Satser och bevis i Fourieranalys

Rasmus Andersson

March 18, 2015

Förord

Detta är en sammanställning, så som jag själv finner pedagogiskt, av alla satser och bevis på Marias lista för kursen som den gavs vt 2015. Där finns säkert tryckfel och felaktiga formuleringar här och där men i stort sett ska det nog stämma. Mina bevis är lite mindre koncisa än dem i boken och på pingpong eftersom jag själv tycker det är lättare att lära sig något om man får mycket kött på benen. Förhoppningsvis kan du som hittat det här dokumentet ha nytta av det om du som jag inte tycker om tjocka böcker eller hyperkondenserade bevis där man blir hänvisad till att "enkelt inse" hur man tar sig mellan alla mellansteg.

1 Konvergens av Fourierserier för kontinuitetspunkter

Sats *Låt $f(x)$ vara 2π-periodisk styckvis kontinuerlig och styckvis glatt funktion. Då konvergerar Fourierserien till funktionsvärdet i alla punkter.*

Bevis Fourierserien för $f(x)$ definieras enligt:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

där c_n ges av:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

Definiera delsumman av ordning N för Fourierserien av f som

$$S_N^f(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$$

Satsen är bevisad om det visas att

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} [S_N^f(x) - f(x)] = 0 \quad \forall x$$

Sätt in definitionen av c_n i uttrycket för delsumman.

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-N}^{N} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \right) e^{inx}$$

Eftersom summan har ett ändligt antal termer av ändlig storlek finns det inget hinder mot att byta ordning på summation och integration. Detta ger:

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{-N}^{N} e^{in(x-t)} dt$$

där $D_N(x) \equiv \sum_{-N}^{N} e^{inx}$ definieras som *Dirichlet-kärnan* och kan skrivas på sluten form genom geometrisk serieutveckling.

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{-N}^{N} e^{ixn} \\
&= e^{-ixN} + e^{-ix(N-1)} + ... + e^{-ix} + 1 + e^{ix} + ... + e^{ix(N-1)} + e^{ixN} \\
&= e^{-ixN}(1 + e^{ix} + ... + e^{ix2N}) \\
&= e^{-ixN} \sum_{0}^{2N} e^{ixn}
\end{aligned}$$

Summan i högerledet är också en geometrisk summa och kan förenklas:

$$\begin{aligned}
\sum_{0}^{2N} e^{ixn} &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{ix2N} \\
&= 1 + e^{ix}(1 + e^{ix} + ... + e^{ix(2N-1)}) \\
&= 1 + e^{ix} \left(\sum_{0}^{2N} e^{ixn} - e^{ix2N} \right) \\
&= \frac{1 - e^{ix(2N+1)}}{1 - e^{ix}}
\end{aligned}$$

så att

$$D_N(x) = \frac{e^{-ixN} - e^{ix(N+1)}}{1 - e^{ix}} = \frac{\sin(N + 1/2)x}{\sin(x/2)}$$

där det sista steget inses genom att dividera täljare och nämnare med $e^{-ix/2}$ och använda definitionen av sinus. I sista ledet ses enkelt att Dirichlet-kärnan är 2π-periodisk och jämn. Det är dock mellanledet som kommer att vara till mest användning i beviset. Notera också att integralen över alla intervall med längd 2π för $D_N(x)$ är 2π. Det inses enklast via definitionen av Dirichlet-kärnan, där det framgår att den enda termen som ger ett bidrag är 1, dvs termen av ordning noll, vilken är trivial att integrera. Alla komplexa exponentialfunktioner i summan löper ett helt antal perioder på alla intervall av längd 2π och för såväl real- som imaginärdelarna gäller att de har lika positiva och negativa bidrag över en period och därför integreras till noll.

Delsumman $S_N^f(x)$ kan nu skrivas

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_N(t-x)dt$$

Variabelsubstitutionen $u = t - x$ ger

$$S_N^f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)D_N(u)du$$

Det är nu möjligt att skriva upp skillnaden mellan delsumman och funktionsvärdet på ett konstruktivt sätt. Notera först att

$$f(x) = f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(u)du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)D_N(u)du$$

vilket ger:

$$\begin{aligned} S_N^f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+u) - f(x)\right) D_N(u)du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+u) - f(x)}{1 - e^{ix}}(e^{-ixN} - e^{ix(N+1)})dt \end{aligned}$$

Detta uttryck känns igen som differensen mellan Fourierkoefficienterna av ordning N och $-(N+1)$ för en Fourierserieutveckling av funktionen

$$g_x(u) = \frac{f(x+u) - f(x)}{1 - e^{ix}}$$

dvs

$$S_N^f(x) - f(x) = \tilde{c}_N - \tilde{c}_{-(N+1)}$$

där $\tilde{c}_n$ betecknar Fourierkoefficienterna för $g_x(u)$.

Om denna funktion är integrerbar gäller enligt Riemann-Lebesgues lemma till Bessels olikhet att $c_N \to 0$ då $N \to \pm\infty$ och satsen är därmed visad eftersom uttrycket går mot noll. $f(x)$ är enligt förutsättningarna styckvis kontinuerlig och deriverbar på hela reella linjen, eftersom den är periodisk med 2π och styckvis kontinuerlig och deriverbar på det intervallet vilket även garanterar att ändpunkterna ej är singulära. Nämnaren är deriverbar överallt och kontinuerlig överallt utom eventuellt i punkten $x = 0$ där den har en singularitet. Dock är derivatan för hela funktionen väldefinierad överallt, så l'Hospitals regel kan användas:

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g_x(u) = i(f'(u) - f'(0))$$

vilket är ändligt. $g_x(u)$ är alltså styckvis kontinuerlig och deriverbar och satsen är därmed bevisad.

2 Derivering av Fourierserier

Sats *Låt $f(x)$ vara en styckvis glatt 2π-periodisk funktion med Fourierutveckling:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

Då gäller att

$$f'(x) = \sum_1^{\infty}(nb_n \cos nx - na_n \sin nx) = \sum_{-\infty}^{\infty} inc_n e^{inx}$$

dvs derivatan av en Fourierserie ges av en serie på samma form med

$$\begin{aligned} a_0' &= 0, \\ a_n' &= nb_n, \\ b_n' &= -na_n, \\ c_n' &= inc_n \end{aligned}$$

Bevis Skriv upp definitionen av Fourierkoefficienterna för derivatan och integrera partiellt. För $a \neq 0$ gäller:

$$\begin{aligned} a_n' &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[f(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-\sin nx)dx \\ &= n\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \\ &= nb_n \end{aligned}$$

Beviset för de andra koefficienterna är helt analogt.

3 Integrering av Fourierserier

Sats *Antag att f(x) är en styckvis glatt funktion som bestäms av sina Fourierkoefficienter a_n och b_n och c_n. Då gäller för $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ att:*

$$\begin{aligned} F(x) - \frac{a_0 x}{2} &= \frac{A_0}{2} + \sum_0^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx) \\ F(x) - c_n x &= C_0 + \sum_{n\neq 0} C_n e^{inx} \end{aligned}$$

där $C_n = \frac{c_n}{in}$, $A_n = -\frac{b_n}{n}$ och $b_n = \frac{a_n}{n}$ för $n \neq 0$. C_0 och A_0 är de konstanta termerna för integralens Fourierutveckling, $C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx$.

Med andra ord är integralens Fourierserie precis vad man får genom att integrera termvis förutom att det dyker upp en linjär term från integrering av f:s konstanta term, och man får istället en ny konstant term i form av en integrationskonstant.

Bevis Beviset är rättframt och bygger helt enkelt på att formellt integrera $f(x)$:s Fourierserie. Vissa steg är bara tillåtna om $F(x)$ har en konvergent Fourierserie. Men F är kontinuerlig och styckvis glatt eftersom den är primitiv funktion till en styckvis glatt funktion och sålunda konvergerar dess Fourierserie enligt konvergenssatsen. På trigonometrisk form fås:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_0^x f(t)dt \\
&= \int\limits_0^x \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt \right) dt \\
&= \frac{a_0 x}{2} + \int\limits_0^x \sum_1^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt
\end{aligned}
$$

Eftersom Fourierserien konvergerar är det ok att byta ordning på integral och summa och vi får:

$$
\begin{aligned}
F(x) - \frac{a_0 x}{2} &= \sum_1^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{a_n}{n} \sin nt \right]_0^x \\
&= \sum_1^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_1^{\infty} \left(-\frac{b_n}{n} \cos nx + \frac{a_n}{n} \sin nx \right) \\
&= \frac{A_0}{2} + \sum_1^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)
\end{aligned}
$$

där koefficienterna för ordning $n \neq 0$ är skrivna på den form de definierats på i satsen. A_0 är dock skriven på en något annorlunda form, men vi ser att den är den enda termen som ger ett bidrag till medelvärdet för serieutvecklingen eftersom de andra är periodiska symmetriskt kring värdet noll. Därmed kan den automatiskt skrivas om på formen givits i formuleringen av satsen. På exponentialform gäller:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int\limits_0^x f(t)dt \\
&= \int\limits_0^x \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} dt \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} \int_0^x c_n e^{int} dt \\
&= \int_0^x c_n dt + \sum_{n\neq 0} \int_0^x c_n e^{int} dt \\
&= c_0 x + \sum_{n\neq 0} \left[\frac{c_n}{in} e^{int}\right]_0^x \\
&= c_0 x - \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} + \sum_{n\neq 0} \frac{c_n}{in} e^{inx}
\end{aligned}
$$

vilket analogt med ovan kan skrivas om som:

$$F(x) - c_0 x = C_0 + \sum_{n\neq 0} C_n e^{inx}$$

4 Approximativ identitet för faltning

Sats *Låt* $f(x)$ vara en kontinuerlig och begränsad funktion definierad på hela $\mathbb{R}$. Låt $g(x) \in \mathbb{R}$ vara sådan att $\int_{\mathbb{R}} g(t)dt = 1$ och definiera g:s *approximativa etta* som $g_\epsilon = \epsilon^{-1} g(x/\epsilon)$, dvs komprimerad i x-led och utsträckt i y-led så att integralen över hela linjen blir oförändrad.

Då gäller att $f * g_\epsilon(x) \to f(x)$ likformigt då $\epsilon \to 0$.

Bevis

$$|f * g_\epsilon(x) - f(x)| = \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) g_\epsilon(x-t)dt - f(x) \right|$$

$f(x)$ kan skrivas om med hjälp av vad vi vet om integralen av $g_\epsilon(x)$:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= f(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x-t)dt \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) g_\epsilon(x-t)dt
\end{aligned}
$$

vilket ger

$$|f * g_\epsilon(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(x)]\, g_\epsilon(x-t) dt \right|$$

Cauchy-Schwarz olikhet ger:

$$|f * g_\epsilon(x) - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(x)|\, |g_\epsilon(x-t)|\, dt$$

Dela nu upp integralen i två delar, en i en omgivning till x, och den andra över resten av intervallet till höger och vänster. Målet är att visa att om intervallet kring x väljs på ett lämpligt sätt går båda integralerna mot noll då ϵ blir tillräckligt litet. Den ena därför att f är kontinuerlig så att skillnaden mellan $f(x)$ och $f(x \pm \gamma)$ försvinner för tillräckligt litet γ. Den andra för att givet att $|g_\epsilon(x)|$ är absolut integrerbar måste den gå mot noll då avståndet från x är tillräckligt stort åt båda håll.

Börja med integralen kring x. Eftersom $f(x)$ är kontinuerlig gäller för varje δ att vi kan välja ett γ så att:

$$\int_{x-\gamma}^{x+\gamma} |f(t) - f(x)|\, |g_\epsilon(x-t)| dt \leq \delta$$

dvs om γ är tillräckligt liten kommer denna integral gå mot noll. Vidare har vi för den ena halvan av resterande integral:

$$\int_{x+\gamma}^{\infty} |f(t) - f(x)|\, |g_\epsilon(x-t)| dt \leq 2M \int_{x+\gamma}^{\infty} |g_\epsilon(x-t)| dt$$

där $M = \sup f(x)$, vilket är ett ändligt tal eftersom f är begränsad. Beviset är slutfört om det kan visas att återstoden av integralen går mot noll då epsilon går mot noll.

$$\int_{x+\gamma}^{\infty} |g_\epsilon(x-t)| dt = \frac{1}{\epsilon} \int_{x+\gamma}^{\infty} \left| g\left(\frac{x-t}{\epsilon}\right) \right| dt = \int_{-\infty}^{-\gamma/\epsilon} |g(u)|\, du$$

där variabelsubstitutionen $u = (x-t)/\epsilon$ har gjorts i sista ledet. Om $\epsilon \to 0$ går den övre integrationsgränsen mot $-\infty$. Eftersom $g(x) \in L^1$ (dvs absolut integrerbar) måste dess värden gå mot noll för stora avvikelser från origo.

Detta medför att vi alltid kan välja ett ϵ så att integralen blir godtyckligt liten.

För integralen mellan $-\infty$ och $x-\gamma$ är beviset analogt.

Sammanfattningsvis kan vi alltid välja ett γ så att den första integralen blir mindre än varje δ. Eftersom f är kontinuerlig och begränsad har derivatan ett ändligt supremum. Detta medför att ett γ kan väljas som är litet nog för varje x på reella tallinjen. Det går sedan alltid att välja ett ϵ så att återstoden av integralen är godtyckligt liten. Eftersom sista ledet i integralen ovan är oberoende av x följer att konvergensen är likformig. Hela satsen är därmed bevisad.

5 Weierstrass approximationssats

Sats *Låt $f(x)$ vara en styckvis kontinuerlig funktion på intervallet $[a,b]$. Låt $g(x)=(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2}$ och $g_\epsilon(x)=\epsilon^{-1}g(x/\epsilon)$. Då gäller att $f(x)$ kan approximeras godtyckligt noga på $[a,b]$ av ett polynom, då tillräckligt många termer används.*

Bevis Förläng på godtyckligt sätt $f(x)$ till hela tallinjen. Vi väljer här att förlänga den så att den går till noll på avståndet 1 till vänster om a och höger om b och vara noll för resten av reella tallinjen. För den förlängda versionen gäller stasen om approximativ etta (generaliserad till att hantera diskreta diskontinuitetspunkter), så att för godtyckligt valt δ:

$$|f*g_\epsilon(x)-f(x)|<\frac{\delta}{2}$$

om ϵ väljs tillräckligt litet. Detta utvecklas:

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\left|\int_{a-1}^{b+1}[f(y)-f(x)]e^{-(x-y)^2/\epsilon^2}dy\right|<\frac{\delta}{2}$$

$e^{-(x-y)^2/\epsilon^2}$ kan utvecklas i en Taylorserie kring y m.a.p. x:

$$\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}e^{-(x-y)^2/\epsilon^2}=\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-y)^{2n}}{n!\,\epsilon^{2n}}$$

Definiera n:te ordningens approximation av f:

$$P_N(x)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}}\int_{a-1}^{b+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n(x-y)^{2n}}{n!\,\epsilon^{2n}}f(y)dy$$

Eftersom Taylorutvecklingar konvergerar likformigt mot funktionerna de approximerar fås nu att för tillräckligt stort N:

$$|f(x) - P_N(x)| < \delta$$

för det δ vi valt. En binomialutveckling av $(x-y)^{2n}$ ger nu:

$$\begin{aligned}
P_N(x) &= \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a-1}^{b+1} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^n}{n!\,\epsilon^{2n}} \frac{n!\,x^{n-k}(-y)^k}{k!\,(n-k)!} \\
&= \frac{1}{\epsilon\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^n x^{n-k}}{\epsilon^{2n} k!\,(n-k)!} \int\limits_{a-1}^{b+1} (-y)^k f(y) dy
\end{aligned}$$

Detta är ett polynom av ordning $2N$ alltså är satsen visad.

6 Fouriers inversionsformel

Sats *Definiera Fouriertransformen av en L^1 (absolut integrerbar) och styckvis kontinuerlig funktion $f(x)$ som $\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$ (definierad som aritmetiskt medelvärde mellan vänster- och högergränsvärde i diskontinuitetspunkter). Då ges den inversa Fouriertransformen av*

$$f(x) \;= \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\xi)] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

Bevis Den uppenbara approachen vore att beräkna

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right) e^{i\xi x} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i\xi(x-y)} dy d\xi
\end{aligned}$$

och byta integrationsordning för att komma fram till resultatet. Tyvärr är det inte tillåtet att byta ordning på integralerna eftersom integralen $\int e^{i\xi(x-y)} d\xi$ divergerar. Detta problem kringgås genom att evaluera integralen efter att först multiplicera integranden med en viktfunktion som snabbt avtar för stora ξ. Välj $e^{-\epsilon^2\xi^2/2}$ där ϵ är in fri parameter. Detta val är naturligtvis inte så godtyckligt som det ser ut vid första anblicken, utan vi vill välja viktfunktion så att dess inversa Fouriertransform blir en normerad Gaussisk funktion. Det ursprungliga fallet återfås för $\epsilon = 0$. Vi får:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2\xi^2/2}\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2\xi^2/2}e^{i\xi(x-y)}f(y)dyd\xi$$

Eftersom dubbelintegralen nu är absolutkonvergent är det ok att byta ordning på integralerna och vi får:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon^2\xi^2/2}e^{i\xi(x-y)}d\xi f(y)dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{F}[e^{-\epsilon^2\xi^2/2}](y-x)f(y)e^{-i\xi y}dy =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon}e^{-(x-y)^2/2}\epsilon^2 f(y)e^{-i\xi y}dy = f * \phi_\epsilon(x)$$

där ϕ_ϵ ges av $\psi_\epsilon(x) = (\epsilon\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/\epsilon^2}$. Satsen om approximativ identitet för fattningar ger då att

$$f * \phi_\epsilon(x) \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} f(x)$$

Det är nu visat att

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi = f(x) \quad \forall x$$

vilket skulle bevisas.

7 Plancherels formel

Sats *Antag att* $f(x)$ och $g(x)$ båda är funktioner i L^1, vars Fouriertransformer också är i L^1. Då gäller:

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle$$

Bevis

$$\begin{aligned}
2\pi\langle f, g\rangle &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{\hat{g}(\xi)e^{ix\xi}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}\overline{\hat{g}(\xi)}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}dx = \langle f, g\rangle
\end{aligned}$$

vilket skulle bevisas. Antagandena om absolut integrerbarhet behövs för att innerprodukterna ska vara väldefinierade.

8 Samplingssatsen

Sats *Antag att* $f(t) \in L^2$ och att $\hat{f}(\omega)$ är bandbegränsad så att $|\omega|\leq \Omega$ för något ändligt Ω. Då är $f(t)$ entydigt bestämd av sina värden i punkterna $t_n = n\pi/\Omega$ för $n \in \mathbb{Z}$ och ges av:

$$f(t) = \sum_{0}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)\frac{\sin(\Omega t - n\pi)}{\Omega t - n\pi}$$

Bevis Utveckla $\hat{f}(\omega)$ på en Fourierserie:

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi\omega/\Omega}$$

där c_n ges av

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\Omega}\int_{-\Omega}^{\Omega} \hat{f}(\omega)e^{-in\pi\omega/\Omega}d\omega \frac{1}{2\Omega}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i(-n)\pi\omega/\Omega}d\omega \\
&= \frac{2\pi}{2\Omega}f\left(-\frac{n\pi}{\Omega}\right), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2...
\end{aligned}$$

I andra ledet har det utnyttjats att signalens Fouriertransform försvinner utanför $\pm\Omega$ så att integralen kan förlängas till hela linjen. Den utgör då en Fouriertransform vilket utnyttjas i nästa steg. Notera nu att eftersom n går genom alla positiva och negativa heltal kan vi byta tecken av bekvämlighet så att:

$$c_n = \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right)$$

Vi skriver nu $f(t)$ som en Fouriertransform av $\hat{f}(\omega)$:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\Omega} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) e^{in\pi\omega/\Omega} e^{-i\omega t} d\omega \\
&= \frac{\pi}{\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(n\pi/\Omega - t)} d\omega \\
&= \frac{\pi}{\Omega} \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \left[\frac{e^{i\omega(n\pi/\Omega - t)}}{i(n\pi/\Omega - t)}\right]_{-\Omega}^{\Omega} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\sin(n\pi - \Omega t)}{n\pi - t} \\
&= \sum_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{n\pi}{\Omega}\right) \frac{\Omega t - \sin(n\pi)}{t - n\pi}
\end{aligned}$$

vilket skulle visas. I uträkningen ovan har det återigen utnyttjats att $\hat{f}$ är bandbegränsad. Integrationsordningen får kastas om eftersom både f och dess Fouriertransform är L^2-funktioner.

9 Icke-kausalitet hos ideala lågpassfilter

Sats *E*n bandbegränsad signal kan inte vara tidsbegränsad. Omvänt kan en tidsbegränsad signal inte vara bandbegränsad. Dvs om en signal försvinner helt utanför ett visst intervall i frekvensdomänen är den helt delokaliserad i tidsdomänen och vice versa.

Fysikalisk tolkning: Betrakta ett kausalt lågpassfilter, så att impulssvaret $h(t) \equiv 0$ för alla $t < 0$. Detta lågpassfilter kan inte vara idealt, utan kommer att innehålla frekvensbidrag från hela spektrat.

Bevis Antag att en signal är frekvensbegränsad, så att $\sup \hat{f}(\omega) = \Omega$ för något ändligt Ω. $f(t)$ kan då skrivas om i termer av sin Fouriertransform, enligt:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega$$

Denna funktion kan dock lika gärna definieras i hela komplexa talplanet:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} \hat{f}(\omega) d\omega \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-i\omega z} \hat{f}(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Eftersom $\hat{f}(\omega)$ är begränsad enligt definition och $e^{-i\omega z}$ är ett överallt konvergerar integralen för alla komplexa z. Man ser också att funktionens komplexa derivata:

$$\int_{-\Omega}^{\Omega} (-i\omega) \hat{f}(z) e^{-i\omega} d\omega$$

inte ställer till med några problem, utan konvergerar för alla z. En komplexvärd funktion som är komplext deriverbar överallt är analytisk och har därför nollställen endast i diskreta punkter (eller i hela talplanet så att funktionen är trivial och knappast värd att kallas signal). $f(t)$ är bara en reduktion till reella linjen av $\tilde{f}$. Det gäller då att inte hela negativa halvaxeln kan vara negativ, såvida inte funktionen är trivial.

10 Diskret Fouriertransform

10.1 Motivering av definitionen för diskret Fouriertransform

Den kontinuerliga Fouriertransformen av en L^2-funktion $f(t)$ ges av:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

Antag nu istället att vi vill Fouriertransformera en samplad signal, dvs en tidsserie med ett visst antal diskreta värden vid kända tidpunkter. För det första kommer detta innebära att integralen inte tas över hela tidslinjen utan endast i ett intervall, säg $[0, T]$. Dessutom kommer integralen att reduceras till en summa över de diskreta tidpunkterna. Antag att samplingsintervallet är Δt och kalla värdena i tidsserien för $\{a_n\}$ där n går från 0 till $N-1$ där$N = T/\Delta t$. Då fås:

$$\hat{f}(\omega) \approx \sum_{0}^{N-1} f(n\Delta t)e^{-i\omega\Delta tn/N}\Delta t$$

Enligt en inversion av samplingssatsen finns all information i tidssignalen avkodad i frekvenserna $\omega_m = 2\pi m/T$ där m går från 0 till $N-1$. Det inses nu att Fouriertransformen kan representeras av en N-vektor där det m:te värdet är amplituden för vinkelfrekvensen ω_m enligt ovan. Om vi kallar tidsserien $\mathbf{a}_n = \{a_n\}_{n=0}^{N-1}$ och frekvensvektorn $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{m}} = \{a_m\}_{m=0}^{N-1} \approx (\Delta t)^{-1}\hat{f}(\omega)$ fås:

$$\hat{a}_m = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-2\pi imn/N}$$

Detta är definitionen för den diskreta Fouriertransformen

10.2 Inversionsformeln för diskret Fouriertransform

Sats *Med diskret Fouriertransform definierad enligt ovan gäller:*

$$a_n = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi imn/N}\hat{a}_m$$

Bevis Definiera vektorerna $\mathbf{e}_m, m = 0, 1, 2, ..., N-1$ enligt:

$$\mathbf{e}_m = \left\{1, e^{2\pi im/N}, e^{2\pi i2m/N}, ..., e^{2\pi i(N-1)m/N}\right\}$$

Dessa utgör en bas för $\mathbb{C}^n$, eftersom:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_m\rangle &= 1 + e^{2\pi i(m-m)/N} + ... + e^{2\pi(N-1)(m-m)n/N}) \\ &= 1 + 1 + ... + 1 = N\end{aligned}$$

medan för $l \neq m$:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_l \rangle &= 1 + e^{2\pi i(m-l)/N} + ... + e^{2\pi(N-1)(m-l)/N}) \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i N(m-l)}}{1 - e^{2\pi i(m-l)}} = 0\end{aligned}$$

Det följer att a_n kan skrivas som utvecklingar på denna bas. Ställ upp uttrycket för a_n:

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle}{\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_m \rangle} \mathbf{e}_m \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle \mathbf{e}_m\end{aligned}$$

Notera att

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_m \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{2\pi i m n/N} = \hat{a}_m$$

så att

$$a_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{2\pi i m n/N}$$

vilket skulle bevisas.

10.3 Faltning för diskret Fouriertransform

Sats *Definiera diskret faltning som*

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_n = \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{[n-k]}$$

där $[n-k] = n - k \mod N$. Då gäller:

$$\mathcal{F}_N[(\mathbf{a} * \mathbf{b})_n] = \left\{ \hat{a}_n \hat{b}_n \right\}_0^{N-1}$$

Bevis Med samma definitioner som ovan:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} * \mathbf{b}_n) &= \sum_{k=0}^{N-1} a_k b_{[n-k]} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} b_{[n-k]} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{2\pi imk/N}
\end{aligned}
$$

Eftersom alla summor har ändligt antal termer är det inga problem att kasta om ordningen:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{a} * \mathbf{b}_n) &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{2\pi imn/N} \sum_{k=0}^{N-1} b_{[n-k]} e^{-2\pi im(n-k)/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m e^{2\pi imn/N} \sum_{[n-k]=0}^{N-1} b_{[n-k]} e^{-2\pi im[n-k]/N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \hat{a}_m \hat{b}_m e^{2\pi imn/N} = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\langle \hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}, \mathbf{e}_m \rangle}{\langle \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_m \rangle} \\
&= (\hat{a}_1 \hat{b}_1, \hat{a}_2 \hat{b}_2, ..., \hat{a}_{N-1} \hat{b}_{N-1})
\end{aligned}
$$

vilket skulle visas.

11 Bessels olikhet för ortonormerade system

Sats *Låt* $\{\Phi_n\}_{n=1}^{N}$ vara en ortonormerad mängd på $L^2(a,b)$ och $f(x) \in L^2(a,b)$ en godtycklig funktion i detta rum. Då gäller för alla $N \in \mathbb{N}$:

$$
\sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|^2
$$

Bevis För alla positiva heltal N gäller:

$$
\|f - \sum_{1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 \geq 0
$$

Utveckla den kvadrerade normen:

$$\|f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n\|^2 = \left\langle (f - \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_m \rangle \phi_m);\ (f - \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n) \right\rangle =$$

$$\langle f, f \rangle - \left\langle f; \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle - \left\langle \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n; f \right\rangle + \left\langle \sum_{m=1}^{N} \langle f, \phi_m \rangle \phi_m; \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle =$$

$$\|f\|^2 - \left(\left\langle f; \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle + \overline{\left\langle f; \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle} \right) + \sum_{m=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_m \rangle \overline{\langle f, \phi_m \rangle} \langle \phi_m, \phi_n \rangle =$$

$$\|f\|^2 - 2\mathrm{Re} \left\langle f; \sum_{n=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle + \sum_{n=1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2$$

Mellantermen kan här förenklas ytterligare:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} \left\langle f; \sum_{n\,=1}^{N} \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \right\rangle &= \sum_{n=1}^{N} \mathrm{Re} \left[\overline{\langle f, \phi_n \rangle} \langle f, \phi_n \rangle \right] \\ &= \sum_{1}^{N} |\langle f, \phi \rangle_n|^2 \end{aligned}$$

så att

$$\|f\| - \sum_{1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{1}^{N} |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|$$

vilket skulle visas.

12 Ekvivalensvillkor till Parsevals likhet

Sats *Låt* $\{\phi_n\}_1^\infty$ vara en ortonormal mängd i $L^2(a, b)$. Då är följande tre påståenden ekvivalenta:

(a) Om $\langle f, \phi_n \rangle = 0$ för alla n är f nollfunktionen.

(b) Varje funktion $f \in L^2(a, b)$ identifieras med sin utveckling $f = \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$.

(c) För varje $f \in L^2(a, b)$ gäller *Parsevals ekvation* (likhet i Bessels olikhet):

$$\|f\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\langle f, \phi_n \rangle \phi_n|^2$$

Bevis Ska visa att (a) medför (b), att (b) medför (c) samt att (c) medför (a). Om detta är uppfyllt är påståenden nödvändigtvis ekvivalenta.

(a) medför (b): Givet att f är en L^2-funktion konvergerar $f_n = \sum_1^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$ i norm mot f då $N \to \infty$. Detta följer genom att kombinera Bessels olikhet och Pythagoras sats. Den sistnämnda ger för de sista termerna i en ändlig utveckling:

$$\Big\| \sum_m^n \langle f, \phi_m \rangle \phi_m \Big\|^2 = \sum_m^n |\langle f, \phi_m \rangle|^2$$

Bessels olikhet garanterar att $\sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2 \leq \|f\|$ är konvergent. För att detta ska kunna uppfyllas måste högerledet i ekvationen ovan gå mot noll då $m, n \to \infty$, dvs normen av utvecklingen går mot normen av f då antalet termer går mot oändligheten.

För att visa utvecklingen är identisk med funktionen för tillräckligt många termer, definiera g som:

$$g = f - \sum_1^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$$
$$=$$

Beräkna sedan projektionen av g på vektorerna ϕ_m:

$$\langle g, \phi_m \rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \Big\langle \sum_{n=1}^\infty \langle f, \phi_n \rangle \phi_n ; \phi_m \Big\rangle = \langle f, \phi_m \rangle - \langle f, \phi_m \rangle = 0$$

Med andra ord är alla koefficienter för g lika med noll, och enligt (a) är g då nollfunktionen. Men detta är ju ekvivalent med att f är identisk med sin utveckling, så första delen av satsen är visad.

(b) medför (c): Denna implikation följer direkt av en gränsövergång i Pythagoras sats. Om (b) gäller har vi:

$$\|f\|^2 = \lim_{N \to \infty} \Big\| \sum_1^N \langle f, \phi_n \rangle \phi_n \Big\|^2 = \lim_{N \to \infty} \sum_1^N |\langle f, \phi_n \rangle|^2 = \sum_1^\infty |\langle f, \phi_n \rangle|^2$$

(c) medför (a): Om Parsevals formel gäller och alla koefficienter i utvecklingen av f är noll följer direkt från likheten att L^2-normen av f är noll. Detta är definitionen av nollfunktionen i L^2-rummet.

13 Reguljära Sturm-Liouville-problem

Sats *Ett* reguljärt Sturm-Liouville-problem på intervallet $[a, b]$ definieras enligt:

$$(rf')' + pf + \lambda wf \ = 0, \qquad B_1(f) = B_2(f) = 0$$

där r, r' och p är reellvärda och kontinuerliga på $[a, b]$ och $r > 0$ (det sistnämnda medför ingen förlust av generalitet så länge $r \neq 0$ någonstans på intervallet eftersom man i annat fall kan byta tecken på hela ekvationen och återfå samma form). w är en kontinuerlig viktfunktion på intervallet, dvs den integreras till 1 över [a,b] och är alltid positiv. λ är en godtycklig konstant och kallas *egenvärde*. f kallas *egenfunktion* för problemet. Lösning av problemet ger sammanhörande par av egenfunktioner och egenvärden.

$B_1(f) = 0$ och $B_2(f) = 0$ är självadjungerade randvillkor för differentialoperatorn $(rf')' + pf$, dvs

$$[r(f'\overline{g} - f\overline{g}')]_a^b$$

Kommentar: Två vanliga former av självadjungerade randvillkor är separerade och periodiska. Dessa typer är alltid självadjungerade för alla linjära operatorer.

För ett sådant problem gäller:

(a) Alla egenvärden är reella.

(b) Egenfunktioner sammanhörande med distinkta egenvärden är ortogonala med avseende på den viktade skalärprodukten

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)dx$$

dvs $\langle f, g \rangle_w = 0$.

(c) Inga egenvärden har egenrum med högre dimension än 2. Om randvillkoren är separerade är egenvärdena alltid maximalt 1-dimensionella.

Bevis (a) Definiera $L[f] = (rf')' + pf$. Då gäller:

$$\lambda \|f\|^2 = \lambda \langle f, f \rangle_w = \langle \lambda wf, f \rangle = -\langle L[f], f \rangle = -\langle f, L[f] \rangle = \langle f, \lambda wf \rangle = \overline{\lambda} \langle f, f \rangle_w = \overline{\lambda} \|f\|^2$$

vilket ger att $\lambda = \overline{\lambda}$ så att λ måste vara reell.

(b) Antag att två lösningar till problemet, f och g har egenvärden λ_1 respektive λ_2. Då gäller:

$$\lambda_1\langle f,g\rangle_w = \langle \lambda_1 wf, g\rangle = -\langle L[f], g\rangle = -\langle f, L[g]\rangle = \langle f, \lambda_2 wg\rangle = \overline{\lambda_2}\langle f,g\rangle_w = \lambda_2\langle f,g\rangle_w$$

Om denna ekvation ska kunna uppfyllas för $\lambda_1 \neq \lambda_2$ måste $\langle f,g\rangle_w = 0$. Därmed är den andra delen av satsen visad.

(c) Enligt fundamentala existenssatsen är lösningarna till en andra ordningens ordinär differentialekvation fullständigt specificerade av två konstanter. Detta är alltså den maximala dimensionen för egenfunktioner kopplade till varje egenvärde. Om randvillkoren är separerade kan man använda villkoret för den ena randen för att bestämma ett tvångsvillkor mellan de två parametrarna förlorar en frihetsgrad. Samma procedur för det andra separerade randvillkoret ger att den kvarvarande dimensionen på lösningsrummet är antingen 1, om det andra randvillkoret ger samma begränsning på relationen mellan parametrarna, eller 0 om det andra randvillkoret helt fixerar egenfunktionen. Det sistnämnda är det vanligaste fallet i praktiken.

Därmed är hela satsen bevisad.

14 Bas för reguljära Sturm-Liouville-problem

Sats *F*ör alla reguljära Sturm-Liouville-problem på $[a,b]$ finns en ortonormal bas $\{\phi_n\}_1^\infty$ för $L^2_w(a,b)$ av egenfunktioner för problemet. Om λ_n är egenvärde för ϕ_n gäller att $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$. Om $f \in C^{(2)}(a,b)$ och uppfyller självadjungerade randvillkor konvergerar utvecklingen $\sum\langle f,\phi_n\rangle\phi_n$ likformigt mot f.

Bevis Överkurs!

Hälsningar från författaren

Till dig som läser den här kursen för första gången

Går det bra för dig på F? Har du klarat hälften eller mer av alla tentor hittills? Tycker du utbildningen är rolig? Om du verkligen känner efter alltså. Svarade du nej på någon av de ovanstående frågorna skulle jag vilja be dig överväga om du inte borde byta till Maskin istället. Deras tentor är inte onödigt svåra för sakens skulle och det är de som står först i kön till alla jobb du kommer vilja ha när du insåg att tanken på att doktorera i teoretisk fysik inte var den mest lukrativa du kommit på.

Än är det inte för sent att byta! Du har precis börjat med expfysen, men tro mig, den har inte blivit jobbig än. Vänta tills i vår. Eller, förresten, vänta till hösten. Då blir det kvant + kvant + alla oändligt många valbara kurser du tror att du klarar av att läsa samtidigt för att de verkar så roliga. Kommer du över det guppet blir det åtminstone lättare sedan. Men välj i så fall för guds skull en master som ger bra jobbmöjligheter! Annars är det bäst att du slipar din förmåga att sälja in dig själv för på andra program lär man sig faktiskt saker som går att tillämpa i arbetslivet och det är lätt för arbetsgivare att välja studenter från andra program framför dig. Med det sagt skulle jag inte valt annorlunda om jag valt program idag. Jag ville trots allt läsa den där förbaskade kvantfysiken och relativitetsteorin. Lyckligtvis råkade jag välja kurser och exjobb så att jag får ganska god konkurrenskraft på arbetsmarknaden. Och från vad jag hört arbetsgivare säga är de allt som oftast otroligt nöjda med sina F:are när de väl lyckats nästla sig in. Man kanske inte kan det man bör kunna, men man har åtminstone en grym förmåga att lära sig nya saker fort med minimal ledning. Så om du liksom jag är för envis för att välja den rakaste och bredaste vägen till framgång önskar jag dig all lycka till!

Till dig som läser den här kursen för femte gången

Det är aldrig för sent att bli studieteknolog. Efter att ha kuggat den här kursen fyra gånger om bestämde jag mig när jag insåg att exjobbet var halvklart för att det kanske var värt att lägga ner lite tid på att lära sig teorin ändå. Ska man göra något ska man göra det ordentligt, så jag bestämde mig för att lära mig alla bevis och renskriva dem. Jag hoppas att någon av de andra som haft svårt för den här kursen alternativt varit för lat för att ta den i hornen på riktigt kan få det lite lättare att plugga in teorin med hjälp av de här sidorna.

Jag ska dela med mig av något jag lärde mig när jag läste fourieren och fastan mitt sjätte år på Chalmers: Om jag faktiskt hade räknat lite mer uppgifter löpande under kurserna hade jag haft mycket större chans att klara tentorna någon av de andra fyra-fem försöken. Pro-tip: Gör man jobbet lär man sig! All cred till dig som hankar dig fram mellan kurserna trots din lathet, men ska man klara kurserna man har svårt för är det en bra idé att faktiskt jobba kontinuerligt med teorin och försöka ligga i fas. Det hjälper tydligen!

Hälsningar,

Rasmus Andersson, f09
DP 10/11
SNF 11/12
Kärnstyret 12/13
FARM ht13
Gara sedan 2009
Drägg 2009-2013
Studieteknolog 2014-2015
Civilingenjör juni 2015(?)