Hjälpmedel: Beta, Standard math. tables, typgodkänd räknedosa

MATEMATIK — Telefon: 0762-721860

Chalmers tekniska högskola — 2006–03–04 kl. 08.30–13.30

MVE030 Fourieranalys F2/Kf2, 4 p.; TMA132, 5p.

OBS! Ange namn, personnummer samt linje och inskrivningsår.

Skriv kurskoden på omslaget

1. Med hjälp av utveckling i Fourier-Bessel serie hitta en lösning $u(r, \theta, t)$ av randvärdeproblem för värmeekvationen

$$u_t = \Delta u$$

i cirkelskivan $r < 1$ med randvillkoret $u(1, \theta, 0) = \sin(2\theta)$ och begynnelsevillkoret $u(r, \theta, 0) = 0$. *Led: Efter förberdelsesteget sök lösningen som $s(r, t)\sin(2\theta)$ och använd Fouriermetoden till ekvationen för $s(r, t)$.*

2. Formulera satsen om den bästa approximationen. Hitta C_0, C_1, C_2 så att integralen $\int_0^1 |e^{3x} - C_0 - C_1e^x - C_2e^{2x}|^2 dx$ minimeras. *OBS!! Glöm inte om Gram-Schmidt!!*

3. Utveckla i en komplex Fourier serie på intervallet $(-\pi, \pi)$ funktionen $f(\theta) = 0, \theta < 0$, $f(\theta) = \theta^2, \theta \geq 0$. Vilken Fourierserie får man vid integrering av den serien? Hitta summan av kvadrater av absolutvärden av koefficienter i integrerade serien?

4. Lös med hjälp av utvecklingen i Fourier serie i egenfunktioner av ett passande Sturm-Liouville problem vågekvationen

$$u_{tt} = u_{xx} + 3u_x, 0 < x < 1, t > 0$$

med randvillkoren $u(0, t) = 0, u(1, t) = 1$ och begynnelsevillkoren $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$. (Tips: skriv $u_{xx} + 3u_x$ som $e^{-3x}(e^{3x}u_x)_x$ för att få S-L problemet och bestäma viktfunktionen.)

5. Låt $f(x) = (x^2+1)^{-1}e^{ix} + 2x^{-1}\sin(2x)$. Hitta med hjälp av Fouriertransform $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-5ix}dx$.

6. Bestäm en lösning $y(x)$ med perioden 5 av ekvationen $y'' - y' + 3y = f(x)$ där $f(x) = 0, 0 < x < 1$, $f(x) = e^x, 1 \leq x \leq 5$ och $f(x)$ är periodisk med perioden 5.
   ALTERNATIVT FÖR TMA132 Hitta en harmonisk funktion i halvbandet $x > 1, 0 < y < 1$, med randvärdena $u(1, y) = 0$, $u(x, 0) = 2, 1 < x < 4; u(x, 0) = 4, x > 4; u(x, 1) = -1$.

7. Berätta så mycket du kan om linjära dynamiska system, deras egenskaper, karakteristiker och Fouriertransformationsbaserade analysmetoder. Ge exempel.

8. Ge definition av Legendrepolynomer, formulera huvudegenskaper, beskriv var de används, och bevisa ortogonalitet.
   ALTERNATIVT FÖR TMA132 Konformavbildningar och ström. Nivåkurvor.

Varje uppgift kan ge max. 8 p. Skrivningen beräknas färdigrättas måndagen, den 15. mars. Lösningsförslag publiceras på kursens webbsida 5. mars.

G.Rozenblioum

Lösningar 2006-03-04
MVE030 / TMA 132 Fourieranalys F/Kf

1. Randvillkoren är ohomogena, därför krävs förberedelsesteget:
$v(r,\theta,t)$: $v(1,\theta,t) = \sin 2\theta$. tar $v(r,\theta,t) = r^2 \sin 2\theta$
~~och~~ $u = v + w$. För w får ekvationen

$$\begin{cases} w_t = \Delta w + \Delta v = w_{rr} + r^{-1} w_r + r^{-2} w_{\theta\theta} + 2\sin 2\theta \\ \quad + 2\sin 2\theta - 4\sin 2\theta = w_{rr} + r^{-1} w + r^{-2} w_{\theta\theta}; \\ w(r,\theta,0) = -r^2 \sin(2\theta); \; w(1,\theta,t) = 0 \end{cases}$$

Söker lösningen som $w(r,\theta,t) = S(r,t)\sin 2\theta$.
Sätter in i ekvationen och förkortar med $\sin 2\theta$:

$$\begin{cases} S_t = S_{rr} + r^{-1} S_r - 4S \\ S(r,0) = -r^2, \quad S(1,t) = 0 \end{cases}$$

Delar variabler: $S(r,t) = R(r)\,T(t)$:

$$\frac{T'}{T} = \frac{R_{rr} + r^{-1} R_r - 4 R r^{-2}}{R} = -\mu^2$$

för R får vi S-L problemet
$$R_{rr} + r^{-1} R_r - 4 r^{-2} R + \mu^2 R = 0 \; ; \; R(1) = 0$$
Det är Besselekvation med $\nu = 2$.
Egenfunktioner är $R_n(r) = J_2(\lambda_n r)$,
λ_n är nollställen av J_2. Normer är

$\| R_n(r) \|_w^2 = \frac{1}{2} J_3(\lambda_n)$. Egenvärden är
$\mu_n^2 = \lambda_n^2$.

Söker lösningen till problemet som

$$S(r,t) = \sum T_n(t) R_n(r)$$

Sätter in i ekvationen och begynnelsevillkoren; efter multiplikation med $R_m(r)r$ och integrering:

$$T_m'(t) + \mu_m T_m(t) = 0;$$

$$T_m(0) = \frac{-1}{\|R_m(r)\|_w^2} \int_0^1 r^2 J_2(\lambda_m r) r\,dr$$

$$= \frac{-2}{J_3(\lambda_m)} \cdot \lambda_m^{-4} \int_0^{\lambda_m} s^3 J_2(s)\,ds =$$

$$\frac{-2}{\lambda_m^4 J_3(\lambda_m)} \int_0^{\lambda_m} \left(s^3 J_3(s)\right)' ds = \frac{-2}{\lambda_m}.$$

Samlar det hela:

$$u(r,\theta,t) = r^2 \sin 2\theta + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m t} \cdot \frac{-2}{\lambda_m} J_2(\lambda_m r) \times \sin 2\theta.$$

2. funktioner $1, e^x, e^{2x}$ är inte ortogonala, därför måste man ortogonalisera dem meg Gram-Schmidt. med vikten 1, på intervallet $(0,1)$.

$f_0 = 1, \quad f_1 = e^x, \quad f_2 = e^{2x};$

$$g_0 = \frac{f_0}{\|f_0\|} = 1; \quad g_1 = \frac{f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0}{\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\|}$$

$$\langle f_1, g_0\rangle = \int_0^1 e^x\,dx = e-1 \approx 1.71$$

$$f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0 = e^x - e + 1 \approx e^x - 1.71$$

$$\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\|^2 = \int_0^1 (e^x - (e-1))^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(e^2-1) - (e-1)^2 = \frac{1}{2}(3-e)(e-1) = 0.27$$

$$\|f_1 - \langle f_1, g_0\rangle g_0\| = \sqrt{0.27} = 0.52$$

$$g_1 = 1.91\,e^x - 3.26;$$

$$g_2 = \frac{f_2 - \langle f_2, g_0\rangle g_0 - \langle f_2, g_1\rangle g_1}{\|f_2 - \langle f_2, g_0\rangle g_0 - \langle f_2, g_1\rangle g_1\|}$$

$$= \frac{e^{2x} - 3.19 - 1.26\,(1.91e^x - 3.26)}{\|e^{2x} - 3.19 - 1.26\,(1.91e^x - 3.26)\|}$$

$$= \frac{e^{2x} - 2.41e^x + 0.92}{\|e^{2x} - 2.41e^x + 0.92\|^2} = 0.83e^{2x} - 2e^x + 0.76$$

Beräknar F-koefficienter:

$$\langle e^{3x}, g_0\rangle = \int_0^1 e^{3x}\,dx = 6.36$$

$$\langle e^{3x}, g_1\rangle = \int_0^1 \left(e^{4x}\cdot 1.91 - 3.26\, e^{3x}\right) dx$$

$$= 1.91\ \frac{e^4-1}{4} - 3.26\ \frac{e^3-1}{3} = 4.91$$

$$\langle e^{3x}, g_2\rangle = \int_0^1 0.83 e^{5x} - 2\, e^{4x} + 0.76 e^{3x}\, dx$$

$$= 0.83\ \frac{e^5-1}{5} - 2\ \frac{e^4-1}{4} + 0.76\ \frac{e^3-1}{3} = 2.5$$

Svar: approximerande funktionen är

$$c_0 + c_1 e^x + c_2 e^{2x} = 6.26 + 4.91(1.91 e^x - 3.26)$$
$$+ 2.5(0.83\, e^{2x} - 2e^x + 0.7).$$

3. Utvecklingen har formen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \theta^2 e^{-in\theta} d\theta$$

Efter 2 partiellintegreringar, får man

$$C_0 = \frac{\pi^2}{6}$$

$$C_n = \frac{2}{n^2}(-1)^n + i\left(\frac{\pi}{2n}(-1)^n \cancel{+} \frac{1}{\pi n^3}\left((-1)^n - 1\right)\right).$$

Efter integreringen får man F-serie

för $F(\cancel{\theta}) = \int_0^{\cancel{\theta}} \varphi^2 d\varphi$, $\theta > 0$, $F(\theta) = \frac{\theta^3}{3}$

$$F(\theta) = 0, \quad \theta < 0$$

Eftersom $c_0 = \frac{\pi^2}{6} \neq 0$, blir integrerade serie:

$$\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{6}\theta = C_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{in}\left(\frac{2}{n^2}(-1)^n\right)$$

$$+ \left(\frac{\pi}{2n^2}(-1)^n - \frac{1}{\pi n^4}\left((-1)^n - 1\right)\right)$$

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2}{6}\theta\right)d\theta = \frac{\pi^3}{72}.$$

Enligt Parceval,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\theta^3}{3} - \frac{\pi^2\theta}{6}\right)^2 d\theta = 2\pi\left(|C_0|^2 + \sum_{n \neq 0}|C_n|^2\right) =$$

$$= 2\pi \cdot \left(\frac{\pi^3}{72}\right)^2 + 2\pi \sum \frac{4}{n^6} + 2\pi \sum \cdot$$

$$\left(\frac{\pi}{2n^2}(-1)^n + \frac{1}{\pi n^4}\left((-1)^n - 1\right)\right)^2 .$$

4. Förberedelsesteget:
$v(0,t)=0$, $v(1,t)=1$, tar $v(x,t)=x$.
Ekvationen transformeras till: $u=v+w$

$$w_{tt}=w_{xx}+3w+3$$
$$w(0,t)=w(1,t)=0\ ,\ w(x,0)=-x\ ;\ w_t(x,0)=0$$

Söker S-L problemet för X efter variabelseparat.
$w(x,t)=X(x)T(t)$.

$$X''+3X'+\lambda X=0,\quad X(0)=X(1)=0$$

Det är inte S-L problemet. ~~Kapunkt~~ ~~ekv.~~
Vi transformerar till

$$(e^{3x}X')'+e^{3x}\lambda X=0\ ;$$ SL problem med vikten e^{3x}.

Söker egenfunktioner. Kapunkt. ekvationen
är $k^2+3k+\lambda$, $k_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{9-4\lambda}}{2}$.

Allmäna lösningen $X(x)=Pe^{k_1x}+Qe^{k_2x}$, som är

bekvämt att skriva som

$$X(x)=e^{-3/2x}\left(A\sin\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}x+B\cos\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}x\right)$$

sätter in i randvillkoren och får $B=0$,

$$\frac{\sqrt{4\lambda-9}}{2}=n\pi,\quad n=1,2,\ldots$$

$$\lambda_n=n^2\pi^2+\frac{9}{4}$$

$X_n=A\sin(n\pi x)e^{-\frac{3}{2}x}$, A hittar vi

ur normaliserinsvillkoren: $\int_0^1 X^2e^{3x}dx=1$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$X_n=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3x}{2}}\sin(n\pi x).$$

Söker lösningen i formen av F-serie

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\, X_n(x).$$

Sätter in i ekvationen och använder S-L problemet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n'' + \lambda_n T_n\right) X_n(x) = 3$$

multiplicerar med $X_m(x)\, e^{3x}$ och integrerar:

$$\left(T_m'' + \lambda_m T_m\right) = 3 \int_0^1 X_m(x) e^{3x}\, dx .$$

betecknar ~~..~~ uttrycket till höger med C_m.

Begynnelsevillkoren för T-ekv. får ur begynnelsevillkoren för w:

$$\sum_1 T_n(0) X_n(x) = -x \Rightarrow T_m(0) = -\int_0^1 X_n(x)\, x\, dx = D_n.$$

$$\sum_1^{\infty} T_n'(0) X_n(x) = 0 \Rightarrow T_m'(0) = 0.$$

~~...~~ Lösningen till ekvationen

$$T_m'' + \lambda_m T_m = C_m \; ; \; T_m(0) = D_m , \; T_m'(0) = 0$$

Allm. lösningen till homogena ekv.

$$T_m = A \sin\sqrt{\lambda_m}\, t + B \cos\sqrt{\lambda_m}\, t$$

Partikul. lösningen för ohomogena ekv. (höger leden t-oberoende)

$$T_{m,\text{part.}} = -\frac{C_m}{\lambda_m}.$$ Anpassar koeff. A, B för att uppfylla ~~...~~ begynnelsevillk: $A = 0$,

$$B = D_m - \frac{C_m}{\lambda_m}.$$ Sätter in i formeln för $w(x,t)$ och lägger till $v(x,t)$.

5. Beräknar F-transform av $f(x)$.

$$\mathcal{F}\left((x^2+1)^{-1}\right) = e^{-|\xi|}$$

$$\mathcal{F}\left((x^2+1)^{-1}e^{ix}\right) = e^{-|\xi-1|}$$

$$\mathcal{F}\left(2x^{-1}\sin(2x)\right) = 2\pi\,\chi_2(\xi) = \begin{cases} 2\pi, & |\xi|<2 \\ 0, & |\xi|>2 \end{cases}$$

Använder Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{-|\xi-1|} + 2\pi\,\chi_2(\xi)\right|^2 dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|\xi-1|} d\xi + \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot 2\pi \int_{-2}^{2} e^{-|\xi-1|} d\xi + 4\pi\int_{-2}^{2} d\xi =$$

$$\frac{1}{\pi} + 2\left(e^{3}+e-2\right) + 4\pi.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-5ix}dx = \hat{f}(5) = e^{-4}.$$

6. ~~Vi använder F~~

Vi söker y som en F-serie med perioden 5:

$$y(x) = \sum c_n e^{inx\frac{2\pi}{5}}$$

Sätter in i ekvationen:

$$\sum \left(c_n \left(in\frac{2\pi}{5} \right)^2 - c_n \left(in\frac{2\pi}{5} \right) + 3c_n \right) e^{inx\frac{2\pi}{5}}$$

$$= f(x).$$

Det betyder att talen $c_n\left(-n^2\frac{4\pi^2}{25}+3-in\frac{2\pi}{5}\right)$ är F-koeff. av $f(x)$, därför är de lika med

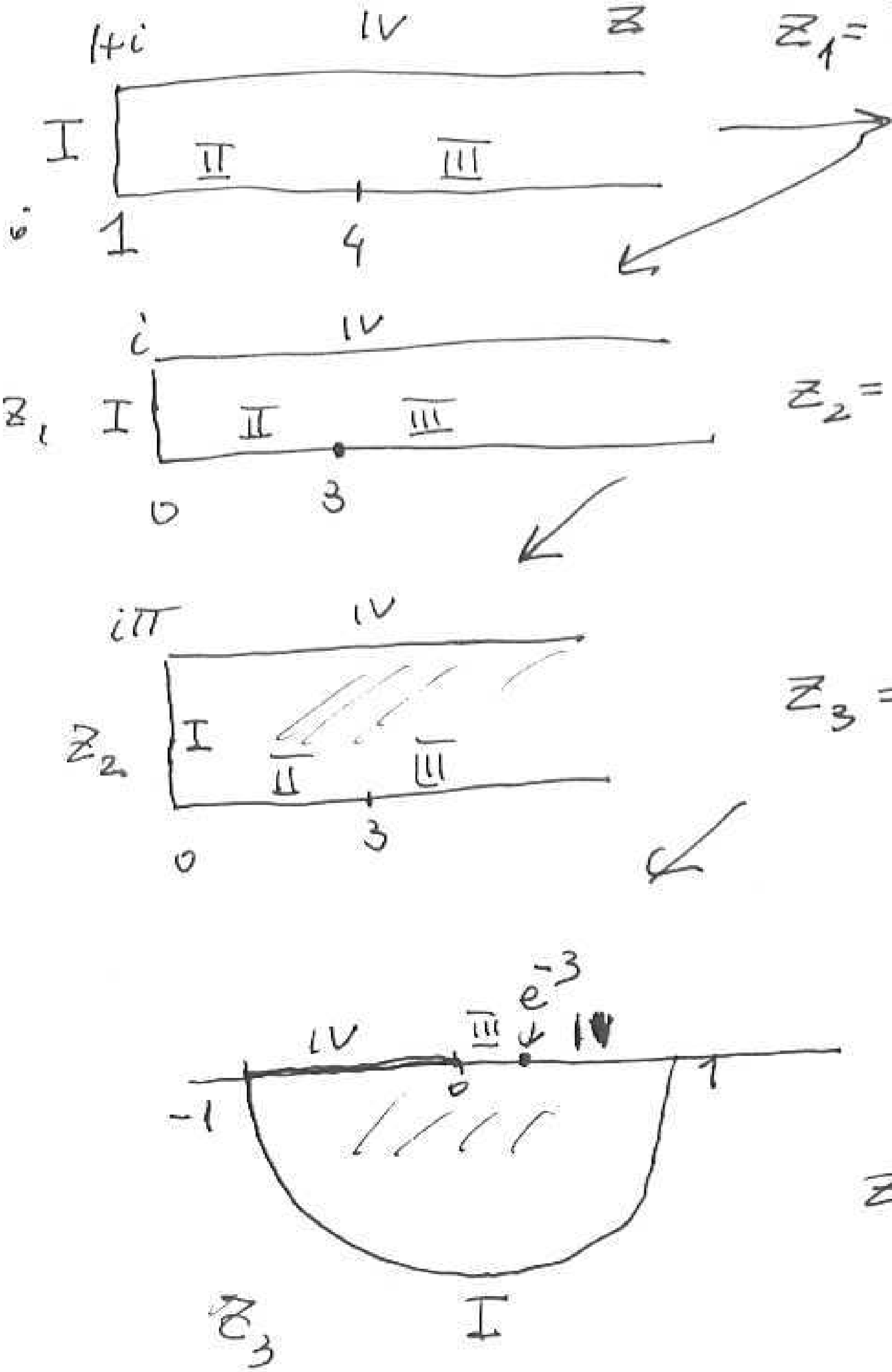
$$\frac{1}{5}\int_0^5 f(x)\, e^{-inx\frac{2\pi}{5}}\, dx =$$

$$\frac{1}{5}\int_1^5 e^x e^{-inx\frac{2\pi}{5}} dx = \frac{1}{5}\frac{\left(e^5 - e^{1-in\frac{2\pi}{5}}\right)}{1-i\frac{2\pi}{5}} = d_n$$

$$c_n = \frac{d_n}{-n^2\cdot\frac{4\pi^2}{25}+3-in\frac{2\pi}{5}},$$

6 (TMA 132)

Vi gör en konformavbildning av halvbandet på övre halvplanet. Vi måste anmärka vad som händer med 4 delar av gränsen där randvillkoren är angivna.



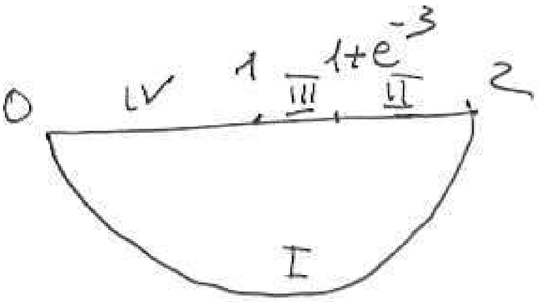
$z_1 = z_2 - 1$

$z_2 = \pi z_1$

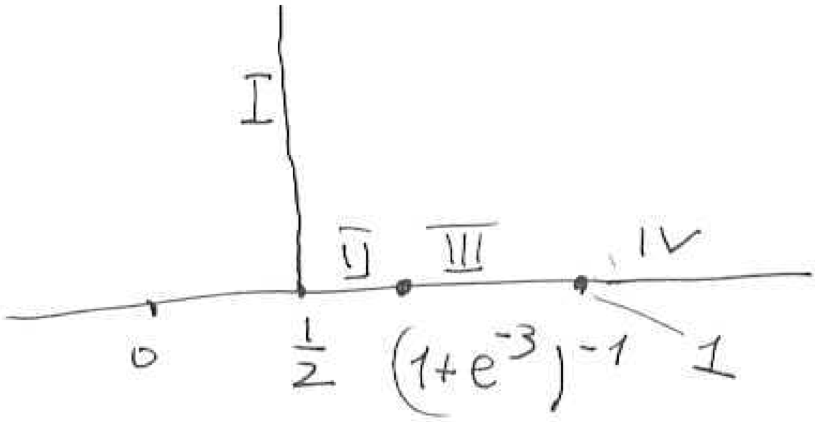
$z_3 = e^{-z_2}$

$z_4 = z_3 + 1$

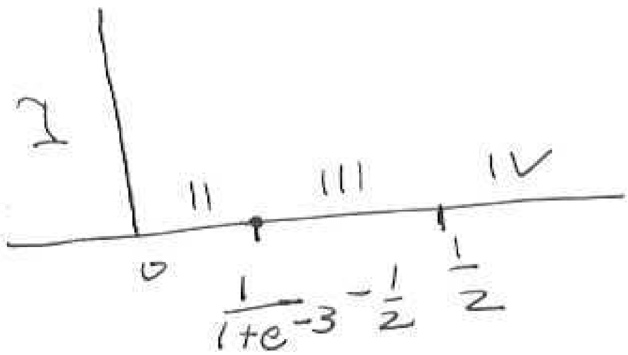
z_4



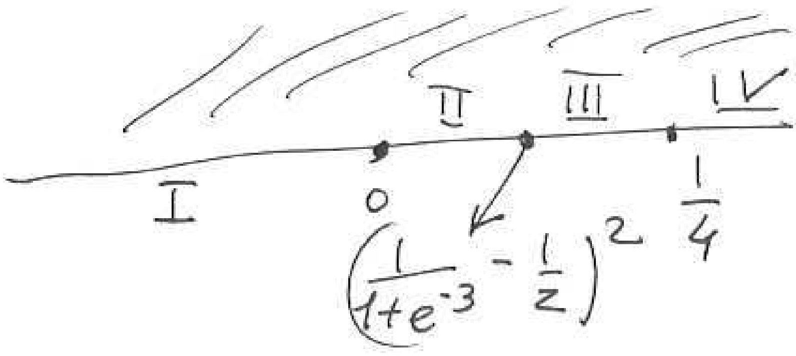
$\to z_5 = \frac{1}{z_4}$



$\to z_6 = z_5 - \frac{1}{2}$



$w = z_6^2$



betecnar

$$\left(\frac{1}{1+e^{3}} - \frac{1}{2}\right)^2 = \rho$$

Söker lösningen i formen

$$V(w) = A\arg(w) + B\arg(w-p) + C\arg(w-\tfrac{1}{4}) + D$$

På intervall I;

$$\pi(A+B+C+D) = 0$$

På intervall II:

$$\pi(B+C+D) = 2$$

på intervall III

$$\pi(C+D) = 4$$

på intervall 4

$$\pi D = -1$$

Löser systemet.

$$D = -\frac{1}{\pi}$$

$$C = \frac{5}{\pi}$$

$$B = -\frac{2}{\pi}$$

$$A = -\frac{2}{\pi}$$

Svar:

$$u(z) = v(w(z))$$

$w(z)$ är komposition av alla konforma delavbildningar!

$$w = z_6^2 = \left(z_5 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{z_4} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{z_3+1} - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{e^{-z_2}+1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^{-\pi(z-1)}} - \frac{1}{2}\right)^2.$$