MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola
Tentamen i Fourieranalys/Fouriermetoder, MVE030/MVE290, 20/03/2015, 8.30-13.30
Hjälpmedel: Godkänd räknedosa, BETA.
Telefonvakt: Matteo Molteni, 0703-088304.

Besökstider: ca 9.30 och 11.30

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange kod på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
För betyg 3 krävs 30p, för betyg 4 krävs 40p, och för betyg 5 krävs 50p av 60p möjliga plus ev. bonus

---

1. (a) Hitta Fourierserien till en 2π-periodisk funktion som är definierad som $f(x) = 1 - |x|/\pi$ för $x \in [-\pi, \pi)$. (3p)

   (b) Använd svaret i förra uppgift för att hitta $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$. (3p)

2. Funktionen $f(x)$ är definierad på $\mathbb{R}$ och har Fouriertransformen som har värdet 1 på intervalen $[-10, -5]$ och $[0, 3]$, värdet -1 på interval $(-5, 0)$ och $(3, 10]$, och värdet 0 på alla resterande tal.

   (a) Hitta $f(0)$. (2p)

   (b) Hitta $f * f * f * f$. (3p)

   (c) Hitta $\int_{-\infty}^{\infty} (f * f * f)^2 dx$. (3p)

3. Lös följande begynelsevärdet problem på positiva halv-axeln med hjälp av Laplace transform: $u'' + 2u' + 2u = H(x - 2\pi); u(0) = 0; u'(0) = 1$. (8p)

4. Lös Dirichlet problem $\Delta u = 0$ i kvadraten $0 \le x, y \le 1$ med randvärdena (6p)

$$u(x, 0) = x - x^2, u(0, y) = 0, u(1, y) = 0, u(x, 1) = 0.$$

5. (a) Hitta Laguerre polynomen $L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)}$. (1p)

   (b) Hitta det polynom P av grad högst 3 som minimerar $\int_0^{+\infty} (x^4 - P(x))^2 x e^{-x} dx$. Motivera ditt svar. (5p)

6. Lös värmespridningsekvation $u_t = 9\Delta u$ i en isolerade skiva $x^2 + y^2 < 4$. Randvilkorna i polära koordinater blir $u_r(2, \theta, t) = 0$. Begynelsevilkor är $u(x, y, 0) = y^2$. (10p)

7. Visa att bandbegränsat impulssvar kan inte vara kasualt. (8p)

8. (a) Vad är sfäriska harmoniker och vad är solida harmoniker? (1p)

(b) Skriv funktionen $f(x, y, z) = x^3$ på sfären $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ som summa av sfäriska harmoniker. Vad blir komponenten av ordning 3. (7p)

Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan. När resultaten är registrerade i Ladok kommer ett e-brev.

LYCKA TILL! Maria

Extra formler:

$$\frac{d}{dx}\big(x^{-\nu}J_\nu(x)\big) = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\big(x^{\nu}J_\nu(x)\big) = x^{\nu}J_{\nu-1}(x)$$

$$\int_0^b J_\nu(\mu x)^2 x dx = \frac{b^2}{2}J_\nu'(\mu b)^2 + \frac{\mu^2 b^2 - \nu^2}{2\mu^2}J_\nu(\mu b)^2, \mu, b > 0, \nu \geq 0.$$

Uppgift 1

a) ur BETA (13.1(6) dela med π): $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} cos((2k-1)x)$.

man kunde också beräkna integralerna

b) Då f är kontinuerlig i origo gäller $f(0) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} cos((2k-1)0)$, i.e. $1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}$ och $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \pi^2/8$.

Uppgift 2

a) $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i0\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi}(5+3-5-7) = -\frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$.

b) $\mathcal{F}(f*f*f*f) = \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \hat{f} = \chi_{[-10,10]}$. $f*f*f*f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-10}^{10} e^{ix\xi} d\xi$. Om $x \neq 0$ svaret är $f*f*f*f(x) = \frac{1}{2i\pi x}(e^{10ix} - e^{-10ix}) = \frac{sin(10x)}{\pi x}$, om $x = 0$, svaret är $f*f*f*f(0) = \frac{10}{\pi x}$.

c) $\mathcal{F}(f*f*f) = \hat{f} \cdot \hat{f} \cdot \hat{f} = \hat{f}$, så $\int (f*f*f)^2 dx = \int f^2 dx$. $\mathcal{F}(f^2) = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{f}$, s $\int f^2 dx = \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \hat{f}(-\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} 2(-5+2-3) = -\frac{6}{\pi}$. *Det var många som mistog c) för Plancherel, som egentligen behöver beloppet. Jag ger delpoäng för detta i förutsättning att ni inte gör detta fel igen.*

Uppgift 3

Laplacetransformera ekvationen (med randvilkor inräknat): $(s^2+2s+2)L(u) - 1 = \frac{e^{-2\pi}}{s}$, dvs. $L(u) = \frac{e^{-2\pi}}{s(s^2+2s+2)} + \frac{1}{s^2+2s+2}$. Partiellbråksuppdela $\frac{1}{s(s^2+2s+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2+2s+2}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1})$. Nu $L^{-1}(\frac{1}{s(s^2+2s+2)}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x))$, och $L^{-1}(\frac{e^{-2\pi}}{s(s^2+2s+2)}) = H(x-2\pi)\frac{1}{2}(1 - e^{-(x-2\pi)}\cos(x - 2\pi) - e^{-(x-2\pi)}\sin(x-2\pi)) = H(x-2\pi)\frac{1}{2}(1 - e^{-(x-2\pi)}\cos(x) - e^{-(x-2\pi)}\sin(x))$. Också $L^{-1}(\frac{1}{s^2+2s+2}) = e^{-x}\sin(x)$, så svaret är $u(x) = H(x-2\pi)\frac{1}{2}(1 - e^{-(x-2\pi)}\cos(x) - e^{-(x-2\pi)}\sin(x)) + e^{-x}\sin(x)$.

Många räknade istället med faltning, och det var en del som glömde H - det räknades som principfel.

Uppgift 4

Tre av randvilkorna är homogena. Separerar variablerna och behöller dem homogena randvilkor. $\Delta(X(x)Y(y)) = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$, så $X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y)$. Då VL beror ej på y och HL beror ej på x så är båda dem konstant. $X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y) = \lambda$. $X(0)Y(y) = 0$ för alla y, så om Y är ej trivial måste $X(0) = 0$. Likadant för $X(1) = 0$ och $Y(1) = 0$.

$X''(x) = \lambda X(x)$. I fall $\lambda = 0$, $X = Ax + B$, men $X(0) = 0$ medför $B = 0$ och $X(1) = A = 0$, så det finns bara triviall lösning. I fall $\lambda = a^2 > 0$, $X(x) = Ae^{ax} + Be^{-ax}$. Då $X(0) = 0$ ger $A = -B$, och $X(1) = A(e^a - e^{-a}) = 0$ medför $A = 0$, i.e. det finns bara triviall lösning. I fall $\lambda = -a^2 < 0$, $X(x) = A\sin(ax) + B\cos(ax)$. Randvilkor $X(0) = 0$ ger $B = 0$. Då $X(1) = A\sin(a) =$, medför $A = 0$ eller $\sin(a) = 0$, dvs. det finns icke-trivialla lösningar, omm $a = k\pi$. Sammanfattning: egenfunktioner $X(x) = \sin(k\pi x)$ vid egenvärden $\lambda = -(k\pi)^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Nu löser vi $-Y''(y)/Y(y) = -(k\pi)^2$. $Y''(y) = (k\pi)^2 Y(y)$ har lösningar $Y(Y) = Ce^{k\pi y} + De^{-k\pi y}$. Randvilkor $Y(1) = 0$ ger $Ce^{k\pi} + De^{-k\pi} = 0$, i.e. $D = -Ce^{2k\pi}$, så lösningar är $Y(y) = C(e^{k\pi y} - e^{-k\pi(y-2)})$.

$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)(e^{k\pi y} - e^{-k\pi(y-2)})$. Det återstår att välja C_n att passa på $u(x,0) = x - x^2$.

Ur BETA 13.1(7), ser vi att för $t \in [0,\pi]$ gäller $t(\pi - t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)t)$. Gör variabelsubstitution $t = \pi x$ - vi får $\pi x(\pi - \pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2k-1)^3} \sin((2k-1)\pi x)$, i.e. $x - x^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} \sin((2k-1)\pi x)$.

Vi ser att $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} \sin((2k-1)\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x)(1 - e^{n\pi 2})$. Då koefficienterna i sinusserierna med samma summa måste vara samma blir det $C_{2k} = 0$ och $C_{2k-1} = \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} 1/(1 - e^{2(2k-1)\pi})$.

Svar: $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^3(2k-1)^3} 1/(1 - e^{2(2k-1)\pi}) \sin(n\pi x)(e^{k\pi y} - e^{-k\pi(y-2)})$.

Uppgift 5

a) ur BETA 12.2 Laguerre's Recurrenceformler: $\frac{d}{dx}L_n^{(\alpha)}(x) = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}$. Ur BETA's L_1, L_2, L_3, L_4 man får då: $L_1^{(1)}(x) = 2 - x; L_3^{(1)}(x) = 3 - 3x + \frac{1}{2}x^2; L_3^{(1)}(x) = 4 - 6x + 2x^2 - \frac{1}{6}x^3$, i nyare version av BETA det finns L_5 som man kan använda likadant, i äldre kan man använda annan rekurensformel: $(n+1)L_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)L_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)L_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, vilken i våran fall ger:$L_4^{(1)} = (6+1+1-x)/4L_3^{(1)}(x) - L_2^{(1)}(x) = (2-\frac{x}{4})(-\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 6x + 4) - (\frac{1}{2}x^2 - 3x + 3) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x + 8 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 3 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{5}{6}x^3 + 5x^2 - 10x + 5$.

b) För vikten xe^{-1} på $[0, \infty)$ polynomer $\{L_n^{(1)}\}$ utgör en ortogonal bas. Då polynomer av grad 3 är linjäret hölje av $L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}$, den polynom som minimiserar $\int\limits_0^\infty (x^4 - P(x))^2 xe^{-1}dx$ är ortogonal projektion av x^4 på $span(L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)})$, dvs. om $x^4 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(1)}(x)$, är $P(x) = \sum\limits_{n=0}^{3} c_n L_n^{(1)}(x)$. Samtidigt $x^4 \in span(L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, L_2^{(1)}, L_3^{(1)}, L_4^{(1)})$, i.e. $x^4 = 24L_4^{(1)} + \sum\limits_{n=0}^{3} c_n L_n^{(1)}(x)$. Men då från a) vi ser att $P(x) = x^4 - 24L_4^{(1)} = 20x^3 - 120x^2 + 240x - 120$.

Det var många som räknade projektion genom att integrera och det är rätt om man klarar det (och glöler inte normera i uträkningen). Det var också en del som försökte använda L_n istället för $L_n^{(1)}$ - det är ett principfel och gav ingen poäng.

Uppgift 6

Vi gå r över till polära koordinater: $\frac{1}{9}u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$, $u_r(2, \theta, t) = 0$, $u(r, \theta, 0) = r^2 \sin^2(\theta)$.

Separerar variabler: $u = T(t)R(r)\Theta(\theta)$. $\frac{T''}{T} = \frac{R''}{R} + \frac{R'}{rR} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = \lambda$, då VL beror bara ej på r och θ och HL beror ej på t. $\frac{r^2R''}{R} + \frac{rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \mu$, då VL beror bara ej på θ och HL beror ej på r.

Betrakta Θ, den är 2π-periodisk, då vi har polära koordinater och $\Theta'' = -\mu\Theta$. Om $\mu < 0$, $\Theta(\theta) = C_1 e^{\sqrt{-\mu}\theta} + C_2 e^{-\sqrt{-\mu}\theta}$ vilket är ej 2π-periodisk annars än i den trivialla fall. Om $\mu = 0$ lösningarna är $\Theta(\theta) = C_1\theta + C_2$, av vilka

2π-periodisk bara konstant. Om $\mu > 0$ lösningarna är $\Theta(\theta) = C_1 \cos(\sqrt{\mu}\theta) + C_2 \sin(\sqrt{\mu}\theta)$, vilken är 2π periodisk omm $\sqrt{\mu} = n \in \mathbb{N}$. I.e. möjliga Θ är $\Theta(\theta) = C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta)$, där $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$.

Ekvationen för R och Θ nu ser som $\frac{r^2 R''}{R} + \frac{rR'}{R} - \lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = n^2$, i.e. $r^2 R'' + rR' - \lambda r^2 R - n^2 R = 0$. Om $\lambda > 0$ lösningarna är (BETA 12.4) $R(r) = AI_n(\sqrt{\lambda} r) + BK_n(\sqrt{\lambda} r)$. $B = 0$ då K_n är singulär i 0. I_n är sträng växande, så $R'(2) = A\sqrt{\lambda} I_n'(\sqrt{\lambda} 2) = 0$ har bara triviall lösning (*man kunde hantera detta fall genom att observera att $T(t)$ kan inte växa obegränsad när $t \to \infty$, av fysikalisk mening).* Om $\lambda = 0$ och $n \neq 0$, detta är Euler ekvation, med lösningarna $R(r) = Ar^n + Br^{-n}$. Den andra term är singulärt i origo, så $B = 0$. $R(r) = Ar^n$ passar inte till $R'(2) = 0$. Om $\lambda = n = 0$, $R(r) = A\ln(r) + B$ och $A = 0$ då $ln(r)$ är singulär i origo. Konstanten passar som en lösning.

Äntligen om $\lambda = -\sigma^2 < 0$ vi har en vanlig Bessel ekvation, så $R(r) = AJ_n(\sigma r) + BY_n(\sigma r)$, där $B = 0$ eftersom Y_n är singulär i origo. För att ha $R'(2) = 0$ måste 2σ vara ett nollställe till J_n'. *(Det var många som glömde derivatan på J_n, eller trodde den kan vara $J_{n\pm1}$, allt detta är fel.)* Om vi numrerar alla nollställen till J_n' som $\sigma_{n,k}$ får vi lösningar $R(r) = AJ_n(\frac{1}{2}\sigma_{n,k} r)$ till $\lambda = -\frac{1}{4}\sigma_{n,k}$.

Det sista är $T'/9T = \lambda$, som har lösningarna $T(t) = Ae^{-\frac{9}{4}\sigma_{n,k}^2 t}$ för $R(r) = AJ_n(\frac{1}{2}\sigma_{n,k} r)$, och konstant till $R(r) = konst$. *(Av mig okänd anledning många löste här istället $T''/9T = \lambda$, som beskriver vågekvation, och inte värmeledningekvationen.)*

Sammanfattning: $u(r, \theta, t) = C + \sum\limits_{k=1, n=0} J_n(\frac{1}{2}\sigma_{n,k} r)(A_{n,k} \cos(n\theta) + B_{n,k} \cos n\theta) e^{-\frac{9}{4}\sigma_{n,k}^2 t}$.

Vi hittar okända koefficienter från begynelsevilkor.

$r^2 \sin^2(\theta) = r^2 \frac{1-\cos(2\theta)}{2} = u(r, \theta, 0) = C + \sum\limits_{k=1, n=0} J_n(\frac{1}{2}\sigma_{n,k} r)(A_{n,k} \cos(n\theta) + B_{n,k} \cos n\theta)$. Koefficienterna framför sin/cos-utveckling bör vara entydliga, så $B_{n,k} = 0$ för alla n, k och $A_{n,k} = 0$ för $n \neq 0, 2$. *(En del glömde $n = 0$, vilket är fel.)*

Nu löser vi $\frac{1}{2}r^2 = C + \sum\limits_{k=1} A_{0,k} J_0(\frac{1}{2}\sigma_{0,k} r)$ och $\frac{1}{2}r^2 = \sum\limits_{k=1} A_{2,k} J_2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k} r)$. I båda fall funktionerna $\{1\} \cup \{J_(\frac{1}{2}\sigma_{0,k} r)\}$ och $\{J_2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k} r)\}$ är system av egenfunktioner till Sturm-Liouville problem (singulär, men vi vet att för denna problem allt fungerar som vanligt). Så dem utgör varje gång ortogonal system i L^2 med vikt r.

Alltså: $C = \int\limits_0^2 \frac{1}{2} r^2 1 r dr / \int\limits_0^2 1^2 r dr = \frac{1}{8} 2^4 / (\frac{1}{2} 2^2) = 1$.

$A_{0,k} = \int_0^2 \frac{1}{2}r^2 J_0(\frac{1}{2}\sigma_{0,k}r)rdr / \int_0^2 J_0^2(\frac{1}{2}\sigma_{0,k}r)rdr.$

$A_{2,k} = \int_0^2 \frac{1}{2}r^2 J_2(\frac{1}{2}\sigma_{0,k}r)rdr / \int_0^2 J_2^2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k}r)rdr.$

$\int_0^2 J_0^2(\frac{1}{2}\sigma_{0,k}r)rdr = \frac{2^2}{2}J_0'(\sigma_{0,k})^2 + \frac{2^2}{2}J_0(\sigma_{0,k})^2 = 2J_0(\sigma_{0,k})^2$ (extra formel).

$\int_0^2 J_2^2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k}r)rdr = \frac{2^2}{2}J_2'(\sigma_{2,k})^2 + \frac{2^2(\frac{\sigma_{2,k}}{2})^2-2^2}{2\sigma_{2,k}^2}J_2(\sigma_{2,k})^2 = \frac{(\sigma_{2,k}^2-4)}{2\sigma_{2,k}^2}J_2(\sigma_{2,k})^2$ (extra formel).

$\int_0^2 \frac{1}{2}r^2 J_2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k}r)rdr = \frac{1}{2(\frac{1}{2}\sigma_{2,k})^4}\int_0^{\sigma_{2,k}} x^3 J_2(x)dx = \frac{8}{\sigma_{2,k}^4}[x^3J_3(x)]_0^{\sigma_{2,k}} = \frac{8}{\sigma_{2,k}}J_3(\sigma_{2,k}).$

$\int_0^2 \frac{1}{2}r^2 J_0(\frac{1}{2}\sigma_{0,k}r)rdr = \frac{1}{2(\frac{1}{2}\sigma_{0,k})^4}\int_0^{\sigma_{0,k}} x^3 J_0(x)dx = \frac{8}{\sigma_{0,k}^4}([-x^3J_1(x)]_0^{\sigma_{0,k}} + \int_0^{\sigma_{0,k}} 3x^2J_1(x)dx) = -\frac{8}{\sigma_{0,k}}J_1(\sigma_{0,k}) + \frac{8}{\sigma_{0,k}^4}[3x^2J_2(x)]_0^{\sigma_{0,k}} = -\frac{8}{\sigma_{0,k}}J_1(\sigma_{0,k}) + \frac{24}{\sigma_{0,k}^2}J_2(\sigma_{0,k}).$

(I vissa upplaga av BETA kunde man hitta del av formler, då gällde det att hitta rätta formler eftersom σ var lösningar till $J_n' = 0$. Det var många som felaktigt har använd formler för nollställen till J_n.)

Uppgift 8

a) Solida harmoniker är homogena polynomer som uppfyller $\Delta P = 0$, och sfäriska harmoniker är deras restriktion på enhets sfären.

b) Den tänkta lösning har använd sats om solida harmoniker att varje homogen polynom av grad n kan skrivas som $P = P_n + |(x,y,z)|^2 P_{n-2} + \ldots$, där P_j är solida harmoniker av grad j. I vår fall blir alltså $P_3(x,y,z) = x^3 - (x^2+y^2+z^2)(Ax+By+Cz)$, där A, B, C är sådana att $\Delta P_3 = 0$. $\Delta P_3 = 6x - 10Ax - 10By - 10Cz$, så $B = C = 0$, $A = \frac{3}{5}$, och i restriktion på sfären $P_3 = x^3 - \frac{3}{5}x$.

En alternativ (kanske enklare) lösning: Mängd av sfäriska harmoniker är invariant mot rotationer, dvs. om vi roterar en sfärisk harmonik av given grad vi får igen en sfärisk harmonik av samma grad. Då kan vi införa sfäriska koordinater så att $x = r\cos(\theta)$. På sfären vill vi presentera $\cos^3(\theta)$ som linjär kombination av $\cos(m\phi)P_n^m(\cos(\theta))$ och $\sin(m\phi)P_n^m(\cos(\theta))$. Det är klart att vi ska använda $m = 0$, och $\cos(0\phi)P_n^0(\cos(\theta)) = P_n(\cos(\theta))$. Det är enkelt att inse att $\cos^3(\theta) = \frac{2}{5}P_3(\cos(\theta)) + \frac{3}{5}P_1(\cos(\theta))$. Och komponenten av grad 3 är $x^3 - \frac{3}{5}x$.