lösningen.

(d) (2p) Korrekt förkasta den icke-Laplacetransformationsbara delen av lösningen till ODE:n och använda BC för att bestämma Laplacetransformen av lösningen till PDEn. (I stort sett gå från den allmänna lösningen av ODE till lösningen för vårt fall korrekt här).

(e) (2p) Korrekt invertera Laplacetransformen för att få lösningen (gå tillbaka korrekt).

8. Determine the *maximum* value of

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$$

among all continuous bounded real-valued functions in $[-1,1]$ that satisfy

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = 1.$$

(Hint: when is the Cauchy–Schwartz inequality in $L^2(-1,1)$ that says $|\langle f, g\rangle| \leq ||f||||g||$ an equality)?

Solution.

By the Cauchy–Schwartz inequality, we have that

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x) dx \leq \|f\|\|x^2\|$$

with equality exactly when $f = \lambda x^2$. I.e., the maximum value of $\int_{-1}^{1} x^2 f(x) dx$ is obtained by finding the maximum possible value of λ. Due to the constraint that

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx = 1.$$

we have that

$$\lambda^2 \int_{-1}^{1} x^4 dx = 1.$$

Since $\int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$, it holds that $\lambda = \sqrt{\frac{5}{2}}$. Therefore, we have that

$$\int_{-1}^{1} x^2 f(x) dx = \sqrt{\frac{5}{2}} \int_{-1}^{1} x^4 dx = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{2}{5} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Note that it is also possible to solve this exercise by expanding in Legendre polynomials and reasoning about what the value of the constants must be, by using the orthogonality of the Legendre polynomials.

(2p) Bound the functional using the Cauchy–Schwartz inequality.

(3p) Realize that to have equality, then f has to be a scalar multiple of x^2.

(2p) Correctly compute the function $f(x)$

(3p) Compute (and clearly state!) the maximum value of the functional.

So now you can check for yourself to verify that these rules of grading were precisely followed on each exercise. It is rare, but possible, that a mistake could occur, so if you find anything which is inconsistent with this point scheme, please let us know and we shall correct it! ♡