i Försättsblad

Chalmers MVE030 & MVE290
Den 18 mars 2022

MVE030/MVE290 - Fourieranalys och Fourier Metoder
Ägare: TKTFY/TKKEF – Teknisk fysik/Kemiteknik med fysik
Institution: 11 – MATEMATISKA VETENSKAPER
Examinator: Julie Rowlett
Telefon: 031-772 34 19
Mobil: 0732-00 69 49
E-post: julie.rowlett@chalmers.se

Tentamen innehåller 40 frågor, 2 poäng per fråga. Bonuspoäng från duggorna läggs till (upp till 5 poäng). (Det finns 41 men #1 är för att lägga till bonuspoäng - bara skriv din anonymkod där snälla!)

För betyg 3 krävs minst 40 poäng.

För betyg 4 krävs minst 53 poäng.

För betyg 5 krävs minst 67 poäng.

Tillåtna hjälpmedel är:

1. Kursbok både i inspera som resurs (pdf) samt uttryckt (papper) version av kursboken. I kursboken tillåts anteckningar, highlights, sticky-notes/post-its, osv.

2. BETA handbook. Anteckningar, highlights, sticky-notes/post-its, osv tillåts.

3. Miniräknare (vilken som helst).

Lycka till! ^_^ You got this! May the mathematical forces be with you!

1 Bonus poäng

Hej! Skriv din anonymkod här så kommer vi att lägga till dina bonuspoäng!

Skriv in din anonymkod här ^_^

Teckenf...

Ord: 0

Totalpoäng: 5

2 Favorite topic?

What was your favorite topic from this course? // Vilket var ditt favoritämne från den här kursen?

Skriv in ditt svar här

Teckenf...

Ord: 0

Totalpoäng: 2

3 Least favorite/hardest part

What was your least favorite part of this course and/or what did you find most challenging? // Vilken var din minst favoritdel av den här kursen och/eller vad tyckte du var jobbigast?

Skriv in ditt svar här

Teckenf…

Ord: 0

Totalpoäng: 2

4 Wave equation 1

Vi ska lösa problemet

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 7 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(7,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Vad ska vi göra först?

Välj ett alternativ:

- Använd Laplace transform i t
- Variabel separation
- Hitta en steady-state lösning
- Använd Fourier transform i x
- Använd Laplace transform i x

Totalpoäng: 2

5 RSLP?

Är följande ett reguljärt Sturm-Liouville Problem?

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f(7) = 0.$$

Välj ett alternativ:

- Nej
- Ja

Om svaret är ja, vad kan ni säga om egenvärdena?

Välj ett alternativ

- De går mot negativ oändligt men vi kan inte räkna exakt vad de är.
- De börjar med cirka 0,05 och bli större.
- (Välja det här svaret om du har svarat nej ovanför)
- De börjar med cirka -5 och bli mindre (negative).
- De går mot positiv oändligt men vi kan inte räkna exakt vad de är.
- De börjar med cirka 3 och bli större.
- De börjar med 0 och bli mindre (negativ).
- De börjar med 0 och bli större (positiv).

Totalpoäng: 2

6 Wave eqn 2

Lös problemet: $\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & t > 0, \quad 0 < x < 7 \\ u_x(0,t) = 0 \\ u(7,t) = 0 \\ u(x,0) = x^2(x-7) \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$

Lösning är:

Välj ett alternativ:

- En integral på intervallet [0, 7]
- En faltning (convolution)
- En serie med cosine och cosh
- En integral från 0 till ∞
- En serie med sine och sinh
- En serie med cosines (cosinus)
- En serie med sines (sinus)
- En serie med sine och cosh

Totalpoäng: 2

7 Wave eqn 3

En av följande frekvenser (dvs $|\lambda|$) finns i lösningen till föregående uppgiften - vilken? (avrundat till en decimal)

Välj ett alternativ:

- 0,3
- 0
- 0,5
- 0,8

Totalpoäng: 2

8 Finns det...

Finns det en funktion i $[0, \pi]$ som uppfyller:

$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx > 0, \text{ och } \int_0^\pi f(x)\sin(2nx)dx = 0$

för alla $n \geq 0?$ (heltal n).

Välj ett alternativ:

- Det är inte möjligt att bestämma med den här informationen.
- Ja
- Nej

Totalpoäng: 2

9 Typ av problem?

Vilket typ av problem är: $\begin{cases} f''(x)+(x+1)\lambda f(x)=0, \quad 0<x<\pi \\ f(0)+f(\pi)=0, \\ f'(0)+f'(\pi)=0. \end{cases}$

Välj ett alternativ

- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av randvillkorerna
- Det är en Bessel ekvation
- Det är en modifierade Bessel ekvation
- Det är ett SLP typ problem men inte regulärt på grund av vikt funktionen
- Det är en inhomogen partiell differential ekvation
- Det är ett regulärt Sturm Liouville Problem
- Det är en homogen partiell differential ekvation

Totalpoäng: 2

10 Finns det...

Finns det en funktion i $[0, \pi]$ som uppfyller

$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx > 0$ och $\int_0^\pi f(x)\cos((2n+1)x)dx = 0, \quad \int_0^\pi f(x)\sin((2n+1)x)dx = 0, \quad \forall n \geq 0?$

Välj ett alternativ:

- Nej
- Ja
- Det är för lite information för att kunna bestämma

Totalpoäng: 2

11 Vad vet ni om...

Antar att $0 < \int_0^\pi |f(x)|^2 dx < \infty$
Låt $\hat{f}_n = \frac{\int_0^\pi f(x)\cos(2nx)dx}{\int_0^\pi \cos^2(2nx)dx}$. Vad vet ni om
$\sum_{n\geq 0} |\hat{f}_n|^2$
Välj ett alternativ:

- $= \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$
- $\leq \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$
- $< \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$
- $> \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$
- Det är för lite information för att kunna svara.

Totalpoäng: 2

12 Heat eqn 1

Vi skulle vilja lösa problemet $\begin{cases} u_t - u_{xx} = e^{xt} & 0 < x < 1, 0 < t \\ u(0,t) = e^t \\ u(1,t) = e^{-t} \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$
Vilka teknik kan leda till en hanterbar lösning?
Välj ett alternativ:

- Fourier transform i x
- Fourier transform i t
- Laplace transform i x
- Laplace transform i t
- Ett regulärt SLP

Totalpoäng: 2

13 Heat eqn 2

Lös problemet: $\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < t, \quad -\infty < x < \infty, \\ u(x,0) = f(x), & \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 2. \end{cases}$

För att lösa problemet, det funkar bra att använda: Välj alternativ

(Använd en serie med Bessel funktioner, Variabelseparation, Laplace Transform i x, Lösa ett regulärt Sturm-Liouville problem, Fouriertransform i t, Fouriertransform i x, Laplace Transform i t)

Lösningen blir

Välj alternativ (en invers Laplace transform, en serie med Bessel funktioner, en trigonometrisk Fourierserie, en integral från minus oändligt till plus oändligt).

Totalpoäng: 2

14 Calculate limit

Låt $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^3 e^{-inx} dx.$

Beräkna $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n.$ eller skriv om summan konvergerar inte

[ ].

Totalpoäng: 2

15 Calculate integral

Låt $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{x(x-in)} dx = c_n$, och $C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} e^{-inx} dx.$

För $n \in \mathbb{Z}, c_n =$ [ ] C_n. dvs $c_n = ??C_n$ och ni skulle skriva in vad är ??.

Snälla använd bara bokstaver och/eller siffror, inte () eller * eller extra mellanslag.

Totalpoäng: 2

16 Laga mat

Det är dags att laga mat - janssons frestelse. Vi ska lösa den här problemet som beskriver vertikal temperaturen i vår ungsform som vi har tagit ur kylskåpet och satt i ungnen:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < t \quad 0 < x < 6, \\ u(0,t) = 180 = u(6,t) \\ u(x,0) = 5. \end{cases}$$

Det funkar bra att börja med att:

Välj ett alternativ:

- Använda CAT (faltning approximering sats)
- Använda Fouriertransform i t
- Hitta en funktion som uppfyller f''(x)=0, f(0) =180 = f(6).
- Lösa det regulärt Sturm-Liouville-Problemet:
  $f''(x) + \lambda f(x) = 0$,
  $0 < x < 6,$
  f(0) = f(6) =180.
- Använda Laplacetransform i x
- Använda Laplacetransform i t
- Använda Samplingssatsen
- Använda Fouriertransform i x

Totalpoäng: 2

17 Janssons

Lös problemet:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = 0, & 0 < t \quad 0 < x < 6, \\ u(0,t) = 180 = u(6,t) \\ u(x,0) = 5. \end{cases}$$

Maten är klart när i mitten temperaturen blir 100 (temperaturen är i C), dvs när u(3, t) = 100 grad C.

Min erfarenhet ger att Janssons blir klart efter en timme = 60 minuter (tid är i minuter här).
Vad blir k?
Anta att du kan approximera lösningen med konstanttermen och följande termen och
Använd gärna: $\frac{\int_0^6 -175\sin(\pi x/6)dx}{\int_0^6 |\sin(\pi x/6)|^2 dx} = -\frac{700}{\pi}$.

Skriv svaret i form a,bc (dvs avrunda till två decimalplatser, dvs skriva ett heltal som a och två decimalplatser som bc så att svaret ser ut som a,bc med $a, b, c \in \mathbb{Z}$)

Totalpoäng: 2

18 PDE

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t, x > 0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x), \\ \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty, & \int_0^\infty |g(x)|^2 dx < \infty. \end{cases}$$

Vilken teknik går bra att använda?

Välj alternativ (Udda utvidning (extension) och Fourier transform i x, Laplace transform i x, En Fourier serie, Ett regulärt Sturm Liouville Problem, En serie med Bessel funktioner, Jämn utvidning (extension) och Fourier transform i x, En Laplace serie, Laplace transform i t).

Totalpoäng: 2

19 PDE

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t, x > 0, \\ u(0,t) = 0, & \\ u(x,0) = f(x), & u_t(x,0) = g(x), \\ \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty, & \int_0^\infty |g(x)|^2 dx < \infty. \end{cases}$$

Vilken teknik går bra att använda?

Välj alternativ (Ett regulärt Sturm Liouville Problem, Udda utvidgning (extension) och Fourier transform i x, En Mellin transform, En Fourier serie, Jämn utvidgning (extension) och Fourier transform i x, En Bessel serie, Laplace transform i t).

Totalpoäng: 2

20 Bessel

Beräkna: $\sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(2)e^{in\pi/6}$ eller skriv om det konvergerar inte:

Om ni vill skriver ett komplex tal, ni kan skriva med komplexa polära koordinater som $re^{i\theta}$ eller ni kan skriva som $a + ib$ då ni skriver de reela tal a och b som _,_ (dvs avrunda till en decimal och skriva med ,)

Totalpoäng: 2

21 Hermite

Låt $H_n(x)$ vara den Hermite polynom av grad n.
Beräkna (eller skriv om det konvergerar inte):
$\sum_{n\geq 0} \frac{H_n(2)}{n!}$. Avrunda till närmast heltal (om det konvergerar)

Totalpoäng: 2

22 Calculate limit

Beräkna $\lim_{n\to-\infty}\int_0^\pi e^{x^2}\cos(2nx)dx$

Skriv in ditt svar [ ] här eller skriv om gränsvärdet finns inte.

Totalpoäng: 2

23 Calculate limit

Beräkna $\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sin\left(\frac{nx-x}{n}\right)\cos\left(\frac{nx+x}{n}\right)dx$ eller skriv om gränsvärdet finns inte:

[ ]

Totalpoäng: 2

24 Calculate sum

Låt $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^3e^{-inx}dx.$ Beräkna $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$. [ ] (Skriv exakt eller avrunda till närmast heltal, eller skriv on summan konvergerar inte).

Totalpoäng: 2

25 Calculate integral

Beräkna:
$\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin(x)e^x}{x}dx+\int_0^\infty\frac{\sin(x)e^{-x}}{x}dx.$
Skriv svaret som exakt värde eller som närmast heltal (avrunda) eller skriv om integralerna konvergerar inte:

[ ]

Totalpoäng: 2

26 Calculate sum

Låt
$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{3x}dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{3x}\cos(nx)dx, \quad n \geq 1, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{3x}\sin(nx)dx, \quad n \geq 1.$

Vad blir summan $a_0 + \sum_{n\geq 1} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$ när x=5π ? Ge exakt svar eller avrunda till närmast heltal eller skriv om summan konvergerar inte:

Totalpoäng: 2

27 Musik

Vi ska spela trumman!
Funktionen $u(r,\theta,t)$ ge höjden på trumman i tidspunkt t på punkten (r,θ) på trumman och uppfyller:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - r^{-1}u_r - r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 10, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < t, \\ u(10,\theta,t) = 0, \\ u(r,\theta,0) = r - 10, \\ u_t(r,\theta,0) = 0. \end{cases}$$

Lös problemet. Lösningen blir:
Välj ett alternativ:

- En serie med Bessel funktion J_0 och sinus
- En serie med trigonometriska funktioner och exponentiella funktioner
- En serie med Bessel funktionen J_0 och cosinus
- En invers Laplace transform
- En serie med Bessel funktionerna J_n för heltal n=0, 1, 2, ..., cosinus och sinus
- En faltning
- En invers Fourier transform

Totalpoäng: 2

28 Musik Trumma

Vi ska spela trumman!
Funktionen $u(r,\theta,t)$ ge höjden på trumman i tidspunkt t på punkten (r,θ) på trumman och uppfyller:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{rr} - r^{-1}u_r - r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 < r < 10, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad 0 < t, \\ u(10,\theta,t) = 0, \\ u(r,\theta,0) = r - 10, \\ u_t(r,\theta,0) = 0. \end{cases}$$

Ni har redan löst problemet i föregående uppgiften. Vad är höjden i mitten (dvs r=0) i tidspunkten t=10? Avrunda till närmast heltal. Ni får gärna använda några formel:

Låt π_k vara den k-te positiv nollställa av J_0. Sedan gäller för alla b>0:

$$\frac{\int_0^b J_0(\pi_k r/b) r dr}{\int_0^b J_0^2(\pi_k r/b) r dr} = \frac{2}{\pi_k J_1(\pi_k)}$$

Också, $J_0(0) = 1,$

$$\pi_1 \approx 2,4, \quad J_1(\pi_1) \approx 0,52, \frac{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10) r^2 dr}{\int_0^{10} J_0^2(\pi_1 r/10) r dr} \approx 8,19$$

(avrunda till närmast heltal!)

Totalpoäng: 2

29 Polynom approximering

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 10 som minimerar
$\int_{-2}^{2} |f(x) - p(x)|^2 dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Projicera f(x) på L_n(2x) med L_n Laguerre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på L_n(x/2) med L_n Laguerre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på P_n(2x) med P_n Legendre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på P_n(x/2) med P_n Legendre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på H_n(2x) med H_n Hermite polynomen grad n.
- Projicera f(x) på H_n(x/2) med H_n Hermite polynomen grad n.

Totalpoäng: 2

30 Polynom approximering 2

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 10 som minimerar
$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - p(x)|^2 e^{-x^2} dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Projicera f(x) på H_n(x) med H_n Hermite polynomen grad n.
- Projicera f(x) på L_n(x) med L_n Laguerre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på P_n(x) med P_n Legendre polynomen grad n.

Totalpoäng: 2

31 Polynom approximering 3

Vi vill hitta polynom p(x) av högst grad 10 som minimerar
$\int_{0}^{\infty} |f(x) - p(x)|^2 e^{-x} dx.$
Hur kan vi hitta p(x)?
Välj ett alternativ:

- Projicera f(x) på P_n(x) med P_n Legendre polynomen grad n.
- Projicera f(x) på H_n(x) med H_n Hermite polynomen grad n.
- Projicera f(x) på L_n(x) med L_n Laguerre polynomen grad n.

Totalpoäng: 2

32 Fouriertransform

Antar att ni kan hitta Fouriertransformen av funktionen f på en tabell:
$\hat{f}(\xi) = g(\xi).$ Använd g för att beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx =$

Totalpoäng: 2

33 PDE

Vi ska lösa problemet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & 0 < t, x, \\ u(0,t) = \cos^2(t), \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Det funkar bra om vi börjar med att

Välj alternativ (använda Laplace transform i x, använda Fourier transform i t, använda Laplace transform i t, använda Fourier transform i x, lösa ett regulärt SLP, separera variablerna). När vi lösa problemet, svaret kommer att bli

Välj alternativ (en integral från minus oändligt till plus oändligt, en Fourier serie med Hermite polynom, en trigonometrisk Fourier serie, en integral från 0 till t, en Fourier-Bessel serie)

Totalpoäng: 2

34 Beräkna integral

Antar att funktionen f är en begränsad och kontinuerlig funktion. Beräkna (eller skriv om gränsvärdet finns inte):

$\lim_{t \searrow 0} \int_{-at}^{at} f(b-z) \frac{dz}{t}$ =

Skriv svaret utan * och med absolut minimum parentes möjligt. (Ni kommer att behöva bara en uppsättning parenteser)

Tips? MEOW!

Totalpoäng: 2

35 Beräkna integral

Antar att funktionen f är en begränsad och kontinuerlig funktion. Beräkna (eller skriv om gränsvärdet finns inte):

$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2(\pi - x) e^{-|x|/\epsilon} \frac{dx}{\epsilon}$ =

Ni får avrunda till närmast heltal. Tips? MEOW!

Totalpoäng: 2

36 RSLP

Vi har det reguljära Sturm Liouville problemet:
$(e^x X'(x))' + \lambda e^{-x} X(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad B_i(X) = 0, \quad i = 1, 2.$
Om vi vet bara att f och g är $\mathcal{C}^2$ reella funktioner som uppfyller dessa randvillkor, kan vi säga något om:
$\int_0^1 [(f''(x) + f'(x))g(x) - (g''(x) + g'(x))f(x)]e^x dx?$
Välj ett alternativ:

- Vi kan inte bestämma något p.g.a. vi skulle behöva veta mer om f och g.
- Det är 0 på grund av att f och g uppfyller randvillkor av problemet.
- Vi kan inte bestämma något p.g.a. vikt funktionen i integralen är fel.
- Det är 0 p.g.a. att f och g är ortogonala.

Totalpoäng: 2

37 Lagom konvergenssats

I beviset av satsen om punktvis konvergens av trigonometriska Fourier serier vi skriva om $\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = e^{-iNx} \sum_{n=0}^{2N} e^{inx}$. Varför gör vi det?
Välj ett alternativ:

- För att sedan visa att svansen av summan går mot noll.
- För att sedan använda Parsevals likhet.
- För att sedan kunna bestämma att summan konvergerar när N går mot oändligt.
- För att sedan kunna summera den geometriska summan.

Totalpoäng: 2

38 Triganometriska Fourier koefficienter

Hur kan vi bevisa satsen som relaterar de trigonometriska Fourier koefficienter av en funktion f till dess av f'?

Välj ett alternativ:

- Använd definitionen av Fourier koefficienter av f'.
- Deriverar Fourier serien av f termvis.
- Integrerar Fourier serien av f' termvis.
- Använda Bessels olikhet.

Totalpoäng: 2

39 Plancharels sats

En viktig steg i beviset av Plancharels sats är

Välj ett alternativ:

- att använda partiell integration.
- att använda satsen om punktvis konvergens av Fourier serier.
- att använda Fourierinverssatsen (FIT).
- att använda den trigonometriska Fourier serie av en av funktionerna.

Totalpoäng: 2

40 Samplingsatsen

I beviset av Samplingsatsen använder vi att
$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty, \quad \hat{f}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \text{ med } |\xi| > L.$
Hur använder vi den här informationen?
Välj ett alternativ:

- Det visar at Fourier transformen av f är i L2 så vi kan utveckla Fourier transformen av f i en trigonometriska Fourier serie med hjälp av funktionerna exp(i*n*L*x/pi).
- Det visar at Fourier transformen av f är i L2 så vi kan utveckla Fourier transformen av f i en trigonometriska Fourier serie med hjälp av funktionerna exp(i*n*pi*x/L).
- Det visar at Fourier transformen av f är i L2 så vi kan utveckla Fourier transformen av f i en trigonometriska Fourier serie med hjälp av funktionerna exp(i*n*L*x).
- Det visar at Fourier transformen av f är i L2 så vi kan utveckla Fourier transformen av f i en trigonometriska Fourier serie med hjälp av funktionerna exp(i*n*x).

Totalpoäng: 2

41 Ortogonalitet av Hermite polynom

Vad kan vi använda för att bevisa att de Hermite polynom är ortogonala?
Välj ett alternativ:

- Partiell integration.
- Plancharels sats.
- Bessels olikhet.
- Faktumet att en polynom multiplicerad med e^{x^2} går till noll väldigt snabbt när x går mot $\pm\infty$.
- Romero formel för de Hermite polynom.

Totalpoäng: 2

Solutions to March exam 2022

Julie Rowlett[1]

1

March 17, 2022

1. I didn't get an anonymous code, unlucky me!
2. Favorite topic? Maybe everything I would have to say.
3. Least favorite? When I make some stupid mistake or typo that then causes students to be confused. I hate it when that happens - although - it can actually be a rewarding learning experience for you. I also struggle with conveying the definition of regular SLP, because it is just so long and involves so many ingredients. I wish there were an easier way to explain it.
4. First thing to solve this problem: separate variables!
5. Yes, it's regular. The eigenfunctions are
$$\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{7}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{49},$$
since we write the problem as
$$f''(x) + \lambda f(x) = 0.$$
The smallest one is
$$\frac{\pi^2}{49} \approx 0,05.$$
They get increasingly bigger after that.
6. So, you see the previous problems we can now use to solve this problem. We started by separating variables and then we put TX into the pde to obtain
$$T''X = X''T.$$
Dividing by XT we get
$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Since they depend on different variables, both sides are constant. We solve for the X side first,

$$\frac{X''}{X} = \Lambda \iff X'' + \lambda X = 0, \quad \lambda = -\Lambda.$$

Well, now we use the RSLP from the previous exercise. We have

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{7}\right), \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{49},$$

so the partner function T_n satisfies

$$T_n''(t) = \Lambda_n = -\lambda_n = -\frac{(2n+1)^2\pi^2}{49}.$$

Thus up to constant factors T_n is a linear combination of sine and cosine of t times $\frac{(2n+1)\pi}{14}$, for $n \in \mathbb{N}$. (the Swedish one that starts at zero). Then we use superposition to obtain

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} X_n(x)\left(a_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{14}\right) + b_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi x}{14}\right)\right).$$

To find the constant factors we would use the initial conditions. We don't have to work all of this out however. We see that $u(x,0)$ is a non-zero function, whereas $u_t(x,0) = 0$. This means that the coefficients b_n will all vanish, because when we differentiate the solution and set $t = 0$, we get

$$\sum_{n\geq 0} b_n \frac{(2n+1)\pi}{14} X_n(x),$$

and this should equal zero. Expanding zero in terms of the OB (which is an OB since they are the solutions of an RSLP) these must all vanish. So the solution is a series with cosines. That's the answer here. If you could see that more quickly, power to you.

7. Well, the first value we found in one of the previous exercises, $\frac{\pi^2}{14^2}$. The next values are

$$\frac{3^2\pi^2}{14^2} \approx 0,5, \quad \frac{5^2\pi^2}{14^2} \approx 1,3.$$

So the only listed value that's a frequency is $0,5$.

8. This is essentially asking whether or not $\{\sin(2nx)\}_{n\geq 1}$ is a base for $\mathcal{L}^2$ on the interval $[0,\pi]$. The functions $\{\sin(nx)\}_{n\geq 1}$ are a base, because they solve the RSLP

$$f'' + \lambda f = 0, \quad f(0) = f(\pi) = 0.$$

However here we are missing half of them. So they are not a base. By the 3 equivalent conditions to be a base, the first condition is not satisfied, i.e. there is an f in $\mathcal{L}^2(0,\pi)$ that is orthogonal to all of these functions but is not zero itself. So the answer is yes.

9. This is a regular SLP. It checks all the boxes.

10. Well, if we look at the preceding problem and ignore that $(x+1)$ stuff, instead thinking about

$$f'' + \lambda f = 0 \text{ in } (0, \pi), \quad f(0) = -f(\pi), \quad f'(0) = -f'(\pi),$$

then we can solve this RSLP. The eigenvalues are $(2n+1)^2\pi^2$ with multiplicity two, having the two eigenfunctions (with the same eigenvalue) $\cos((2n+1)x)$ and $\sin((2n+1)x)$. So by the same theorem we used in #8, we now can conclude that there is *no* such function, so the answer is no.

11. Well similarly to the previous problems, these cosines are not a full base. So if we expand in terms of them the result will have norm less than or equal to that of f. However, we can say something more precise in fact, check it out:

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{f}_n|^2 ||\cos(2nx)||^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n\geq 0} |\hat{f}_n|^2 \leq ||f||^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2 dx.$$

Re-arranging,

$$\sum_{n\geq 0} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |f(x)|^2 dx < \int_0^\pi |f(x)|^2 dx,$$

where we use the fact that $0 < \int_0^\pi |f(x)|^2 dx$ and $\frac{2}{\pi} < 1$.

12. So that last one was maybe a little tricky, but hopefully this one is a relief. The only thing that makes sense, since we are on a bounded interval in the x variable, is to solve a regular SLP. Doing this we obtain an OB fo L2 on the interval, and then we take this as a starting point to build our solution by finding the unknown functions that depend on time using the PDE together with the expansion of the inhomogeneous stuff on the right side of the PDE in terms of the OB from the RSLP.

13. This should also be pretty feasible. Heat equation on the whole real line. The initial data is clearly stated to be in L2. So we use Fourier transform method, and our solution will be an integral over the real line.

14. If you see this one, then it takes you a second to compute. This is the Fourier series of x^3 with respect to the OB $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ on $(-\pi, \pi)$ evaluated at the point $x = 0$. The function is continuous there, so this series converges to its value, zero.

15. Similarly, if you see it, this should be quick. The little c_n is the Fourier coefficient of the derivative of e^{x^2}. This function is equal at the two endpoints $\pm\pi$, so we can apply the theorem that relates the Fourier coefficients of a function to that of its derivative. Thus $?? = in$.

16. This should also be feasible, because there are only two reasonable options given the setting. The 'regular SLP' thing is bullcrap, because those boundary conditions are *not* self-adjoint, so that is *not* a RSLP. So, the only other thing to do is to start by finding a steady state solution to deal with those BCs, as is the correct choice, finding f so that $f''(x) = 0$, $f(0) = 180 = f(6)$.

17. Okay, this is a harder one. You need to solve the problem. BUT you only need to use the steady state from the previous problem and the first term. We solve the SS part getting 180. So we will add this to the solution of the new problem

$$\heartsuit = \begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0, & 0 < t,\ 0 < x < 6 \\ v(0,t) = 0 = v(6,t) \\ v(x,0) = -175. \end{cases}$$

We separate variables as we did in a previous problem and arrive at the RSLP for the x dependent part

$$\frac{T'}{T} = k\frac{X''}{X} = \Lambda, \quad X'' + \lambda X = 0, \quad \Lambda = -k\lambda.$$

The BCS are $X(0) = 0 = X(6)$. We have solved this many times before, the solutions are

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{6}\right), \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{36} \implies \Lambda_n = -k\frac{n^2\pi^2}{36}.$$

This tells our partner functions up to the constant factors are $e^{-ktn^2\pi^2/36}$. So, the solution

$$u(x,t) = 180 + \sum_{n\geq 1} c_n e^{-ktn^2\pi^2/36} X_n(x).$$

The coefficients we get by expanding the initial data in terms of the OB functions X_n, so

$$c_n = \frac{\int_0^6 -175\sin(\pi x/6)dx}{\int_0^6 |\sin(\pi x/6)|^2 dx} = -\frac{700}{\pi}.$$

This was kindly given to us. We're told to use the constant term and the next term to approximate the solution, so we are approximating with

$$u(x,t) \approx 180 - \frac{700}{\pi}e^{-kt\pi^2/36}\sin(\pi x/6).$$

In the middle, that is $x = 3$, we get $\sin(\pi 3/6) = 1$. We are told that the temperature is 100 after 60 minutes, meaning

$$100 = 180 - \frac{700}{\pi}e^{-k(60)\pi^2/36} \iff 80 = \frac{700}{\pi}e^{-k\pi^2(5/3)}.$$

So we solve this for k:

$$\ln\left(\frac{8\pi}{70}\right) = -\frac{5\pi^2 k}{3} \iff k = \frac{3}{5\pi^2}\ln\left(\frac{70}{8\pi}\right) \approx 0,06.$$

18. This problem should be a breath of fresh air after the last one. It is classic textbook: extend evenly due to the boundary condition at $x = 0$, then use Fourier transform in x.

19. Similarly, if you didn't figure it out by now, look at the preceding problem. They are *so similar.* You could almost use "exam psychology" to guess this if you didn't know how to do it. Looks almost the same as the previous one, right? Just slightly different. So this one and the previous one should have almost the same method, but maybe a little different eh? Exactly. Odd extension and Fourier transform in x here.

20. This is one way to test theory. If you learned how to *prove* the generating function for the Bessel functions, then you should recognize this stuff. Then you'd know that you should look up what that theorem says:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(x) z^n.$$

Okay, so we see that we must have $x = 2$, and $z = e^{i\pi/6}$. So, we look at the left side. It is e raised to the

$$e^{i\pi/6} - 1/(e^{i\pi/6} = e^{i\pi/6} - e^{-i\pi/6} = 2i\sin(\pi/6) = i.$$

So the answer is $e^i \approx 0,54 + i0,84$. I thought that e^i business was pretty cute though.

21. If the last one showed you anything - and if you indeed learned the theory item about generating function for Hermite - then you know what to do here. That theorem says

$$e^{2xz-z^2} = \sum_{n\geq 0} \frac{H_n(x) z^n}{n!}.$$

Okay, so since we don't see any z we must have $z = 1$, and clearly $x = 2$. So the left side is

$$e^{2*2*1-1} = e^3 \approx 20.$$

If you know the Space Ghost Coast to Coast episode with Björk, then you know how much I love it when 20 appears. The episode is called Knifin' Around, and if you would like a break from studies, check it out, it is rather funny...

22. This is an application of Bessel's inequality. If you expand e^{x^2} in terms of the functions - sure they're not a base but they're orthogonal - then you are looking at

$$\sum_{n\geq 0} c_n \cos(2nx), \quad c_n = \frac{\int_0^\pi e^{x^2}\cos(2nx)dx}{\int_0^\pi \cos^2(2nx)dx}.$$

So,

$$\sum_{n\geq 0} |c_n|^2 ||\cos(2nx)||^2 \leq \int_0^\pi (e^{x^2})^2 dx.$$

The thing on the right is finite. So the sum on the left converges, so the individual terms go to zero. This shows that said limit is zero.

23. You could compute this one directly, or you could be more quiz inspired. The functions $u_n(x) = \sin\left(\frac{nx-x}{n}\right)$ converge to $\sin(x)$ as $n \to \infty$. The functions $v_n(x) = \cos\left(\frac{nx+x}{n}\right) \to \cos(x)$ as $n \to \infty$. The scalar product is continuous, so

$$\lim_{n\to\infty}\langle u_n, v_n\rangle = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi u_n(x)v_n(x)dx = \langle \sin(x), \cos(x)\rangle.$$

Actually, here you can use one of the RSLP problems from before to know that the sine and cosine are orthogonal, because they are eigenfunctions of a RSLP that are linearly independent.

24. This is kind of similar to a previous one. Here the functions e^{inx} are an OB for the interval, so we use

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 ||e^{inx}||^2 = ||x^3||^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^6 dx = \frac{2\pi^7}{7}.$$

Since the norms of the e^{inx} are 2π, re-arranging

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi^7}{7} = \frac{\pi^6}{7} \approx 137.$$

25. You first need to recognize this is

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(x)}{x} e^{-|x|} dx.$$

I think the easiest way to proceed is to use Plancharel to say $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$. Then we look up the Fourier transforms of these functions from a table to get that said integral is

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \pi \frac{2}{\xi^2+1} d\xi = \arctan(\xi)|_{\xi=-1}^{\xi=1} = \frac{\pi}{4} - -\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

You have one of your classmates to thank for this one.

26. This is a pointwise convergence of trig Fourier series problem. We expand e^{3x} in a Fourier series with respect to the OB $\{e^{inx}\}$. Then it's 2π periodic, so the series converges at $5\pi = \pi + 2 * 2\pi$ to whatever it converges to at π. The theorem says that it converges to the average of the left and right limits, which are $e^{3\pi}$ and $e^{-3\pi}$ respectively. Averaging these we get $\cosh(3\pi)$.

27. Yes, this is a trickier one. However there are few simplifications one can use. First, there is no theta dependence in the initial condition, so there's not going to be any later. So $u_{\theta\theta} = 0$. Then we solve for the r part next, using separation of variables (at least the PDE is homogeneous right?).

$$\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + r^{-1}\frac{R'}{R} = \Lambda.$$

So both sides are constant that we have called Λ. We solve for the R side because it has the nice boundary condition $R(10) = 0$. The equation is:

$$r^2 R'' + rR' - r^2 \Lambda R = 0.$$

If $\Lambda = 0$, the equation is just

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{1}{r} \implies \ln(R')' = -\frac{1}{r} \implies \ln(R') = -\ln(r) + c$$

$$\implies R' = e^c \frac{1}{r} \implies R(r) = C\ln(r) + B,$$

for two constants C and B. This is not a viable solution because it tends to $-\infty$ when $r \to 0$. If $\Lambda > 0$, the equation we have is the modified Bessel equation of order zero. The solutions are I_0 and K_0. The problem with K_0 is that it tends to infinity when $r \to 0$. With I_0 it never vanishes, so we won't be able to get $R(10) = 0$. So we turn to $\Lambda < 0$, in which case the equation is the Bessel equation of order zero with solutions J_0 and Y_0. However, Y_0 tends to infinity at 0, so that is not a physical solution. The solution is therefore, having made the suitable variable change,

$$R(r) = J_0(\sqrt{\lambda} r), \quad \lambda = -\Lambda.$$

To satisfy the boundary condition we need $R(10) = 0$, so we define

$$\pi_k = \text{ the k-th positive zero of } J_0, \quad \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi_k}{10}, \quad R_k(r) = J_0(\pi_k r/10),$$

and

$$\Lambda_k = -\frac{\pi_k^2}{100}.$$

Consequently,

$$T_k(t) = a_k \cos(\pi_k t/10) + b_k \sin(\pi_k t/10),$$

and

$$u(r,t) = \sum_{k\geq 1} J_0(\pi_k r/10) T_k(t).$$

To find the coefficients in the T_k function, we use the initial data. Since $u_t(r,0) = 0$ this means all the sine terms have to vanish, so

$$u(r,t) = \sum_{k\geq 1} a_k \cos(\pi_k t/10) J_0(\pi_k r/10), \quad a_k = \frac{\int_0^{10} (r-10) J_0(\pi_k r/10) r dr}{\int_0^{10} J_0(\pi_k r/10)^2 r dr}.$$

The answer is that it's a series involving J_0 and cosines.

28. Now we need to use our solution, but only the first term. We are asked to calculate the height at the center, $r = 0$, at time $t = 10$. So we take the first term, set $t = 10$ and evaluate it. This is

$$a_1 \cos(\pi_1) J_0(0).$$

We get some helpful formulas to use. First, $J_0(0) = 1$. So we have just

$$a_1 \cos(\pi_1).$$

We use the formulas to calculate a_1 and a calculator for the cosine:

$$a_1 = \frac{\int_0^{10} (r-10) J_0(\pi_1 r/10) r dr}{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10)^2 r dr} = \frac{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10) r^2 dr}{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10)^2 r dr} - 10 \frac{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10) r dr}{\int_0^{10} J_0(\pi_1 r/10)^2 r dr}.$$

Thanks to my calculations, this is

$$\approx 8,19 - \frac{20}{(2,4)(0,52)}.$$

So, our estimate of the height is

$$\left(8,19 - \frac{20}{(2,4)(0,52)}\right) \cos(2,4) \approx 5,78 \approx 6,$$

since we were told to round to the nearest integer. And the worst part of the exam is done, I'd say.

29. It's a bounded interval, so we use Legendre adapted to that interval, thus $P_n(x/2)$.

30. It's the e^{-x^2} weighted real line, so we use Hermite.

31. It's the e^{-x} weighted positive line, so we use Laguerre.

32. I hope you remember this or could find it in the book:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \hat{f}(0).$$

By the notation in the problem the answer is $g(0)$.

33. Well, we are on a half line, and we have data that is clearly not $\mathcal{L}^2$. So we use Laplace transform in that variable, t. Okay, let's solve this:

$$\widetilde{u}_t(x,z) - \widetilde{u}_{xx}(x,z) = 0 \iff z\widetilde{u}(x,z) - u(x,0) - \widetilde{u}_{xx}(x,z) = 0.$$

Since $u(x,0) = 0$, we solve the ODE and get

$$\widetilde{u}(x,z) = a(z)e^{-x\sqrt{z}} + b(z)e^{x\sqrt{z}}.$$

The $x = 0$ condition tells us

$$a(z) + b(z) = \widetilde{\cos^2}(z).$$

To be the Laplace transform of something it must decay as the real part of z tends to infinity. Since we are solving on $x > 0$, this means the $e^{x\sqrt{z}}$ term is not feasible. So we hope we can solve with just the other term, showing that

$$\widetilde{u}(x,z) = \widetilde{\cos^2}(z)e^{-x\sqrt{z}}.$$

Since it's a product, this shows that before Laplace transforming what we had was a convolution of *functions that are zero on the negative real line.* Thus

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \cos^2(t-s)\Theta(t-s)g(x,s)\Theta(s)ds = \int_0^t \cos^2(t-s)g(x,s)ds,$$

where

$$\widetilde{g(x,t)}(z) = e^{-x\sqrt{z}}.$$

So the last part of the answer is that it's an integral from 0 to t.

34. I told y'all to study the quizzes! This is straight off quiz number five. It's an application of the convolution approximation theorem (CAT), since the integral is

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(-a,a)}(z/t)f(b-z)\frac{dz}{t}.$$

So since f is continuous the result is

$$f(b)\int_{-\infty}^0 \chi_{(-a,a)}(z)dz + f(b)\int_0^\infty \chi_{(-a,a)}(z)dz = 2af(b).$$

35. Same thing here. Since

$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}dx = 1 = \int_0^\infty e^{-|x|}dx,$$

and the function $\cos^2$ is continuous, the result is

$$\cos^2(\pi) + \cos^2(\pi) = 2.$$

36. Okay, this is a maybe not so obvious, really testing if you know your SLP stuff. In the definition of RSLP, note that the operator

$$L(X) = (e^x X')'.$$

So, the integral we are asking about is none other than

$$\langle L(f), g\rangle - \langle f, L(g)\rangle = 0.$$

You would know this is zero if you learned the proof of the abc's of SLPs, because we use this fact in that proof. Specifically we use that for functions that satisfy the boundary conditions of the RSLP, we can move the L operator from one side to the other in the scalar product. We don't need f and g to be eigenfunctions of the RSLP for this to be true. Alternatively - you just integrate by parts and see that the leftover stuff you get vanished by the fact that it's a RSLP.

37. Only one answer here is not totally ridiculous. The sum $\sum_{-N}^{N} e^{inx}$ does *not* converge. So it's tail doesn't go to zero. Parseval's equality has nothing to do with this either. We do this to compute the geometric sum.

38. This should also be like a julklapp. You *know* we don't differentiate or integrate termwise in this theorem. You get the text for crying out loud which says this with ALL CAPS. So of course the only reasonable thing to do use use the definition of the Fourier coefficients of f'. I mean what the heck would Bessel's inequality do for us here anyways?

39. Similarly, only one answer is not totally silly. We use the FIT. None of the others make any sense here, but maybe they made you laugh?

40. Here you just need to look at the proof and have some understanding of it. We adapt the trig orthogonal basis to the interval in which $\hat{f}$ lives, $[-L, L]$, so we expand $\hat{f}$ with respect to $e^{in\pi x/L}$.

I hope you found this exam to be fair and representative of the course! We really tried to make it so! ♡