Teori, Fourieranalys

By Robin Andersson

2013-2014

Sammanfattning

Innehåller bevisen från teorilistan för kursen i fourieranalys på Chalmers för F2/TM/Kfkb 2014. För eventuella fel kontakta SNF.

Innehåll

1 Konvergenssatsen

1.1 Sats

ANTAG f $2\pi-$PERIODISK OCH STYCKVIS GLATT I $[-\pi,\pi]$. DÅ KONVERGERAR $S_N f(\theta)$ I VARJE θ OCH GRÄNSVÄRDET ÄR $f(\theta)$ OM f KONTINUERLIG I θ, ANNARS $\frac{1}{2}(f(\theta_-)+f(\theta_+))$.

1.2 Bevis

Inför en ny funktion

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}} \,, \qquad \theta \neq \theta_0 \,.$$

wlog kan vi konstatera att g också är $2\pi-$periodisk. Påstår att g är styckvis kontinuerlig, utanför θ_0 är g styckvis glatt.

Nära θ_0 gäller

$$g(\theta) = \frac{f(\theta)-f(\theta_0)}{\theta-\theta_0}\frac{\theta-\theta_0}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}},$$

där vi får enligt medelvärdessatsen att det vänstra bråket har höger- respektive vänstergränsvärde då $\theta \to \theta_0$, samtidigt gäller

$$\frac{\theta-\theta_0}{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}} = \frac{1}{\frac{e^{i\theta}-e^{i\theta_0}}{\theta-\theta_0}} \underset{\theta\to\theta_0}{\longrightarrow} \frac{1}{ie^{i\theta_0}} \,.$$

Alltså är g Riemann-integrabel och korollariet till Bessel ger $c_n(g) \to 0$ då $n \to \pm\infty$.

$$\therefore f(\theta) = e^{i\theta}g(\theta) - e^{i\theta_0}g(\theta) + f(\theta_0) \,, \qquad c_n(e^{i\theta}g(\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta}g(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = c_{n-1}(g) \,.$$

Vi får alltså

$$c_n(f) = c_{n-1}(g) - e^{i\theta_0}c_n(g) + \begin{cases} f(\theta_0) \,, & n=0 \,, \\ 0 \,, & n \neq 0 \,. \end{cases}$$

Partialsumman är därmed enligt

$$S_N f(\theta_0) = \sum_{n=-N}^{N} c_{n-1}(g)e^{in\theta_0} - \sum_{n=-N}^{N} c_n(g)e^{i(n+1)\theta_0} + f(\theta_0) =$$

$$= f(\theta_0) + c_{-N-1}(g)e^{-iN\theta_0} - c_N(g)e^{i(N+1)\theta_0} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(\theta_0) \,. \quad \square$$

2 Termvis derivering av fourierserier

2.1 Sats

ANTAG ATT f ÄR $2\pi-$PERIODISK, KONTINUERLIG OCH STYCKVIS GLATT. LÅT a_n, b_n OCH c_n VARA FOURIERKOEFFICIENTERNA TILL f SAMT a_n' b_n' OCH c_n' FOURIERKOEFFICIENTERNA TILL f'. DÅ GÄLLER

$$a_n' = nb_n \,, \qquad b_n' = -na_n \,, \qquad c_n' = inc_n \,.$$

2.2 Bevis

Vi går efter definitionen och får

$$c_n' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\left[f(\theta)e^{-in\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)(-ine^{-in\theta})\,\mathrm{d}\theta =$$

eftersom f är $2\pi-$periodisk samt $e^{in\pi} = e^{-in\pi}$, så följer

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot 0 + in\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = inc_n \; .$$

Analogt följer proceduren för a_n' och b_n'. □

3 Termvis integrering av fourierserier

3.1 Sats

ANTAG ATT f ÄR $2\pi-$PERIODISK OCH STYCKVIS KONTINUERLIG MED FOURIERKOEFFICIENTER a_n, b_n OCH c_n, LÅT $F(\theta) = \int_0^\theta f(\phi)\,\mathrm{d}\phi$. OM $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$,

$$\Rightarrow \forall\theta\,,\, F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{in}e^{in\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_1^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}\sin\theta n - \frac{b_n}{n}\cos\theta n\right) \; .$$

3.2 Bevis

Det gäller att F är styckvis glatt, kontinuerlig och $2\pi-$periodisk, ty, f saknar konstant term. Sats 2.2 gäller för F och ger om F har fourierserien

$$C_0 + \sum_{n\neq 0} C_n e^{in\theta} \; ,$$

att

$$c_n = inC_n,\, n\neq 0 : \; C_n = \frac{c_n}{in} \; . \qquad \Box$$

4 Sats 7.3 om faltning

4.1 Sats

ANTAG $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\int g(x)\,\mathrm{d}x = 1$, g BEGRÄNSAD OCH $x^3 g(x) \to 0$ DÅ $x \to \pm\infty$. LÅT $f \in L^1$, OM f KONTINUERLIG I x GÄLLER $f * g_\varepsilon(x) \to f(x)$ DÅ $\varepsilon \to 0$.

VIDARE OM f HAR VÄNSTER- RESPEKTIVE HÖGERGRÄNSVÄRDE I x OCH g ÄR JÄMN GÄLLER

$$f * g_\varepsilon(x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} \; .$$

4.2 Bevis

$$f * g_\varepsilon(x) - f(x) = \int f(x-\varepsilon z)g(z)\,\mathrm{d}z - \int f(x)g(z)\,\mathrm{d}z = \int (f(x-\varepsilon z) - f(x))g(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$\int\limits_{|z|<\varepsilon^{-\frac{1}{2}}} (f(x-\varepsilon z) - f(x))g(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{|z|>\varepsilon^{-1/2}} f(x-\varepsilon z)g(z)\,\mathrm{d}z - f(x)\int\limits_{|z|>\varepsilon^{-1/2}} g(z)\,\mathrm{d}z =$$

$$= I + II + III\,.$$

$$|I| \le \sup_{|y|<\sqrt{\varepsilon}} |f(x-y) - f(x)| \int |g(z)|\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

$$|II| \le \int |f(x-\varepsilon z)|\,\mathrm{d}z \cdot \sup_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)| = \frac{1}{\varepsilon}\int |f(x-y)|\,\mathrm{d}y \cdot \sup_{|z|>1/\sqrt{\varepsilon}} |g(z)| \le \int |f|\,\mathrm{d}y \frac{1}{\varepsilon} c\varepsilon^{\frac{3}{2}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0\,,$$

där c är en konstant. Vidare för den tredje integralen gäller

$$|III| \le |f(x)| \int\limits_{|z|>\varepsilon^{-1/2}} |g(z)|\,\mathrm{d}z \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0 \;\square$$

5 Fouriers inversionsformel då f och $\hat{f} \in L^1$

5.1 Sats

ANTAG ATT f ÄR INTEGRERBAR OCH STYCKVIS KONTINUERLIG PÅ $\mathbb{R}$, DEFINIERAD I SINA DISKONTINUITETSPUNKTER PÅ ETT SÅDANT SÄTT ATT DEN UPPFYLLER

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)] \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

DÅ GÄLLER

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega x} e^{-\varepsilon^2\omega^2/2} \hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,.$$

VIDARE OM $\hat{f} \in Ł^1$, SÅ ÄR f KONTINUERLIG OCH

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

5.2 Bevis

Eftersom $\hat{f} \in Ł^1$ kan vi applicera dominerade konvergenssatsen, alltså

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega x}\hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega x} e^{-\varepsilon^2\omega^2/2}\hat{f}(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)]\,.$$

Integralen i vänsterledet är $1/2\pi$ gånger fouriertransformen av $\hat{f}$ i x_-, som påpekat tidigare är fouriertransformen av integrerbara funktioner kontinuerliga. Alltså f är kontinuerlig och

$$\frac{1}{2}[f(x_-) + f(x_+)] = f(x)\,. \qquad \square$$

6 Plancherels formel $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in L^1$

6.1 Sats

Antag att $f, g \in Ł^1$ sådana att $\hat{f}, \hat{g} \in Ł^2$. Då är också $f, g, \hat{f}, \hat{g} \in Ł^2$ och vidare gäller

$$2\pi\langle f, g\rangle = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle \ .$$

6.2 Bevis

Ty,

$$2\pi\langle f, g\rangle = 2\pi \int f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \iint f(x)\overline{e^{i\omega x}\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x =$$

$$= \iint f(x)e^{-i\omega x}\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}x = \int \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle \ . \quad \square$$

7 Definition av lågpassfilter och formulering av samplingssatsen i termer av lågpassfilter

7.1 Definition

Antag att $f(t)$ är kontinuerlig med Fouriertransform $\hat{f}(\omega) = 0$ för $|\omega| \geq \alpha$. Om signalen samplas med frekvensen $\frac{1}{T} \geq \frac{\alpha}{\pi}$ så kan $f(t)$ återvinnas ur den samplade signalen genom en lågpassfiltrering med avhuggningsfrekvesen α ($LP_\alpha-$filtrering) och multiplikation med T.

8 Sats 3.8 om bästa approximationen

8.1 Sats

Om $f \in Ł^2$, är $\sum_1^N c_n(f)\phi_n$ den punkt i H_N som ligger närmst f, dvs.

$$\min ||f - \sum_1^N d_n\phi_n|| = ||f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n||,$$

där minimum tas över alla skalärer $d_1, ..., d_N$, samt H_N är det delrum av $Ł^2$ som spänns upp av vektorerna $\{\phi_n\}_1^N$.

8.2 Bevis

Om vi väljer $d_n = c_n(f)\forall n$ blir normen i vänsterledet lika med högerledet, så det återstår bara att visa att den aldrig blir mindre än högerledet. Observera att vektorn $f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n$ är ortogonal mot varje $\phi_k, 1 \leq k \leq N$, ty

$$\langle f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n, \phi_k\rangle = \langle f, \phi_k\rangle - c_k(f)\langle \phi_k, \phi_k\rangle = 0 \ ,$$

det sista enl. def. av $c_k(f)$. Den är därmed också ortogonal mot varje vektor i H_N. Vi skriver nu

$$f - \sum_1^N d_n\phi_n = \left(f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n\right) + \sum_1^N (c_n(f) - d_n)\phi_n,$$

och observerar att av de två termerna i högerledet ligger den andra i H_N, och den är därför ortogonal mot den första termen. Då ger pythagoras sats

$$||f - \sum_1^N d_n\phi_n||^2 = ||f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n||^2 + \sum_1^N |c_n(f) - d_n|^2||\phi_n||^2 \ .$$

Eftersom den sista termen här aldrig är negativ, ser vi att

$$||f - \sum_1^N d_n\phi_n||^2 \geq ||f - \sum_1^N c_n(f)\phi_n||^2 \ .$$

Detta säger att normen i vänsterledet i satsens formulering alltid är minst lika stor som högerledet. □

9 Satsen om fullständighet för ortogonalsystem

9.1 Sats

LÅT $\{\phi_n\}_1^\infty$ VARA ETT ORTOGORMALSYSTEM I $Ł^2$. FÖLJANDE ÄR EKVIVALENT:

A) $\{\phi_n\}_1^\infty$ ÄR FULLSTÄNDIGT.

B) $\displaystyle\sum_1^\infty |c_n(f)|^2||\phi_n||^2 = ||f||^2 \, \forall\, f \in Ł^2 \ .$

C) OM $f \in Ł^2$ ÄR ORTOGONAL MOT ALLA ϕ_n SÅ GÄLLER $f = 0$.

9.2 Bevis

Vi vill visa att a) är ekvivalent med b), att a) implicerar c) och att c) implicerar a).

a) ⇔ b): Följer direkt av sats.

a) implicerar c): Vi utgår från att a) gäller och antar att $f \in Ł^2$ är ortogonal mot alla ϕ_n. Då gäller att $c_n(f) = 0$, alltså fourierserien $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n = 0$. Men på grund utav a) är denna serie f, alltså fås $f = 0$ och c) följer.

c) implicerar a): Tag en godtycklig funktion $f \in Ł^2$. Vi vet redan att $\sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$ konvergerar, enligt Bessels olikhet och av ett lemma, så vi kan bilda skillnaden $f - \sum_1^\infty c_n(f)\phi_n$, skalärmultiplicerat med ϕ_k fås

$$\langle f, \phi_k\rangle - c_k(f)||\phi_k||^2 = 0 \ , \quad \text{enligt definitionen av } c_k \ .$$

där vi utnyttjat skalärproduktens kontinuitet. Skillnaden är alltså ortogonal mot alla vektorer i ortogonalsystemet och därmed 0, ty, vi utgår ifrån c). Därmed är alla tre utsagor ekvivalenta □.

10 Definition för ett reguljärt Sturm-Liouville-problem

10.1 Definition

Ett reguljärt *Sturm-Liouville-problem* i intervallet $[a, b]$ ges av

- $Lf = (rf')' + pf$, där r, r' och p är kontinuerliga funktioner i $[a, b]$ samt $r > 0$ i intervallet.
- Självadjungerade randvillkor.
- En viktfunktion w, kontinuerlig och positiv i $[a,b]$.

11 Sats 3.9 a) och b) om Sturm-Liouville-problem: Formulering och bevis

11.1 Sats

Givet ett reguljärt Sturm-Liouville-problem på ett intervall $[a, b]$, då gäller

(a) All egenvärden är reella.

(b) Egenfunktioner tillhörande distinkta egenvärden är ortogonala med avseende på vikten w; d.v.s. om f och g är egenfunktioner med egenvärde λ och $\mu : \ \lambda \neq \mu$, så gäller

$$\langle f, g\rangle_w = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ .$$

11.2 Bevis

A): Om λ är ett egenvärde med egenfunktion f så gäller

$$\lambda||f||_w^2 = \langle \lambda w f, f\rangle = -\langle L(f), f\rangle = -\langle f, L(f)\rangle = \langle f, \lambda w f\rangle = \bar{\lambda}\langle f, wf\rangle = \bar{\lambda}||f||_w^2 \ ,$$

eftersom f uppfyller själv-adjunkta randvillkor. Men eftersom $||f||_w^2 > 0$ inses att $\bar{\lambda} = \lambda$, alltså $\lambda \in \mathbb{R}$ $\square$.

B): Antag $L(f) + \lambda w f = 0$ och $L(g) + \mu w g = 0$, där $f, g \neq 0$. Med samma argument som i a) fås

$$\lambda\langle f, g\rangle_w = \langle \lambda w f, g\rangle = -\langle L(f), g\rangle = -\langle f, L(g)\rangle = \langle f, \mu w g\rangle = \mu\langle f, g\rangle_w \ .$$

Alltså om $\lambda \neq \mu$ måste vi ha $\langle f, g\rangle_w = 0$. $\square$

12 Den genererande funktionen för Besselsfunktioner (formel 5.20)

12.1 Sats

$$\forall x \text{ OCH } \forall z \neq 0 \ , \qquad \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)z^n = \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \ .$$

12.2 Bevis

Vi vet taylorutvecklingen för e^x och erhåller

$$\exp\left[\frac{xz}{2}\right] = \sum_0^\infty \frac{z^j}{j!}\left(\frac{x}{2}\right)^j \;, \qquad \exp\left[\frac{-x}{2z}\right] = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{z^k k!}\left(\frac{x}{2}\right)^k \;.$$

Vi vet att serierna är absolutkonvergenta, så vi kan multiplicera summorna och den resulterande dubbelsumman blir

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{j,\,k=0}^\infty \frac{(-1)^k z^{j-k}}{j!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{j+k} \;.$$

Vi summerar serien genom att först addera alla termer som innehåller en given potens av z^n och sen summerar vi över n. Vi sätter $j-k=n$ eller $j=k+n$ och erhåller mha

$$\frac{1}{(k+n)!} = \frac{1}{\Gamma(k+n+1)} = 0 \text{ , då } k+n<0 \;,$$

alltså

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^\infty \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right] z^n = \sum_{-\infty}^\infty J_n(x) z^n \;. \quad \square$$

13 Bevis för Hermitepolynomens ortogonalitetsegenskap

13.1 Sats

HERMITEPOLYNOMEN $\{H_n\}_0^\infty$ ÄR ORTOGONALA PÅ $\mathbb{R}$ MED AVSEENDE PÅ VIKTEN $w(x) = e^{-x^2}$, OCH

$$||H_n||_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi} \;.$$

13.2 Bevis

Om f är ett godtyckligt polynom, så gäller

$$\langle f, H_n\rangle_w = \int_{-\infty}^\infty f(x)H_n(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_{-\infty}^\infty f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^\infty f^{(n)}(x)e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \;.$$

I sista ekvationen har vi integrerat partiell n gånger; termerna på randen blir 0 ty $P(x)e^{-x^2} \to 0$ då $x \to \pm\infty$ $\forall$ polynom P. Vidare, om f är ett polynom av grad $N < n$, och speciellt om $f = H_m$ där $m < n$ så gäller $f^{(n)} \equiv 0$, och alltså $\langle f, H_n\rangle_w = 0$. Detta visar ortogonaliteten av Hermitepolynomen. Men, om $f = H_n$ fås $f(x) = (2x)^n + ...$ och vi får alltså $f^{(n)} \equiv 2^n n!$, så

$$||H_n||_w^2 = 2^n n! \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2^n n!\sqrt{\pi} \;. \quad \square$$

14 Härledning av den genererande funktionen för hermitepolynomen

14.1 Sats

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \sum_0^\infty H_n(x)\frac{z^n}{n!} = e^{2xz-z^2} \;.$$

14.2 Bevis

Sätt $u = x - z$ där x är fix, vi har då $\mathrm{d}/\mathrm{d}u = -\mathrm{d}/\mathrm{d}z$ och får alltså

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n} e^{-(x-z)^2}\bigg|_{z=0} = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n} e^{-u^2}\bigg|_{u=x} = e^{-u^2} H_n(u)\bigg|_{u=x} = e^{-x^2} H_n(x) \;.$$

Vidare följer från Taylors formel

$$e^{-(x-z)^2} = \sum_0^\infty e^{-x^2} H_n(x) \frac{z^n}{n!} \;. \square$$