Fourieranalys MVE030 och Fourier Metoder MVE290 augusti.2020
Betygsgränser: 3: 40 poäng, 4: 53 poäng, 5: 67 poäng.
Maximalt antal poäng: 80.
Examinator: Julie Rowlett.
Telefonvakt: Julie: 0317723419. OBS! Om ni är osäker på något så fråga! (If you are unsure about anything whatsoever, please ask!) Jag kan inte få text på det här numret!! (I am unable to receive text messages at this number, so please no text messages!) Emailvakt: julie.rowlett@chalmers.se

1. Links

Zoom: `https://chalmers.zoom.us/j/68636051257`

Skype for business: `https://meet.chalmers.se/hugo.landgren/LDU0W6MS`

2. The following problems are worth 3 points each except the last one that is worth 4 points. *Följande problem är värda 3 poäng vardera förutom de sista som är vardera 4 poäng.*

(1) Is the following problem a regular SLP?
Är följande problement ett regulärt SLP?

$$\big(\cos(x)f'(x)\big)' + \lambda f(x) = 0, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right], \quad f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

(a) yes *ja*
(b) no *nej*

Svar: nej, för att funktionen $\cos(x)$ skulle vara positiv på intervallet $[-\pi/4, \pi/4]$, men det är inte.

(2) Consider the following Sturm-Liouville problem: in the interval $[0, 2]$ and determine how many positive eigenvalues there are with $\lambda < 3$
Betrakta följande Sturm-Liouville problem i intervallet $[0, 2]$ *och bestämma hur många positiva egenvärde det finns med* $\lambda < 3$*:*

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) - y(0) = 0, \quad y(2) = 0.$$

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) 3
(e) -1

Svar: 1. Vi tar bara $\lambda > 0$, så vi letar efter lösningar till $y'' = -\lambda y$, $\lambda > 0$. Så ett bas av lösningar blir $\cos(\sqrt{\lambda}x)$ och $\sin(\sqrt{\lambda}x)$. Sedan vi titta på punkter 0 och 2:

$$y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x) \implies y(0) = A, y'(0) = B\sqrt{\lambda} \implies B\sqrt{\lambda} = A.$$

Vi får antar att $B = 1$, altså

$$y(x) = \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(\sqrt{\lambda}x) \implies y(2) = \sqrt{\lambda}\cos(2\sqrt{\lambda}) + \sin(2\sqrt{\lambda})$$

$$\implies -\sqrt{\lambda} = \frac{\sin(2\sqrt{\lambda})}{\cos(2\sqrt{\lambda})} = \tan(2\sqrt{\lambda}).$$

Nu ritar jag två funktioner: funktionen $f(t) = -t$ och funktionen $g(t) = \tan(2\sqrt{t})$. Jag tittar på när de är lika... Om $0 < \lambda < 3$ det betyder att $0 < 2\sqrt{\lambda} < 2\sqrt{3} \approx 3.46$. Hur många gånger kryssar f och g när t är mellan 0 och $2\sqrt{3}$? Precis en gång.

(3) Let f be the π periodic function that is equal to $e^{\sin(x^2)}$ for $0 \leq x \leq \pi$. What is the closest approximation to the value of its Fourier series at $x = 4\pi$?
Låt f vara den π periodisk funktion som är lika med $e^{\sin(x^2)}$ för $0 \leq x \leq \pi$. Vad är den närmast approximation till värdet av dess Fourierserien i $x = 4\pi$?

(a) 0
(b) -1

(c) 1
(d) 3
Svar: funktionen är ju π periodisk dvs värdet i 4π är lika med värdet i 0 vilket är 1.

(4) Let f be the π periodic function that is equal to $e^{\sin(x^2)}$ for $0 \le x \le \pi$. If we differentiate its Fourier series termwise, will the resulting series be equal to the Fourier series of $2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$?
Låt f vara den π periodisk funktion som är lika med $e^{\sin(x^2)}$ för $0 \le x \le \pi$. Om vi deriverar dess Fourierserien termvis, ska serien vi får vara like till Fourierserien av $2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$.
(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: nej, för att funktionen som är lika med $e^{\sin(x^2)}$ i intervalled $(0, \pi)$ och är π periodisk blir inte kontinuerlig på $\mathbb{R}$. Det ”ar inte kontinuerlig i punkterna $\pi\mathbb{Z}$. Så man får inte deriver Fourierserien termvis.

(5) Let f be the 2π periodic function that is equal to $e^{\sin(x^2)}$ for $-\pi \le x \le \pi$. If we differentiate its Fourier series termwise, will the resulting series be equal to the Fourier series of $2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$?
Låt f vara den 2π periodisk funktion som är lika med $e^{\sin(x^2)}$ för $-\pi \le x \le \pi$. Om vi deriverar dess Fourierserien termvis, ska serien vi får vara like till Fourierserien av $2x\cos(x^2)e^{\sin(x^2)}$.
(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: ja. Funktionen när vi utveckla på intervalled $(-\pi, \pi)$ att vara 2π periodisk blir kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$. Så vi får använda satsen och derivera termvis!

(6) Let $w(x) = x$ on the interval $(0, 1)$. Please provide a complete basis for the weighted space $L^2_w(0, 1)$. *Låt $w(x) = x$ i intervallet $(0, 1)$. Ge snälla att fullständigt ortogonalsystem i det viktade rummet $L^2_w(0, 1)$.*
Jag skulle vilja ta dem Besselfunktionerna, med hjälp av sats 5.3 i Folland. Om $\{\lambda_k\}_{k\ge1}$ är de positiva zeros av $J_0(x)$ sedan

$$J_0(\lambda_k x)$$

är ett ortogonal bas för just $L^2_w(0, 1)$.

(7) Is the function $\frac{1}{x}$ piecewise $\mathcal{C}^1$ on $(-1, 1)$?
Är funktionen $\frac{1}{x}$ styckvis $\mathcal{C}^1$ i intervallet $(-1, 1)$?
(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: nej, får att gränsvärdet från höger och vänster i punkten 0 saknas.

(8) Is the function $\frac{|\sin(x)|}{x}$ in $\mathcal{L}^1$ on $\mathbb{R}$?
Är funktionen $\frac{|\sin(x)|}{x}$ i $\mathcal{L}^1$ på $\mathbb{R}$?
(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: Frågan är om

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{|\sin(x)|}{|x|} dx$$

existerar? Man kan uppskatta integralen och visa att det går mot ∞, altså svaret blir nej.

(9) Give an example of a function that does not have a well-defined Fourier series on $(-\pi, \pi)$.
Ge ett exempel av en funktion som inte har en Fourierserie i intervallet $(-\pi, \pi)$.
Svar: $\frac{1}{x}$.

(10) Give an example of a function that cannot be Fourier transformed.
Ge ett exempel av en funktion som inte kan bli Fourier transformerad.
Svar: $\frac{1}{x}$.

(11) Give an example of a function that is in $\mathcal{L}^2$ on $\mathbb{R}$ but is not in $\mathcal{L}^1$ on $\mathbb{R}$.
Ge ett exempel av en funktion som är i $\mathcal{L}^2$ på $\mathbb{R}$ men inte är i $\mathcal{L}^1$ på $\mathbb{R}$.
Svar: $\frac{|\sin(x)|}{x}$.

(12) Find the polynomial $p(x)$ of at most degree 3 which minimises
Hitta polynomet $p(x)$ av grad högst 3 som minimerar

$$\int_{-3}^{2} |p(x) - e^{x^2}|^2 dx.$$

Vi ska använda Legendre polynom. Låt oss kalla de P_n för Legendre grad n. Sedan gäller

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)\overline{P_m(x)}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

Vi skulle vilja nu beräkna ett variabelbyt vilket gör

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\overline{P_m(t)}dt = ... \int_{-3}^{2} P_n(ax+b)\overline{P_m(ax+b)}dx.$$

För att flytt $[-3,2] = [-1/2 - 5/2, -1/2 + 5/2]$ över till $[-1,1]$ vi tar

$$\frac{2}{5}(x + 1/2) = t \implies \frac{2}{5}dx = dt,$$

och sedan

$$\int_{-3}^{2} P_n(2/5(x+1/2))\overline{P_m(2/5(x+1/2)}dx = \frac{5}{2}\int_{-1}^{2} P_n(t)\overline{P_m(t)}dt$$

$$= \frac{5}{2}\begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1} & n = m \end{cases}$$

Det visar att polynomen $\{P_n(2/5(x+1/2))\}_{n\geq 0}$ är ortogonal och P_n har grad n. En sats säger att de är ett bas för $\mathcal{L}^2(-3,2)$. Så vi kan använda den bästa approximation satsen som säger att om vi tar

$$c_n = \frac{\int_{-3}^{2} e^{x^2}\overline{P_n(2/5(x+1/2)}dx}{\frac{5}{2n+1}},$$

polynomet

$$p(x) := \sum_{n=0}^{3} c_n P_n(2/5(x+1/2))$$

är den bästa approximation.

(13) What is the worst part of this course course? Explain what you find difficult, yucky, or otherwise bothersome.
Vad är den sämsta delen av den här kursen? Förklarar varför du tycker det är svårt, äckligt, besvärligt...

Grading the exams of people who do not pass. That makes me very sad, but there is nothing I can do about it except try harder to teach you all what you need to learn to pass. That is the reason I am asking you this, to help me identify what stuff gives you the most trouble and hopefully then be better able to help you with it!

3. The following problems are worth 2 points each. *Följande problem är värde 2 poäng vardera.*

(1) Is the following equation for the unknown function u a PDE or an ODE?
Är följande ekvationen för den okänd funktionen u en PDE eller en ODE?

$$\frac{\partial u}{\partial_t} - \frac{\partial^2 u}{\partial_x^2} = 0.$$

(a) PDE
(b) ODE

PDE

(2) Is the following equation for the unknown function u a PDE or an ODE?
Är följande ekvationen för den okänd funktionen u en PDE eller en ODE?

$$\frac{du}{dt} - u^2 + \frac{d^2u}{dt^2} = 0.$$

(a) PDE
(b) ODE
ODE

(3) Is the following boundary condition self-adjoint?
Är följande randvillkor själv-adjunkta?

$$f(0) = f(1), \quad f'(0) = f'(1).$$

(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: ja.

(4) Consider the following problem: *Betrakta följande problem:*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = -3 & t > 0, \quad 0 < x < \ell, \\ u(x,0) = x^2 + 3, & x \in (0, \ell) \\ u(0,t) = -3, \\ u(\ell, t) = 3 \end{cases}$$

Is the boundary condition self-adjoint?
Är randvillkorerna själv-adjunkta?
(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: nej.

(5) What should we do first?
Vad borde vi göra först?
(a) find a steady-state solution *hitta en tidsoberoende lösning*
(b) separate variables *variabelseparation*
(c) apply the Fourier transform *använda Fouriertransformen*
(d) apply the Laplace transform *använda Laplacetransformen*
Svar: steady-state solution.

(6) Which technique will be an important part of finding the solution?
Vilken teknik kommer att bli en viktig del av lösningen?
(a) a Sturm-Liouville Problem *ett SLP*
(b) the Laplace transform *Laplacetransformen*
(c) the Fourier cosine transform *Fourier-cosinustransformen*
(d) the Fourier sine transform *Fourier-sinustransformen*
Svar: SLP.

(7) What form will the solution take?
Vilken form kommer lösning att ha?
(a) a convolution *en faltning*
(b) an inverse Fourier transform *en invers-Fouriertransform*
(c) a Fourier series *en Fourier-serie*
(d) an inverse Laplace transform *en invers-Laplacetransform*
Svar: Fourierserie.

(8) What technique will provide the solution to the following problem
Vilken teknik kommer att lösa följande problem

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} + x + t, & x, t > 0, \\ u(0,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \\ u(x,0) = 0 = u_t(x,0) & x > 0 \end{cases}$$

där $c > 0$ är en konstant?
(a) the Laplace transform *Laplacetransformen*

(b) the heat kernel *värmeledningskärnan*
(c) Plancharel's theorem *Plancharels sats*
(d) Bessel's inequality *Bessels olikehet*
(e) Fourier sine transform *Fourier-sinustransformen*
Svar: Laplacetransformen.

(9) Is the following function Fourier-transformable?
Är följande funktion Fourier-transformerbar?

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x}.$$

(a) yes *ja*
(b) no *nej*
Svar: nej.

(10) If we wish to solve
Om vi önskar lösa

$$\begin{cases} u_{rr} + r^{-1}u_r + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0 & 0 < r < R, \quad 0 < \theta < \beta \\ u(r,0) = 0 \\ u(r,\beta) = 0 \\ u(R,\theta) = \theta^3 \end{cases}$$

which technique will NOT help?
vilken teknik kommer INTE att hjälpa oss?
(a) Fourier series *Fourierserier*
(b) Fourier transform *Fouriertransform*
(c) separation of variables *variabelseparation*
(d) regular Sturm-Liouville problem *regulärt SLP*
Svar: Fouriertransform.

4. The theory part! These are worth 2 points each. *Teori-delen! De här uppgifterna är värda 2 poäng vardera!*

(1) Is the following series convergent for all $x \in \mathbb{R}$ or not?
Är följande serien konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$ eller inte?

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(x),$$

above J_n is the Bessel function of order n.
Ovanstående J_n är Besselfunktionen av grad n.
(a) yes (convergent for all $x \in \mathbb{R}$) *ja (konvergent för alla $x \in \mathbb{R}$)*
(b) no (not necessarily convergent for all x) *nej, inte konvergent för alla x*
Svar: ja. Kan bevisa mha genererande funktionen.

(2) In the proof of the pointwise convergence of Fourier series we write

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(t+x)e^{-int}dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)e^{-int}dt.$$

Why are these two integrals the same?
I beviset av punktvis konvergens av Fourierserier skriver vi ovanstående ekvationen, men varför stammer det?

Svar: Det följer från en Prop som säger att om funktionen $f(t+x)e^{-int}$ är 2π periodisk, vilket det är, sedan blir varje integral mellan två punkter som står på en 2π avstånd samma.

(3) What is the key ingredient from calculus to proving the relationship between the Fourier coefficients of a function and the Fourier coefficients of its derivative?
Vad är nyckel ingredient från envariabelanalys för att bevisa förhållande mellan Fourierkoefficienterna av en funktion och dess av sin derivator?
Svar: Partiell integration!

(4) Give an example of a function f so that both it and its derivative have well defined Fourier series, but the coefficients c_n of f and c_n' of f' do not satisfy $c_n' = inc_n$ for all $n \in \mathbb{Z}$.
Ge ett exempel av en funktion f så att både f och dess derivator f' har väl definierad Fourierserier, men koefficienterna c_n av f och c_n' av f' uppfyller inte $c_n' = inc_n$ för alla $n \in \mathbb{Z}$.
Svar: e^x. Flera möjliga svar.

(5) Describe in your own words what the best approximation theorem says.
Beskriva i dina egna ord vad säger den bäst approximation satsen.
It says that the projection of an element of a Hilbert space onto an orthogonal set in that Hilbert space is the best approximation.

(6) Plancharel's theorem says that for two functions in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ we have the equality

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}d\xi = 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

How can one apply this to solving problems?
Plancharelssatsen säger att för två funktioner i $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ vi har ovanstående likhet. Hur kan man använda den för att lösa problem?
Turn icky integrals into pretty ones.

(7) What is *not* used in the proof of the sampling theorem?
Vad använder man inte *i samplingsatsens bevis?*
(a) Fourier transform *Fouriertransformen*
(b) Fourier series *Fourierserie*
(c) Fourier inverse theorem *Fourierinverssatsen*
(d) Convolution *Faltning*
Svar: Faltning

(8) We call them the Hermite polynomials, but at first sight they don't look like polynomials. Explain why they are in fact polynomials.
Vi nämner dem Hermite-polynom, men på första blicket liknar de inte polynom. Förklara varför de är verkligt polynom.

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

The e^{x^2} will get cancelled because when you differentiate e^{-x^2} any number of times, the result is always looking like a polynomial multiplied with e^{-x^2}. The reason is cause the derivative of e^{stuff} is e^{stuff} times the derivative of the stuff.

(9) What is the most bizarre step, in your opinion, in the proof of the big bad convolution approximation theorem?
Vilket steg, tycker du, i beviset av den stor faltning-approximering-satsen är konstigast? Är du snäll och förklarar varför då?
Hmmmmm... I would almost say the very first one. Splitting into two half integrals. If you are just staring at the statement, it is not at all obvious to make that split. To me, once I have done that, the path starts to become sort of clear. If I didn't think to do that, I would just stare forever and be stuck.

(10) What is something that you are happy to have learned in this course, and why?
Vad är något du har lärt dig i den här kursen som du är nöjd att ha lärt dig, och varför då?
Hmmmmm... getting to know all of you students? At least a little bit! That is one reason I like asking questions and hearing how you think about things.