i Försättsblad_August2022

Chalmers MVE030 & MVE290
Den 23:e augusti 2022

MVE030/MVE290 - Fourieranalys och Fourier Metoder
Ägare: TKTFY/TKKEF – Teknisk fysik/Kemiteknik med fysik
Institution: 11 – MATEMATISKA VETENSKAPER
Examinator: Julie Rowlett
Tentarond: Carl-Joar Karlsson
Telefon: 031 772 53 64
Mobil: 070-130-98-59
E-post: julie.rowlett@chalmers.se

Tentamen innehåller 40 frågor, 2 poäng per fråga. Bonuspoäng från duggorna läggs till (upp till 5 poäng). (Det finns 41 men #1 är för att lägga till bonuspoäng - bara skriv din anonymkod där snälla!)

För betyg 3 krävs minst 40 poäng.

För betyg 4 krävs minst 53 poäng.

För betyg 5 krävs minst 67 poäng.

Tillåtna hjälpmedel är:

1. Kursbok både i inspera som resurs (pdf) samt uttryckt (papper) version av kursboken. I kursboken tillåts anteckningar, highlights, sticky-notes/post-its, osv.

2. BETA handbook. Anteckningar, highlights, sticky-notes/post-its, osv tillåts.

3. Miniräknare (vilken som helst).

Lycka till! ^_^ You got this! May the mathematical forces be with you!

1 Bonus poäng

Hej! Skriv din anonymkod här så kommer vi att lägga till dina bonuspoäng!

Skriv in din anonymkod här ^_^

Teckenf...

Ord: 0

Totalpoäng: 5

2 Favorite topic?

What was your favorite topic from this course? // Vilket var ditt favoritämne från den här kursen?

Skriv in ditt svar här

Teckenf...

Ord: 0

Totalpoäng: 2

3 Least favorite/hardest part

What was your least favorite part of this course and/or what did you find most challenging? //
Vilken var din minst favoritdel av den här kursen och/eller vad tyckte du var jobbigast?

Skriv in ditt svar här

Teckenf...

Ord: 0

Totalpoäng: 2

4 Problem_Typ1_2022_08

Betrakta problemet:
$f''(x) + \lambda \sinh(x) f(x) = 0, \quad x \in (-4, 4), \quad f'(-4) = 0, \quad f'(4) = 0.$
Problemet är att hitta alla funktioner f(x) samt $\lambda \in \mathbb{C}$ så att f uppfyller ekvationen. Vad kan ni säga om problemet?

Välj ett alternativ

- Det är en homogen partiell differential ekvation.
- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av vikt funktionen.
- Det är en inhomogen partiell differential ekvation.
- Det är ett regulärt Sturm-Liouville Problem och alla λ är reella och går mot $+\infty$.
- Det är ett regulärt Sturm-Liouville Problem och alla är reella och går mot $-\infty$.
- Det är en Bessel ekvation.
- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av randvillkorerna.

Totalpoäng: 2

5 Wave_1_2022_08

Vi ska lösa problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 4, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin^2(x), \\ u_t(x,0) = \sin^2(x). \end{cases}$$

Vad ska vi göra först?

Välj ett alternativ:

- Använd Fourier transform i x.
- Hitta en steady-state lösning.
- Variabel separation.
- Använd Laplace transform i x.
- Använd Laplace transform i t.
- Lös ett Sturm-Liouville problem.
- Utveckla en serie av Bessel funktioner.
- Använd Laplace transform i x.

Totalpoäng: 2

6 Wave_2_2022_08

Vi ska lösa problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 4, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin^2(x), \\ u_t(x,0) = \sin^2(x). \end{cases}$$

Lösningen blir:

Välj ett alternativ:

- En serie med sinus i t variabel och cosinus i x variabel.
- En serie med sinus i x variabel och både sinus och cosinus i t variabel.
- En serie med sinus i x variabel och cosinus i t variabel.
- En serie med sinus i x variabel och cosh i t variabel.
- En serie med sinus i x variabel och sinh i t variabel.
- En faltning (convolution).
- En invers-Laplace-transform.
- En integral på intervallet [0, 4].
- En serie med cosinus i både x och t variabel.
- En serie med cosinus i x variabel och cosh i t variabel.

Totalpoäng: 2

7
Wave_3_2022_08

En av följande värde, λ, (avrundat) blir en del av lösning till föregående uppgiften, som kommer från ett problem i form:
$f''(x) + \lambda f(x) = 0.$
Vilken λ, (avrundat) ingår i lösningen?
Välj ett alternativ:

- 0,85
- 0,15
- 0,35
- 0,25
- 0,45
- 0,65
- 0,75
- 0,95
- 0,55

Totalpoäng: 2

8 Finns_1_2022_08

Finns det en begränsad funktion f(x) som uppfyller:

$\int_0^4 |f(x)|^2 dx > 0$ och $\int_0^4 f(x) e^{-(2n+1)i\pi x/8} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$?

Välj ett alternativ:

- Ja.
- Det är för lite information för att kunna bestämma.
- Nej.

Totalpoäng: 2

9 Problem_Typ_2022_08

Vilket typ av problem är: $\begin{cases} f''(x) + \lambda \sinh(x) f(x) = 0, \quad 1 < x < 2, \\ f(1) + 2f(2) = 0, \\ f'(1) + 2f'(2) = 0. \end{cases}$

Välj ett alternativ:

- Det är ett reguljärt Sturm Liouville Problem.
- Det är en homogen partiell differential ekvation.
- Det är en Bessel ekvation.
- Det är en inhomogen partiell differential ekvation.
- Det är ett SLP typ problem men inte reguljärt på grund av randvillkorerna.
- Det är ett SLP typ problem men inte reguljärt på grund av vikt funktionen.
- Det är d'Alemberts ekvation.

Totalpoäng: 2

10 Finns_2_2022_08

Finns det en begränsad funktion i $[0,1]$ som uppfyller:
$\int_0^1 |f(x)|^2 dx > 0, \text{ och } \int_0^1 f(x) P_{2n}(x) dx = 0$
för alla $n \geq 0$? (heltal n), med P_{2n} den Legendre polynom grad 2n.
Välj ett alternativ:

- Det är inte möjligt att bestämma med den här informationen.
- Ja.
- Nej.

Totalpoäng: 2

11 Serie_1_2022_08

Låt $a_n = \int_0^\pi \sin(x)\cos(nx) dx$. Vad kan vi säga om serien
$|a_0|^2 + \sum_{n \geq 1} 2|a_n|^2$?
Välj ett alternativ:

- Serien konvergerar mot π.
- Serien konvergerar då den är 0.
- Serien konvergerar mot π^2.
- Det konvergerar inte.
- Serien konvergerar mot $\frac{\pi^2}{2}$.
- Serien konvergerar mot $\frac{\pi}{2}$.

Totalpoäng: 2

12 Heat_1_2022_08

Vi skulle vilja lösa problemet $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < x < 1, 0 < t, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 2t, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$

Vilken teknik kan används för att lösa problemet?

Välj ett alternativ:

- Bessel funktioner.
- Laplace transform i x.
- Fourier transform i t.
- Fourier transform i x.
- Ortogonal polynom.
- Laplace transform i t.
- Ett reguljärt Sturm-Liouville problem.

Totalpoäng: 2

13 Heat_2_2022_08

Lös problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 2t, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Lösningen innehåll:

Välj ett alternativ:

- En integral från 0 till oändligt
- Exponentialla funktioner i t, sinus och cosinus i x
- En faltning (convolution)
- En polynom i x, exponentiella funktioner i t, sinus och en funktion i form T(t)X(x).
- Gaussian funktionen $\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$
- En invers-Laplace transform

Totalpoäng: 2

14 Heat_3_2022_08

Lös problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 2t, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Betrakta: $\lim_{t \to \infty} \frac{2u(1/2,t)}{t}$

Välj ett alternativ:

- Det går mot oändligt.
- = -1.
- = 0.
- = - 0.5.
- Gränsvärdet finns inte då u(x,t) oscillerar när t går mot oändligt.
- = -3.
- = 3.
- = 1.
- = 0.5.

Totalpoäng: 2

15 Heat_4_2022_08

Lös problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-(t+1)x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t, \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Lösningen innehåll:

Välj ett alternativ:

- Gaussian funktionen $\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$.
- En invers-Laplace transform.
- Exponentialla funktioner i t, sinus och cosinus i x.
- Bessel funktioner.
- Lösningar till ett regulärt SLP.
- En serie med exponentialla funktioner, sinh, och cosh.

Totalpoäng: 2

16 Calculate_Series_1_2022_08

Låt $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx.$. Beräkna $\sum_{n\geq 0} a_n \cos(-n\pi/4)$ och avrunda till den närmast heltal: ______ .

Totalpoäng: 2

17 Calculate_series_2_2022_08

Låt $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)e^{-inx}dx$. Beräkna $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ och avrunda till den närmast heltal: ______ .

Totalpoäng: 2

18 Calculate_Series_3_2022_08

Låt $c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-inx} dx$. Beräkna $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi}$ och avrunda till den närmast heltal: ____ .

Totalpoäng: 2

19 Problem_Typ_2022_08

Betrakta problemet:

$$(\cosh(x)X'(x))' + \lambda \log(x)X(x) = 0, \quad 1 < x < 2, \quad X(1) = 0, \quad X(2) = 0.$$

Problemet är att hitta alla funktioner X(x) och $\lambda \in \mathbb{C}$ som uppfyller ekvationen.

Välj ett alternativ:

- Det är ett regulärt SLP.
- Det är en Bessel ekvation.
- Det är en homogen partiell differential ekvation.
- Det är en inhomogen partiell differential ekvation.
- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av randvillkorerna.
- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av vikt funktionen.

Totalpoäng: 2

20 LagaMat_1_2022_08

Det är dags att laga mat och idag blir det lasagna. Vi ska lösa det här problemet som beskriver temperaturen i vår ungsform som vi har tagit ur kylskåpet och satt i ungnen:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < t, \quad 0 < x < 4, \\ u(0,t) = 200 = u(4,t), \\ u(x,0) = 4. \end{cases}$$

Det funkar bra att börja med att:

Välj ett alternativ:

- Använda Fouriertransform i t.
- Använda Laplacetransform i t.
- Lös problemet: $-kX''(x) = 0, \quad X(0) = X(4) = 200.$
- Använda Fouriertransform i x.
- Lösa det regulärt Sturm-Liouville-Problemet:
  $f''(x) + \lambda f(x) = 0,$
  $0 < x < 4,$
  f(0) = f(4) = 200.
- Använda Laplacetransform i x.

Totalpoäng: 2

21 LagaMat_2_2022_08

Lasagnan är klart när temperaturen i mitten blir 100, dvs när u(2, t) = 100. Min erfarenhet ger att lasagnan blir klart efter 45 minuter. I ekvationen är tid t i timmar, altså när t=0.75 är lasagnan klart. I så fall, konstanten k = ???

Anta att du kan approximera lösningen med konstanttermen och följande termen och använd gärna: $\frac{\int_0^4 -196\sin(\pi x/4)dx}{\int_0^8 |\sin(\pi x/4)|^2 dx} = -\frac{784}{\pi}$.

Avrund svaret till den närmast heltal. (OBS! If you actually make lasagna, you need to let it set up, that is to say cool for about 15 minutes before you cut into it and eat it!!)

: ☐ .

Totalpoäng: 2

22 PDE_22_2022_08

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad t, x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = e^{-2x^2}. \end{cases}$$

Vilken teknik går bra att använda?

Välj ett alternativ:

- Jämn utvidning (extension) och Fourier transform i t.
- Laplace transform i x.
- Udda utvidning (extension) och Fourier transform i t.
- Jämn utvidning (extension) och Fourier transform i x.
- En serie med Bessel funktioner.
- Udda utvidning (extension) och Fourier transform i x.
- En faltning med Gauss funktionen $\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$.
- En Fourier serie.
- Laplace transform i t.
- Ett regulärt Sturm Liouville Problem.

Totalpoäng: 2

23 PDE_23_2022_08

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad t, x > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Vilken teknik går bra att använda?

Välj ett alternativ:

- En steady-state lösning.
- En Fourier serie.
- En Bessel serie
- Jämn utvidgning (extension) och Fourier transform i x.
- Jämn utvidgning (extension) och Fourier transform i t.
- Udda utvidgning (extension) och Fourier transform i t.
- En faltning med Gauss funktionen $\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}$.
- Laplace transform i t.
- Udda utvidgning (extension) och Fourier transform i x.
- Ett regulärt Sturm Liouville Problem.

Totalpoäng: 2

24 Bessel_Serie_1_2022_08

Låt $J_n$vara den Bessel funktion av ordning n. Beräkna och avrunda svaret till den närmast heltal $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(4)2^n$ =

________ här.

Totalpoäng: 2

25 Bessel_Grans_2022_08

Betrakta:
$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-x} J_n(x) x^n$.
Välj ett alternativ:

- Det konvergerar och gränsvärdet är 0.
- Det konvergerar och gränsvärdet är 1.
- Det konvergerar inte för att det oscillerar när x går mot oändligt.
- Det konvergerar inte för att det blir obegränsat när x går mot oändligt.

Totalpoäng: 2

26 Hermite_Serie_2022_08

Låt $H_n$vara den Hermite polynomial av grad n. Beräkna och avrunda till den närmast heltal
$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(2)2^n}{n!}$.
: ☐ .

Totalpoäng: 2

27 Calculate_Integral_2022_08

Beräkna och avrunda till det närmast heltal
$\int_0^\infty 2e^{-x^2} \cos(x) dx$.

: ☐ .

Totalpoäng: 2

28 Calculate_Series_28_2022_08

Låt $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^x e^{-inx} dx.$
Beräkna $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(-1)^n.$
Avrunda till det närmaste heltalet.

: ☐ .

Totalpoäng: 2

29 Drums_a_2022_08

Vi ska spela trumman!
Funktionen $u(r,\theta,t)$ ge höjden på trumman i tidspunkt t på punkten (r,θ) på trumman och uppfyller:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - r^{-1}u_r - r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 12, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < t, \\ u(12,\theta,t) = 0, \\ u(r,\theta,0) = r - 12, \\ u_t(r,\theta,0) = 0. \end{cases}$$

Lös problemet. Lösningen blir:
Välj ett alternativ:

- ○ En invers Fourier transform.
- ○ En serie med Bessel funktionen J_0 och cosinus.
- ○ En invers Laplace transform.
- ○ En serie med trigonometriska funktioner och exponentiella funktioner.
- ○ En serie med Bessel funktionerna J_n för heltal n=0, 1, 2, ..., och sinus.
- ○ En faltning.
- ○ En serie med Bessel funktionen J_0 och sinus.
- ○ En serie med Bessel funktionerna J_n för heltal n=0, 1, 2, ..., cosinus och sinus.
- ○ En serie med Bessel funktionerna J_n för heltal n=0, 1, 2, ..., och cosinus.
- ○ En serie med Bessel funktionen J_0, sinus och cosinus.

Totalpoäng: 2

30 Musik_b_2022_08

Ni har redan löst problemet i föregående uppgiften. Vad är höjden i mitten (dvs r=0) när t=12? Om ni har fått en serie som svaret får ni använda första termen. Ni får gärna använda några formel:

Låt π_k vara den k-te positiv nollställe av J_0.
$\pi_1 \approx 2,4, \quad \int_0^{12}(r-12)J_0(\pi_1 r/12)rdr \approx -183, \quad \int_0^{12} J_0(\pi_1 r/12)^2 rdr \approx 19,$
och $J_0(0)=1.$
Avrunda svaret till det närmaste heltalet:

[ ] .

Totalpoäng: 2

31 Polynom_Approximering_a_2022_8

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 10 som minimerar
$\int_2^4 |f(x)-p(x)|^2 dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Beräkna integralerna $\int_2^4 f(x-3)P_n(x)dx$, för P_n det Legendre polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_2^4 f(x)P_n(x)dx$, för P_n det Legendre polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_2^4 f(x)P_n(x-3)dx$ för P_n det Legendre polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_2^4 f(x-3)P_n(x-3)dx$, för P_n det Legendre polynomet grad n.

Totalpoäng: 2

32 Polynom_Approx_2022_08

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 10 som minimerar
$\int_0^\infty |e^{-x} - p(x)|^2 e^{-x} dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Beräkna integralerna $\int_0^\infty e^{-2x} L_n(x) dx$ med L_n det Laguerre polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_0^\infty e^{-x} L_n(2x) dx$ med $L_n(x)$ det Laguerre polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) dx$ med $L_n(x)$ det Laguerre polynomet grad n.

Totalpoäng: 2

33 Polynom_Approx_3_2022_08

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 8 som minimerar
$\int_{-\infty}^\infty |f(x) - p(x)|^2 e^{-4x^2} dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^\infty f(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$ med H_n det Hermite polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^\infty f(2x) H_n(2x) e^{-4x^2} dx$ med H_n det Hermite polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^\infty f(2x) H_n(x) e^{-4x^2} dx$ med H_n det Hermite polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^\infty f(x) H_n(2x) e^{-4x^2} dx$ med H_n det Hermite polynomet grad n.
- Beräkna integralerna $\int_{-\infty}^\infty f(x) H_n(2x) e^{-x^2} dx$ med H_n det Hermite polynomet grad n.

Totalpoäng: 2

34 Fouriertransform_2022_08

Antar att ni kan hitta Fouriertransformen av funktionen f på en tabell: $\hat{f}(\xi) = g(\xi)$. Använd g för att beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} -ie^{-ix} f'(x)dx$.

Totalpoäng: 2

35 PDE_35_2022_08

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t, x, \\ u(0,t) = t^2 e^{2t}, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Det funkar bra om vi börjar med att

Välj alternativ (använda Fourier transform i x, använda Fourier transform i t, separera variablerna, lösa ett regulärt SLP, använda Laplace transform i t, använda Laplace transform i x). När vi lösa problemet, svaret kommer att bli

Välj alternativ (en integral från 0 till t, en serie med cosh och sinh, en trigonometrisk Fourier serie, en Fourier-Bessel serie, en integral från minus oändligt till plus oändligt)

Totalpoäng: 2

36 Integral_Limit1_2022_08

Beräkna och avrunda svaret till det närmast heltal

$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(1-x)^2} e^{-|x|/\epsilon} \frac{dx}{\epsilon}$ =

Tips? MEOW!

Totalpoäng: 2

37 Integral_Limit2_2022_08

Beräkna och avrunda svaret till det närmaste heltal:
$\lim_{t\searrow 0} \int_{-t/2}^{t/2} \cosh(-z) \frac{dz}{t}$ =

Tips? MEOW!

Totalpoäng: 2

38 Ortogonala_Hilbertrum_2022_08

Antar att $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ är ortonormala i ett Hilbertrum. Hur beviser vi att om gäller för varje f i Hilbertrummet
(2) $f = \sum_{n\geq 0} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$
sedan gäller
(3) $||f||^2 = \sum_{n\geq 0} |\langle f, \phi_n \rangle|^2$.
?

Välj ett alternativ:

- Vi använder Parsevals likhet och Bessels olikhet.
- Vi använder Pythagorus-satsen.
- Vi definerar $g = \sum_{n\geq 0} \langle f, \phi_n \rangle$ och visar att g-f=0.
- Vi använder Plancharels likhet och Bessels olikhet.
- Vi definerar $g = \sum_{n\geq 0} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ och vi visar att $\langle f - g, \phi_n \rangle = 0 \forall n$.
- Vi använder triangel olikhet och Cauchy-Schwartz olikhet.

Totalpoäng: 2

39 HilbertRum_2_2022_08

Antar att f ligger i ett Hilbertrum och att $\{\phi_n\}_{n\geq 0}$ ligger också i Hilbertrummet och är ortonormala. Antar att $\sum_{n\geq 0}|c_n| < \infty$. Vad kan vi bestämma?

Välj ett alternativ:

- Vi kan inte säga något för vi vet inte om $\sum_{n\geq 0} c_n\phi_n$ ligger i Hilbertrummet eller inte.
- Att $\sum_{n\geq 0} c_n\phi_n$ ligger i Hilbertrummet och vi har $||\sum_{n\geq 0}\langle f,\phi_n\rangle - f|| \leq ||\sum_{n\geq 0} c_n\phi_n - f||$.
- Serien $\sum_{n\geq 0} c_n$ ligger i Hilbertrummet och uppfyller $||\sum_{n\geq 0} c_n - f|| \geq ||\sum_{n\geq 0}\langle f,\phi_n\rangle - f||$.
- Serien $\sum_{n\geq 0} c_n\phi_n$ ligger i Hilbertrummet men vi har för få information för att säga mer.

Totalpoäng: 2

40 Periodic_Series_2022_08

Antar att f är 2π periodisk och C^2 på $(-\infty,\infty)$. Låt $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$.
Vad kan ni säga om: $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|nc_n|$?

Välj ett alternativ:

- Det konvergerar och är $\leq ||f''|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|^2dx}$.
- Det konvergerar men vi kan inte säga mer utan mer information om f.
- Serien konvergerar och gränsvärdet är $||f'|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|^2dx}$.
- Det är omöjligt att bestämma om serien konvergerar eller inte med bara den här informationen om f.

Totalpoäng: 2

41 **CAT_SATS_2022_08**

I det beviset av den satsen om punktvis konvergens av trigonometriska Fourier serier av en funktion f(t), introducerar vi en ny funktion $g(t) := \begin{cases} \frac{f(t+x)-f(x_-)}{e^{it}-1}, & -\pi < t < 0, \\ \frac{f(t+x)-f(x_+)}{e^{it}-1}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$

Vilka egenskaper har den här funktionen?

Välj ett alternativ:

- Den är styckvis kontinuerlig och begränsat.
- Den är lösningen till ett RSLP.
- Den är den bästa approximering av f(t).
- Den är obegränsat nära t=0.

Totalpoäng: 2

Solutions to August exam 2022

Julie Rowlett[1]

1

August 17, 2022

1. I didn't get an anonymous code, unlucky me!
2. Favorite topic? Maybe everything I would have to say.
3. Least favorite? When I make some stupid mistake or typo that then causes students to be confused. I hate it when that happens - although - it can actually be a rewarding learning experience for you. I also struggle with conveying the definition of regular SLP, because it is just so long and involves so many ingredients. I wish there were an easier way to explain it. Lots of people dislike Bessel functions, they find them complicated and difficult to understand. Even my colleagues. I wish I had some magic way to explain them to make them less complicated (but honestly they are pretty complicated by nature - I even have a research article under review right now about them!!)
4. What kind of problem is this:

$$f''(x) + \lambda \sinh(x) f(x) = 0, \quad x \in (-4, 4), \quad f'(-4) = 0, \quad f'(4) = 0?$$

   Well, it is an SLP type problem, but there is a problem. The function $\sinh(x)$ is called a weight function, and it's supposed to be positive on the interval. The interval contains zero, and $\sinh(0) = 0$. So not a regular SLP because of the weight function.
5. We are supposed to solve:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, t > 0, 0 < x < 4, \\ u(0,t) = 0, \\ u_x(4,t) = 0, \\ u(x,0) = \sin^2(x), \\ u_t(x,0) = \sin^2(x). \end{cases}$$

   I would start by separating variables.

6. We begin by separating variables because the equation is homogeneous:

$$u_{tt} = u_{xx},$$

so we start with a function of the form $T(t)X(x)$ and put it into the PDE:

$$T''X = X''T \text{ divide by } XT \implies \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X}.$$

Since the two sides depend on different variables, they are both constant. Let's call it λ. Which side do we solve for first? *The boundary conditions will help us to see, what the values of λ need to be!* So, we solve for X because it's the one that has boundary conditions:

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad X(0) = 0 = X'(4).$$

If $\lambda = 0$, then X is a linear function, and with the boundary conditions, it must be zero Okay. If $\lambda \neq 0$ a basis of solutions is furnished by $e^{\pm\sqrt{\lambda}x}$. Writing our solution as an unknown linear combination of these and testing the boundary conditions:

$$a + b = 0 \iff -a = b \text{ from the boundary condition at } x = 0,$$

$$\sqrt{\lambda}e^{4\sqrt{\lambda}} + \sqrt{\lambda}e^{-4\sqrt{\lambda}} = 0 \iff e^{4\sqrt{\lambda}} = -e^{-4\sqrt{\lambda}},$$

$$\iff e^{8\sqrt{\lambda}} = -1.$$

This looks pretty weird, *but* remember complex numbers? There are a whole lot of solutions to $e^z = -1$. If the exponent upstairs is an odd integer multiple of $i\pi$ then the equation will be satisfied. So, in particular we need

$$8\sqrt{\lambda} = (2n+1)i\pi, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \implies X(x) = ae^{i(2n+1)\pi x/8} - ae^{-i(2n+1)\pi x/8} = 2ai\sin((2n+1)\pi x/8).$$

Since we don't care about the constant factor, we throw it away. Since $\sin(-x) = -\sin(x)$ we also only need $n \geq 0$ to create a basis of solutions. Therefore we have found

$$X_n(x) = \sin((2n+1)\pi x/8), \quad \lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{64}.$$

Recycling this back into our equation for the partner function that depends on time, we get

$$\frac{T_n''}{T_n} = \lambda_n \implies T_n(t) = a_n\cos((2n+1)\pi t/8) + b_n\sin((2n+1)\pi t/8).$$

We keep the coefficients around here because: *The initial conditions will help us to find, coefficients of functions that depend on time.* Our solution is

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} X_n(x)T_n(t).$$

We set $t = 0$ and equate our solution with that initial data:

$$u(x,0) = \sum_{n \geq 0} X_n(x) T_n(0) = \sum_{n \geq 0} a_n X_n(x).$$

We therefore expand $\sin^2(x)$ in terms of our basis functions to obtain these coefficients

$$a_n = \frac{\int_0^4 \sin^2(x) \sin((2n+1)\pi x/8) dx}{\int_0^4 \sin^2((2n+1)\pi x/8) dx}.$$

We proceed similarly with the derivative

$$u_t(x,0) = \sum_{n \geq 0} X_n(x) T_n'(0) = \sum_{n \geq 0} b_n (2n+1)\pi X_n(x)/8.$$

Consequently, we expand this initial data as well:

$$b_n = \frac{8}{(2n+1)\pi} \frac{\int_0^4 \sin^2(x) \sin((2n+1)\pi x/8) dx}{\int_0^4 \sin^2((2n+1)\pi x/8) dx}.$$

Then we see that our solution is a series with sine in the x variable and both sine and cosine in the t variable.

7. The frequencies, i.e. $|\lambda|$ values are

$$\frac{(2n+1)^2 \pi^2}{8^2}, \quad n \geq 0.$$

The smallest of these is $\pi^2/8^2 \approx 0.15$. The next one is $3^2\pi^2/8^2 \approx 1.39$. So that yields the only viable answer. (Since all the other values are larger).

8. Can there be a function that satisfies

$$\int_0^4 |f(x)|^2 dx > 0 \text{ och } \int_0^4 f(x) e^{-(2n+1)\pi x/8} dx = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}?$$

That is, the function cannot be identically zero, but it must be orthogonal to $e^{(2n+1)i\pi x/8}$ for all integers n. Well, if this is true, then it is orthogonal to all X_n from the previous problem. However, these are the solutions of a regular SLP, hence they are a basis for $\mathcal{L}^2(0,4)$. So, any function that is bounded is automatically in $\mathcal{L}^2(0,4)$, and if it is orthogonal to all the X_n, then it must be zero by the three equivalent conditions. So the answer is nope, det finns inte.

9. Now we consider the problem:

$$\begin{cases} f''(x) + \lambda \sinh(x) f(x) = 0, \quad 1 < x < 2, \\ f(1) + 2f(2) = 0, \\ f'(1) + 2f'(2) = 0. \end{cases}$$

This is super tricky. Sorry. The sinh is okay because the interval excludes zero, so sinh is strictly positive. Fine. However, if you check the boundary conditions, if two functions f and g satisfy this stuff, there is no way to guarantee that 'the thing that needs to vanish' namely

$$(g'f - f'g)|_1^2 = 0.$$

You just get some garbage that might or might not be zero. So it's not a regular SLP because of the boundary conditions.

10. This problem is asking if there is a non-zero $\mathcal{L}^2$ function on the interval $(0, 1)$ that is orthogonal to all the even degree Legendre polynomials. There is a theorem that says they are a basis for $\mathcal{L}^2(0, 1)$, so the answer here is no.

11. Here we have

$$a_n = \int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx$$

for $n \geq 0$. There is a theorem that says that $\cos(nx)$ is an orthogonal basis for $\mathcal{L}^2(0, \pi)$. Or you can see it because they are all the solutions to a regular SLP. So we are expanding sine in terms of these. They are not normalized. However,

$$\alpha_0 := \frac{a_0}{\sqrt{\pi}}, \quad \alpha_n := \frac{\sqrt{2}a_n}{\sqrt{\pi}},$$

correspond to the normalized functions

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sqrt{2}\cos(nx)}{\sqrt{\pi}},$$

which comprise an orthonormal basis for the interval $(0, \pi)$, in the sense that if we took the scalar product with the normalized functions, we would get α_n instead of a_n. We therefore have the Parseval equality that says

$$||\sin^2(x)|| = \sum_{n\geq 0} ||\alpha_n||^2.$$

The left side is

$$\int_0^\pi \sin^2(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

The right side is

$$\frac{|a_0|^2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n\geq 1}|a_n|^2 = \frac{1}{\pi}\left(|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1} 2|a_n|^2\right).$$

So we have

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}\left(|a_0|^2 + \sum_{n\geq 1} 2|a_n|^2\right) \iff \frac{\pi^2}{2} = |a_0|^2 + \sum_{n\geq 1} 2|a_n|^2.$$

12. We would like to solve this beast:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, 0 < t, \\ u(0,t) = t, \\ u(1,t) = 2t, \\ u(x,0) = x^2. \end{cases}$$

The method is to deal with the weird boundary conditions as discussed in the text, and then end up with an inhomogeneous PDE. To obtain t at $x = 0$ we use the function $t(1-x)$ because it is equal to t at the one endpoint $x = 0$ and vanishes at the other endpoint $x = 1$. We flip it and use $2tx$ for the other endpoint. So, we will look for a solution to

$$\begin{cases} v_t - v_{xx} = -\left[(t(1-x) + 2tx)_t - (t(1-x) + 2tx)_{xx}\right], \\ v(0,t) = 0, \\ v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = x^2. \end{cases}$$

Our solution to the problem will be $v(x,t) + (t(1-x) + 2tx)$. To find v we use the RSLP method by seeking an OB for $(0,1)$ by solving

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(1) = 0.$$

13. So, for the next problem we continue where we left off. Our solution will be

$$v(x,t) + t(1-x) + 2tx = v(x,t) + t + tx.$$

The PDE that $v(x,t)$ needs to solve is:

$$v_t - v_{xx} = -(1+x).$$

We can actually find a steady state to deal with this(!!) This will be $\phi(x)$ that solves:

$$-\phi''(x) = -(1+x) \iff \phi''(x) = 1 + x \iff \phi(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + cx + d.$$

We don't want to mess up the boundary conditions, so we politely request that

$$\phi(0) = 0 = \phi(1).$$

This informs us what the coefficients must be. We must have $d = 0$, and we need

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + c = 0 \iff c = -\frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

So, our steady state solution is

$$\phi(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - \frac{2x}{3}.$$

Now we just need $w(x,t)$ to solve

$$\begin{cases} w_t - w_{xx} = 0, \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) = 0, \\ w(x,0) = x^2 - \phi(x). \end{cases}$$

Our solution will be

$$u(x,t) = w(x,t) + \phi(x,t) + t + tx.$$

To find w we separate variables:

$$T'X - X''T = 0 \iff \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} \iff \text{ both sides are constant } = \lambda.$$

The boundary conditions will help us to see what the values of λ need to be. So, we look for X to satisfy the ODE and the BC:

$$X'' = \lambda X, \quad X(0) = 0 = X(1).$$

We might remember having solved this and obtaining $X_n(x) = \sin(n\pi x)$. Putting it back to find T we get

$$\frac{T_n'}{T_n} = -n^2\pi^2 \implies T_n(t) = e^{-n^2\pi^2 t} \text{ up to a constant multiple.}$$

What are the constant multiples? Let us call

$$T_n(t) = a_n e^{-n^2\pi^2 t}.$$

The initial conditions will help us to find, coefficients of functions that depend on time. We need

$$w(x,0) = x^2 - \phi(x) = \sum_{n\geq 0} a_n X_n(x).$$

So we expand $x^2 - \phi(x)$ in terms of the OB X_n on the interval. It doesn't really matter what these coefficients are, because we see that our solution is precisely comprised of: En polynom i x, exponentiella funktioner i t, sinus och en funktion i form $T(t)X(x)$.

14. Now we are supposed to take our solution and calculate the limit:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{2u(1/2,t)}{t}.$$

Well, okay, let's write it out:

$$u(x,t) = w(x,t)+\phi(x,t)+t+tx = \sum_{n\geq 1} a_n \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi^2 t}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}-\frac{2x}{3}+t+tx.$$

We set $x = 1/2$ and obtain:

$$\sum_{n\geq 1} a_n \sin(n\pi/2)e^{-n^2\pi^2 t} + \frac{1}{6(8)} + \frac{1}{2(4)} - \frac{1}{3} + t + t/2.$$

Now, we divide everything by t and let $t \to \infty$. The series decays rapidly to 0. The constant terms also go away. The last part tends to $3/2$. So if we multiply it by 2 the limit is 3.

15. It's still heat equation time. We should solve:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{-(t+1)x^2}, & -\infty < x < \infty, 0 < t, \\ u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

This is great. We can either use the Fourier transform or remember how we did this. Call the inhomogeneity in the PDE $G(x,t)$. Call the initial data $f(x)$. Observe that these are both in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ for all $t > 0$. The solution is then as obtained in the text

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(y,s)e^{-(x-y)^2/(4(t-s))}(4\pi(t-s))^{-1/2}dyds + \int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-y^2/(4t)}(4\pi t)^{-1/2}dy.$$

16. We have

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(x)\cos(nx)dx.$$

We should calculate

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos(-n\pi/4).$$

These are normalized nice Fourier coefficients, so by the convergence of Fourier series theorem, the series converges to the value of the function $\sin(x)$ in the point $3\pi/4$. This is $\sqrt{2}/2 \approx 0.7$. The nearest whole number is 1.

17. The next one has

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)e^{-inx}dx.$$

We should calculate

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n$$

and round to the nearest whole number. These ones are not normalized. We still use the theorem which says that the normalized series converges to the value at $x = 0$ of $\cosh(x)$, so

$$\sum \frac{1}{2\pi}c_n = \cosh(0) = 1 \implies \sum c_n = 2\pi \approx 6.$$

18. Now we have
$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2x} e^{-inx} dx.$$
We need to calculate
$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\pi}.$$
By the theorem on pointwise convergence of Fourier series, the limit of the normalized series would be the average of the left and right limits of the 2π periodic extension of e^{2x} thus
$$\frac{e^{2\pi} + e^{-2\pi}}{2} = \sum \frac{1}{2\pi} c_n e^{in\pi} \implies \cosh(2\pi) * 2\pi = \sum c_n e^{in\pi}.$$
We calculate that $2\pi \cosh(2\pi) \approx 1682$.

19. Finally, something simple:
$$(\cosh(x)X'(x))' + \lambda \log(x) X(x) = 0, \quad 1 < x < 2, \quad X(1) = 0, \quad X(2) = 0.$$
It is a regular SLP.

20. I hope I am not making you hungry (or hate the thought of cooking...) We need to solve:
$$\begin{cases} u_t - k u_{xx} = 0, \quad 0 < t, \quad 0 < x < 4, \\ u(0,t) = 200 = u(4,t), \\ u(x,0) = 4. \end{cases}$$
We need to deal with those boundary conditions first, and that can be done with a steady state. That is a solution to
$$-kX''(x) = 0, \quad X(0) = 200 = X(4).$$

21. Now we need to use our cooking experience to figure out what k is. We are told that $u(2,t) = 100$ for time 45 minutes, but it is in hours so this is 0.75 hours. We use the previous exercise to find our steady state is just 200, so we wish to solve:
$$\begin{cases} v_t - k v_{xx} = 0, \quad 0 < t, \quad 0 < x < 4, \\ v(0,t) = 0 = v(4,t), \\ v(x,0) = 4 - 200. \end{cases}$$
Then $u(x,t) = v(x,t) + 200$. We have solved problems like this before. We separate variables, solve for the X part first, then get the T part, and end up with
$$v(x,t) = \sum_{n \geq 1} a_n e^{-kn^2\pi^2 t/16} \sin(n\pi x/4).$$

We only have to get the coefficient for the first term:

$$a_1 = \frac{\int_0^4 (4-200)\sin(\pi x/4)dx}{\int_0^4 \sin^2(\pi x/4)dx} = -\frac{784}{\pi}.$$

So now we set:

$$100 = u(2, 0.75) \approx 200 + a_1 \sin(\pi(2)/4)e^{-k\pi^2 0.75/16} = 200 - \frac{784}{\pi}e^{-k\pi^2 0.75/16}.$$

We solve this equation for k:

$$\frac{100\pi}{784} = e^{-k\pi^2 * 3/64} \iff \ln(784/(100*\pi)) = k\pi^2 \frac{3}{64}$$

$$\iff k = \ln(784/(100*\pi))\frac{64}{3*\pi^2} \approx 2.$$

22. Now we need to solve:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad t, x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x,0) = e^{-2x^2}. \end{cases}$$

Well, this is a wave equation so that heat equation Gauss function won't help us one bit. However, looking at the nice boundary condition and observing that the functions in the initial data are $\mathcal{L}^2$, we can use Fourier transform in x and even extension.

23. Now we need to solve:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad t, x > 0, \\ u(0,t) = 0, \\ u(x,0) = \frac{\cos(x)}{1+x^2}, \quad u_t(x,0) = \frac{1}{1+x^2}. \end{cases}$$

Well, this is a wave equation so that heat equation Gauss function won't help us one bit. However, looking at the nice boundary condition and observing that the functions in the initial data are $\mathcal{L}^2$, we can use Fourier transform in x and odd extension.

24. For the Bessel function J_n of order n we need to calculate:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(4)2^n.$$

The generating function

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x)z^n = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}.$$

In this case, the $x = 4$ and the $z = 2$, so we calculate

$$e^{\frac{4}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right)} = e^{2(3/2)} \approx 20.$$

25. Calculate:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-x}J_n(x)x^n.$$

We use the generating function again:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}e^{\frac{x}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{-\frac{x}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = 0.$$

26. We have another sum!

$$\sum_{n\geq 0}\frac{H_n(2)2^n}{n!}.$$

We use the generating function:

$$\sum_{n\geq 0} H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2}.$$

So, here we set $x=2$ and $z=2$ obtaining

$$e^{2(2)(2)-2^2} = e^{8-4} = e^4 \approx 55.$$

27. It is integral time! We need to compute

$$\int_0^\infty 2e^{-x^2}\cos(x)dx.$$

Well... notice that it is an even function so this is

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(x)dx.$$

We can turn this into a Fourier transform if we use the fact that

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}.$$

So we are calculating

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)dx.$$

This is $\frac{1}{2}$ times the sum of the Fourier transform of e^{-x^2} evaluated at 1 and -1. We look up the Fourier transform of this function, and it is

$$\sqrt{\pi}e^{-\xi^2/4}.$$

Setting $\xi = \pm 1$ we obtain that our integral is

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}e^{-1/4}+\sqrt{\pi}e^{-1/4}\right) = \sqrt{\pi}e^{-1/4} \approx 1.4.$$

Rounding to the nearest integer gives 1.

28. Now we have a Fourier series to evaluate. The coefficients

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^x e^{-inx} dx.$$

These are the coefficients of the function π^x. We are asked to evaluate the series

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(-1)^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\pi}.$$

That is the value of the series at $x = \pi$. *Trig Fourier series can be summed with haste if we remember to copy and paste!* So, remember that our function when turned into a trig Fourier series becomes 2π periodic. The function π^x we started with is *not* 2π periodic. At π and $-\pi$ it has different values. So the theorem on the pointwise convergence of trig Fourier series says that it converges to the average of these:

$$\frac{\pi^\pi + \pi^{-\pi}}{2} \approx 18.$$

29. It's time for drums! We need to solve:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - r^{-1}u_r - r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 12, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < t, \\ u(12,\theta,t) = 0, \\ u(r,\theta,0) = r - 12, \\ u_t(r,\theta,0) = 0. \end{cases}$$

Okay, first thing to notice is that *nothing* depends on theta up there. So the solution won't either. Phew. We solve for the r part next, using separation of variables (at least the PDE is homogeneous right?).

$$\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + r^{-1}\frac{R'}{R} = \Lambda.$$

So both sides are constant that we have called Λ. We solve for the R side because it has the nice boundary condition $R(12) = 0$. The equation is:

$$r^2R'' + rR' - r^2\Lambda R = 0.$$

If $\Lambda = 0$, the equation is just

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r} \implies \ln(R')' = -\frac{1}{r} \implies \ln(R') = -\ln(r) + c$$

$$\implies R' = e^c\frac{1}{r} \implies R(r) = C\ln(r) + B,$$

for two constants C and B. This is not a viable solution because it tends to $-\infty$ when $r \to 0$. If $\Lambda > 0$, the equation we have is the modified Bessel equation of order zero. The solutions are I_0 and K_0. The problem with

K_0 is that it tends to infinity when $r \to 0$. With I_0 it never vanishes, so we won't be able to get $R(12) = 0$. So we turn to $\Lambda < 0$, in which case the equation is the Bessel equation of order zero with solutions J_0 and Y_0. However, Y_0 tends to infinity at 0, so that is not a physical solution. The solution is therefore, having made the suitable variable change,

$$R(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r), \quad \lambda = -\Lambda.$$

To satisfy the boundary condition we need $R(12) = 0$, so we define

$$\pi_k = \text{ the k-th positive zero of } J_0, \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi_k}{12}, \quad R_k(r) = J_0(\pi_k r/12),$$

and

$$\Lambda_k = -\frac{\pi_k^2}{144}.$$

Consequently,

$$T_k(t) = a_k \cos(\pi_k t/12) + b_k \sin(\pi_k t/12),$$

and

$$u(r,t) = \sum_{k \geq 1} J_0(\pi_k r/12) T_k(t).$$

To find the coefficients in the T_k function, we use the initial data. Since both u is a non-zero function at $t = 0$, the a_k will in general not be zero. However, since $u_t = 0$, all of the b_k will vanish. So our solution is a series with Bessel function J_0 and cosines.

30. This is not as awful as it seems. We just need to consider the very first term. That is

$$a_1 \cos(\pi_1 t/12) J_0(\pi_1 r/12).$$

We are calculating at $r = 0$, and $t = 12$, and we are given that $J_0(0) = 1$, so we just need to calculate

$$a_1 \cos(\pi_1).$$

The coefficient

$$a_1 = \frac{\int_0^{12} (r - 12) J_0(\pi_1 r/12) r dr}{\int_0^{12} J_0^2(\pi_1 r/12) r dr}.$$

We are given that this is approximately

$$\frac{-183}{19}.$$

So, we therefore just need to calculate

$$-\cos(\pi_1) \frac{183}{19} \approx 7.$$

31. Now we have a polynomial approximation:

$$\int_2^4 |f(x) - p(x)|^2 dx.$$

It's a bounded interval so we will use Legendre polynomials. Their natural habitat is the interval $[-1, 1]$. That is where they are orthogonal and a basis. We're not there. We need to move them there... So we will be using $P_n(t)$ where t is some change of variables so that up to a constant factor

$$\int_2^4 P_n(t)P_m(t)dx = ... \int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt.$$

So, to make t go from -1 to 1 when x goes from 2 to 4 we set

$$t = x - 3.$$

Then the polynomials $P_n(x-3)$ will be an OB for the interval $[2, 4]$. We therefore project the function onto them, so we need to calculate the integrals

$$\int_2^4 f(x)P_n(x-3).$$

We would also need to calculate the norms of the P_n, but alternatively we could look these up.

32. Here we are on the half line, and we see a weight function e^{-x}. So, we use Laguerre polynomials with this weight function. We are expanding e^{-x}, so when we do this, we will end up calculating the integrals

$$\int_0^\infty e^{-2x} L_n(x)dx,$$

with the Legendre polynomials L_n.

33. Now we are on the whole real line, and we have the weight function $e^{-4x^2} = e^{-(2x)^2}$. The Hermite polynomials live on the real line and are an OB with respect to the weight function e^{-x^2}. It's not that weight function, so we need to change the variable in the Hermite polynomial. So we will use $H_n(2x)$. As before, we don't change the function we are projecting. So we'll be calculating the integrals

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)H_n(2x)e^{-(2x)^2}dx.$$

34. The tables tell us that the Fourier transform of $f'(x)$ is $i\xi\hat{f}(\xi)$. So,

$$\int_{\mathbb{R}} -ie^{-ix}f'(x)dx = -i(i)(1)\hat{f}(1) = \hat{f}(1) = g(1).$$

35. Now we are solving:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, \quad 0 < t, x, \\ u(0,t) = t^2 e^{2t}, \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

This just *screams* Laplace transform due to the boundary condition. So we would use that, and when we do, we get a convolution involving heavyside functions. They cause the integral in the convolution to run from 0 to t.

36. We need to calculate a limit:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(1-x)^2} e^{-|x|/\epsilon} \frac{dx}{\epsilon}.$$

The hint is MEOW. Sounds like a CAT. So we use the CAT. The function inside acting like g is the $g(x) = e^{-|x|}$. It is even, and its integrals on the half lines are both 1. The function being convolved is $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, so the thing we have is:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(y-x)^2} e^{-|x|/\epsilon} \frac{dx}{\epsilon} \bigg|_{y=1}.$$

The theorem tells us that this limit is equal to

$$f(1_+) \int_{-\infty}^{0} g(x)dx + f(1_-) \int_{0}^{\infty} g(x)dx = f(1) + f(1) = 2f(1) = 2\frac{1}{1+1^2} = 1.$$

37. The CAT in the HAT won't stop at THAT! We need to calculate:

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{-t/2}^{t/2} \cosh(-z) \frac{dz}{t}.$$

Here the t is playing the role of ϵ in the CAT. To see this as a convolution, observe:

$$\int_{-t/2}^{t/2} \cosh(-z) \frac{dz}{t} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-t/2,t/2]}(z) \cosh(0-z) \frac{dz}{t}.$$

Now, let's figure out that funny function business

$$\chi_{-t/2,t/2}(z) = \begin{cases} 0, & |z| > \frac{t}{2}, \\ 1, & |z| < \frac{t}{2}, \end{cases}$$

while

$$\chi_{-1/2,1/2}(z/t) = \begin{cases} 0 & \left|\frac{z}{t}\right| > \frac{1}{2}, \\ 1, & \left|\frac{z}{t}\right| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

It is the same function! So, what we have in the limit is

$$\int_{\mathbb{R}} \cosh(0 - z)\chi_{-1/2,1/2}(z/t)\frac{dz}{t}.$$

Thus we are calculating

$$\lim_{t \searrow 0} \int_{\mathbb{R}} \cosh(y - z)\chi_{-1/2,1/2}(z/t)\frac{dz}{t}\Big|_{y=0}.$$

Note that the integrals from $\pm\frac{1}{2}$ to 0 of the function $g(z) = \chi_{-1/2,1/2}(z)$ are both equal to $1/2$. The theorem as in the previous exercise says that this limit is

$$\cosh(0_+)\frac{1}{2} + \cosh(0_-)\frac{1}{2} = 1.$$

This is because cosh is continuous at 0, and is equal to 1 there, so its left and right limits are both equal to 1 there as well.

38. Now we are proving the step (2) $\implies$ (3) in the 3 equivalent conditions to be an ONB. This can be done by using the infinite dimensional Pythagorean theorem.

39. This one is kind of sneaky... Usually we would assume that

$$\sum |c_n|^2 < \infty$$

right? Well, to prove that a series converges we must prove that for any $\varepsilon > 0$ we can find N large enough to make

$$\sum_{n \geq N} |c_n|^2 < \varepsilon.$$

Since the sum without the squares converges. So, there is some N such that $|c_n| < 1$ for all $n \geq N$, because the terms in a convergent sum tend to zero. Then, since this sum converges, taking N possibly larger, we can guarantee that

$$\sum_{n \geq N} |c_n| < \varepsilon.$$

Since $|c_n| < 1$ it follows that $|c_n|^2 < |c_n|$ so for this n we also get that

$$\sum_{n \geq N} |c_n|^2 < \varepsilon$$

as required. This guarantees that

$$\sum_{n \geq 0} c_n \phi_n$$

is an element of our Hilbert space. So we can apply the best approximation theorem to conclude that

$$||\sum_{n \geq 0} c_n \phi_n - f|| \geq ||\sum_{n \geq 0} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n - f||.$$

40. This is also a bit interesting. We know that a function f is 2π periodic on all of the real line. So, we can apply the theorem that relates the Fourier coefficients of a function and its derivatives:

$$c_n' = inc_n, \quad c_n'' = -n^2 c_n.$$

Next we can use the Cauchy-Schwarz inequality

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| = \sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \left| n\frac{c_n''}{n^2} \right| \leq \sqrt{\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n}^2} \sqrt{\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} |c_n''|^2}.$$

The first one we know how to compute:

$$\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = 2\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{3}.$$

So we get the inequality

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\sum_{0\neq n\in\mathbb{Z}} |c_n''|^2}.$$

Next, we observe that

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n''|^2 = \frac{1}{2\pi} ||f''||^2,$$

so we have the inequality

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |nc_n| \leq \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ||f''||.$$

Since $\sqrt{\pi} < \sqrt{6}$ this is bounded above by $||f''||$. Since f is twice differentiable, f'' is continuous, and therefore this norm is finite.

41. Finally we consider the proof of the pointwise convergence of Fourier series. There is this bizarre function:

$$g(t) := \begin{cases} \frac{f(t+x)-f(x_-)}{e^{it}-1}, & -\pi < t < 0, \\ \frac{f(t+x)-f(x_+)}{e^{it}-1}, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

It is piecewise continuous and bounded. That is essential to the proof.