

MVE025 Komplex matematisk analys F2 / MVE295 Komplex analys Kf2/TM2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Använd residykalkyl för att beräkna (7 p)

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^N} dx,$$

där N är ett positivt heltal.

2. Avgör om det finns en hel funktion vars realdel är

$$x^4 - 6x^2y^2 + y^4.$$

Ange i så fall en sådan funktion. (6 p)

3. Lös med hjälp av Z-transformen differensekvationen

$$a_{k+1} - a_k = 2$$

med begynnelsevärde $a_0 = 0$. (6 p)

4. Bestäm bilden av området $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 3, \operatorname{Im}(z) > 0\}$ under avbildningen (6 p)

$$f(z) = \frac{9 + i - 6z + z^2}{-9 + i + 6z - z^2}.$$

Tips: Skriv f som en sammansättning av enklare avbildningar.

5. Avgör hur många nollställen $z^3 + z + e^{z/3}$ har i området (6 p)

$$\{z \in \mathbb{C}^n, \quad |\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Im}(z)| < 3, \quad |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| < 3\}.$$

6. Avgör om det finns en harmonisk funktion $u(x, y)$ i $\mathbb{C}$ som uppfyller att (6 p)

$$u(x, y) = 2 \text{ om } (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} = 2$$

och

$$u(x, y) = 3 \text{ om } (|x|^2 + |y|^2)^{1/2} = 3.$$

7. Formulera och bevisa identitetsprincipen. (6 p)

8. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (7 p)

Lycka till!
Elizabeth

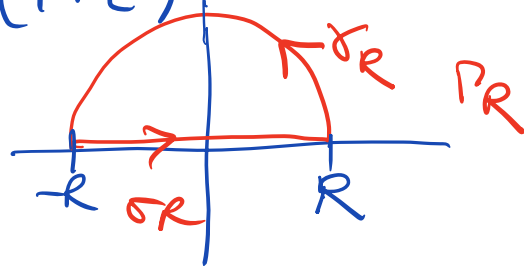
MVE 02S / MVE 29S Komplex (matematisk) analys 8/126 ①

1b) Låt $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^N} dx$. Då $I = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$ där $I_R = \int_{-R}^R \frac{1}{(1+x^2)^N} dx$

För att beräkna I_R låt $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^N}$ & låt $\Gamma_R = \gamma_R \cup \sigma_R$

där $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $t \in [0, \pi]$

$\sigma_R(t) = t$ $t \in [-R, R]$



$$\text{Då } I_R = \int_{\sigma_R} f dz = \int_{\Gamma_R} f dz - \int_{\gamma_R} f dz$$

Undersök $\int_{\sigma_R} f dz$: $\left| \int_{\sigma_R} f dz \right| \leq \max_{z \in \sigma_R} |f(z)| \cdot |\sigma_R| \leq$

$\left[\text{Obs: } |1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \text{ på } \sigma_R \text{ om } R > 1 \right]$

omvänd Δ-dukhet.

på γ_R $R > 1$ Δ-dukhet för f

$$\frac{\pi R}{(R^2-1)^N} \rightarrow 0 \text{ då } R \rightarrow \infty$$

Beräkna $\int_{\Gamma_R} f dz$ med residyberäkning:

Obs $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^N} = \frac{1}{(z-i)^N (z+i)^N}$

Attici pol av ordning N i $\pm i$, i multi Γ_R om $R > 1$

Beräkna $\text{Res}_i f$: Minus Om $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^N}$ så $\text{Res}_a f = \frac{g^{(N-1)}(a)}{(N-1)!}$

Nu $f(z) = \frac{g(z)}{(z-i)^N}$ där $g(z) = \frac{1}{(z+i)^N}$.

Attici $\text{Res}_i f = \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} g(z) \Big|_{z=i}$

$(N-1)!$

$$\text{Nu } \frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}} g|_i = (-1)^{N-1} N(N+1) \dots (2N-2) \frac{1}{(1+i)^{2N-1}} \Big|_i =$$

$$\frac{(2N-2)!}{(N-1)!} \frac{1}{2^{2N-1}} \frac{1}{i}$$

$$\text{Also Res}_i f = \frac{(2N-2)}{(N-1)} \frac{1}{2^{2N-1}} \frac{1}{i}$$

Nu gen residyraben om $R > 1$

$$\int_{\Gamma_R} f dz = 2\pi i \text{ Res}_i f = \frac{(2N-2)}{(N-1)} \frac{\pi}{2^{2N-2}}$$

$$\text{Autsä } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^N} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_R} f dz - \int_{\Gamma_R} f dz \right) = \frac{(2N-2)}{(N-1)} \frac{\pi}{2^{2N-2}}$$

$$\text{a) } N=2 \text{ Räkning ovan ger } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \left(\frac{2}{1} \right) \frac{\pi}{2^2} = 2 \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$2) \text{ Låt } u(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$$

$$\text{Dä } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2$$

$$\text{Alltså } \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in } \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$ enkelt sammanhängande $\Rightarrow$ I hel fun f så att $\text{Re } f = u$

För att bestämma en färdan låt oss först hitta ett harmoniskt konjugat till u :

$$v(x,y) = \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) dt - \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,0) dt =$$

$$\int_0^y (4x^3 - 12xt^2) dt - \int_0^x 0 dt = [4x^3t - 4xt^3]_0^y = 4x^3y - 4xy^3$$

Aufgä $f = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + i(4x^3y - 4xy^3)$ är en
hel funktion med den givna realdelen.

Obs $f = z^4$

3) Obs Ekvationen kan skrivas

(*) $S(\alpha) - \alpha = \beta$ där $\alpha = (a_n)_{n=0}^\infty$, $a_0 = 0$, $\beta = (b_n)_{n=0}^\infty$, $b_n = 2$

z -transformera (*):

$$\boxed{Z(VL) = Z(S(\alpha) - \alpha) = Z(S(\alpha)) - Z(\alpha) = (z-1)Z(\alpha)}$$

[$Z(\alpha)$ är $\uparrow$][$Z(S(\alpha)) = Z(Z(\alpha) - a_0) = zZ(\alpha)$]

$$\boxed{Z(HL) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{z^k} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = 2 \frac{1}{1-1/z} = \frac{2z}{z-1}}$$

[def $Z(\cdot)$]geom. Σ

Aufgä (*) $\Rightarrow \boxed{Z(\alpha) = \frac{2z}{(z-1)^2} = 2z \frac{d}{dz} \left(\frac{-1}{z-1} \right)}$

derivera
Lamant-
serie

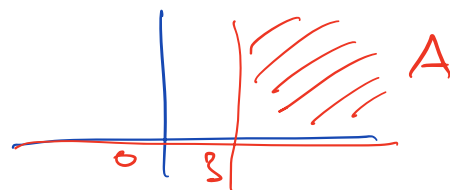
$$\left[\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-1/z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} \right] \quad 2z \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{z^k} \right) =$$

$$2z \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{z^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{z^k}$$

Aufgä $\alpha = (a_n)_{n=0}^\infty$, $a_n = 2n$

Detta är förstis lätt att se direkt.

4) Obs $A := \{ \operatorname{Re} z > 3, \operatorname{Im} z > 0 \}$
avgränsas av $\{ \operatorname{Re} z = 3 \}$, $\{ \operatorname{Im} z = 0 \}$



• $f = \frac{i + (z-3)^2}{i - (z-3)^2}$ Låt $g(z) = z-3$, $h(z) = z^2$, $M(z) = \frac{i+z}{i-z}$

Öc är $f = M \circ h \circ g$

$$\text{Nu } g(A) = \{z-3, \operatorname{Re} z > 3, \operatorname{Im} z > 0\} = \{\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$$

$$B := h(g(A)) = \{z^2, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} = \{(re^{i\theta}) \mid r > 0, 0 < \theta < \pi/2\}$$

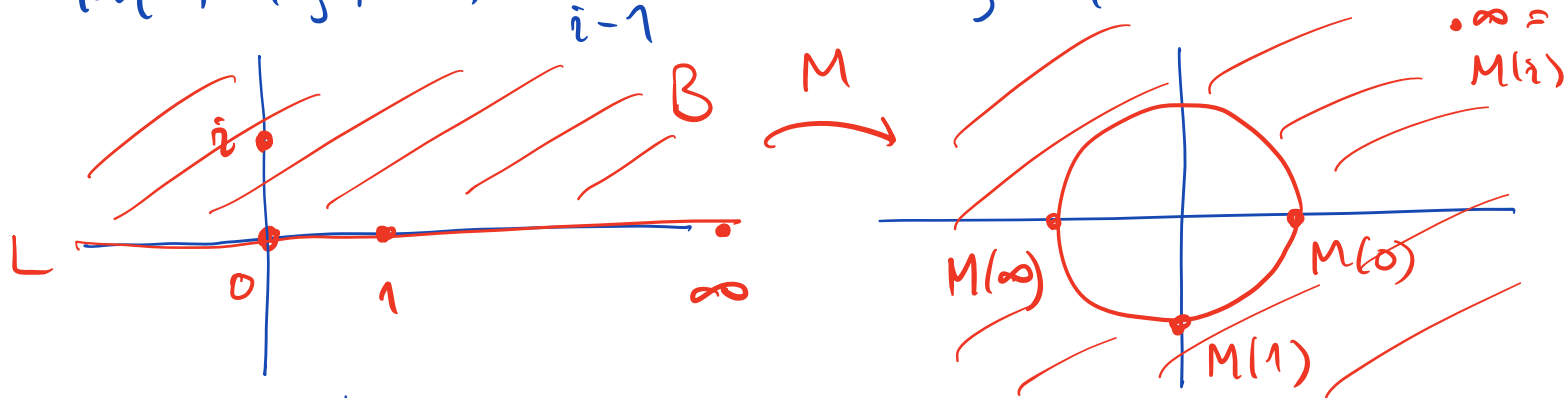
$$= \{Re^{i\varphi} \mid R > 0, 0 < \varphi < \pi\} = \{\operatorname{Im} z > 0\} = \text{Övre halvplanet}$$

B begränsas av $L := \{\operatorname{Im} z = 0\}$

M Möbiustransformation $\Rightarrow M(B)$ begränsas av $M(L)$

M M -avs L linje $\Rightarrow M(L)$ linje eller cirkel, bestäms av värden på 3 distinkta punkter + ex $0, 1, \infty$

$$M(0) = 1, M(1) = \frac{i+1}{i-1} = \dots = -i, M(\infty) = -1$$



Außer $M(L) = C[0,1)$ ~ enhetscirkeln.

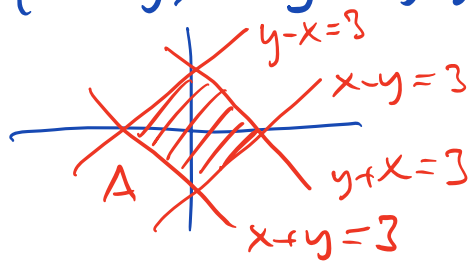
Außer $M(B)$ begränsas av $C[0,1)$

Tag $a \in B$, t.ex. $a = i$. Då $M(i) = \infty$

$$\text{Außer } M(B) = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\} = \mathbb{C} \setminus \overline{D}[0,1)$$

$$\text{Außer } f(A) = M(h(g(A))) = M(B) = \underline{\mathbb{C} \setminus \overline{D}[0,1)}$$

5) Obs $A := \{z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z| < 3, |\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z| < 3\} =$
 $\{x+iy, x-y < 3, y-x < 3, x+y < 3, -x-y < 3\}$



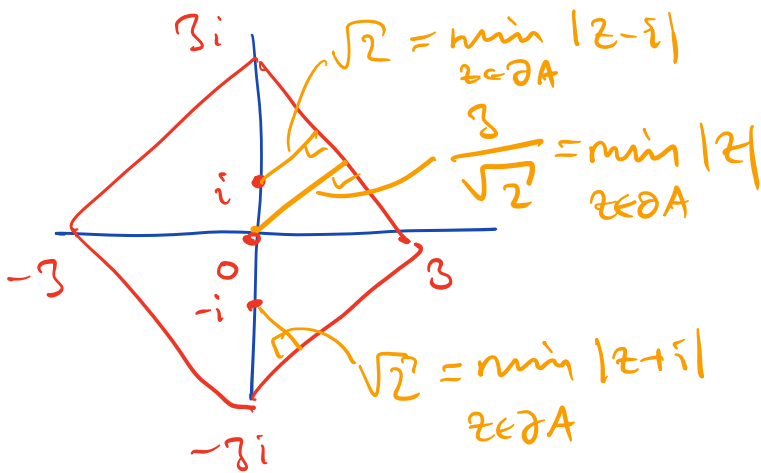
Hej Använd Rouché

$$\text{Låt } f = z^3 + z = z(z+i)(z-i)$$

$$g = e^z/3$$

obs f 's nollställen $(0, \pm i)$ ligger alla i A

obs på ∂A är $|z| = |z-0| \geq \frac{3}{\sqrt{2}}, |z-i| \geq \sqrt{2}, |z+i| \geq \sqrt{2}$



Anta

$$|f| = |z| |z-i| |z+i| \geq$$

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \text{ på } \partial A$$

Utdare, på ∂A :

$$|g| = |e^{z/3}| = e^{\operatorname{Re} z/3} \leq e^{3/3} = e$$

Anta $|g| < |f|$ på ∂A

De Rouché's sats $\Rightarrow z^3 + z + e^{z/3} = f+g$ har lika många nollställen som f i A , dvs 3 stycken.

6) Antag u harm. i $\mathbb{C}$, $u=3$ på $C(0,3)$

Låt $v(x,y)=3$ i $\mathbb{C}$. Då är v harm. i $\mathbb{C}$.

Speciellt gäller: u, v harmoniska i $D(0,3)$, kontinuerliga upp till randen & $u=v$ på randen.

Sats $\Rightarrow u=v=3$ i $D(0,3)$. Speciellt är $u \equiv 3$ på $C(0,3)$.

Anta finns ingen harmonisk funktion som uppfyller de givna villkoren.

7) Se Sats 8.15 i [BMP5] / Föreläsning 29/9 2S

8) Se Sats 8.8 i [BMP5] / Föreläsning 26/9 2S