

MVE025 Komplex matematisk analys F2 / MVE295 Komplex analys Kf2/TM2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Använd residykalkyl för att beräkna fouriertransformen av (8 p)

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}.$$

2. Avgör om det finns en hel funktion vars realdel är

$$x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5.$$

Ange i så fall en sådan funktion. (6 p)

3. Hitta en avbildning som avbildar området $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ konformt på enhetsdisken $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$. (6 p)

4. Låt

$$M(z) = \frac{4z+3}{2z+1}.$$

Beräkna (6 p)

$$\int_{|z|=5} e^{M(z)} dz.$$

5. Avgör hur många poler (räknat med multiplicitet)

$$f(z) = \frac{z^4 + 20}{z^5 + 5z^2 + z + 1}$$

har i området $\{z \in \mathbb{C}, 1 \leq |z| \leq 2\}$. (6 p)

6. Avgör om det finns en hel funktion f som uppfyller $f(1/2^n) = 1/2^n$ och $f(1/3^n) = -1/3^n$ för $n = 1, 2, 3, \dots$ (6 p)

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel. (6 p)

8. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

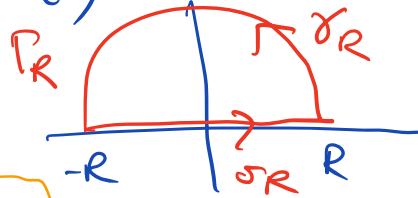
1) Endigt def $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(1+x^2)^3} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} I_R$ da $I_R = \int_{-R}^R \frac{e^{-itx}}{(1+x^2)^3} dx$

Anfang für $t \leq 0$:

Für alle betrachte I_R bei $g(z) = \frac{e^{-itz}}{(1+z^2)^3}$ & $\Gamma_R = \gamma_R \cup \sigma_R$

da $\gamma_R(s) = Re^{is} \quad s \in [0, \pi]$

$\sigma_R(s) = s \quad s \in [-R, R]$



Da $I_R = \int_{\sigma_R} g dz = \int_{\Gamma_R} g dz - \int_{\gamma_R} g dz$

• Unterteile $\int_{\sigma_R} g dz$: $\left| \int_{\sigma_R} g dz \right| \leq \max_{z \in \sigma_R} |g(z)| \cdot |\sigma_R|$
 Δ -dihk. für s $= \pi R$

Obs: $|1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ für γ_R on $R > 1$

on γ_R Δ -dihk $\uparrow$ für $R > 1$

$|e^{-itz}| = |e^{-it(x+iy)}| = |e^{ty - itx}| = e^{ty} \leq 1$ für $t \leq 0, y \geq 0$ für γ_R

Außer $|g| = \left| \frac{e^{-itz}}{(1+z^2)^3} \right| \leq \frac{1}{(R^2-1)^3}$ für γ_R on $R > 1$

$\leq \frac{1}{(R^2-1)^3} \cdot \pi R \rightarrow 0$ da $R \rightarrow \infty$

on $R > 1$

Betrachte $\int_{\Gamma_R} g dz$ mit Residuensatz:

Obs $(1+z^2)^3 = (z-i)^3(z+i)^3$ & $e^{-itz} \neq 0 \Rightarrow$

g hat polen an $\pm i$, jeweils 3. Ordnung, veran i mit Γ_R on $R > 1$

Betrachte Res $i g$: Maßstab on $g = \frac{h}{(z-i)^3}$ & $\text{Res}_i g = \frac{h^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$

Nun $g = \frac{h}{(z-i)^3}$ da $h(z) = \frac{e^{-itz}}{(z+i)^3}$

MVE 02S / MVE 29S 30/10 25

②

$$\frac{d}{dz} h = \frac{-it e^{-it} z}{(z+i)^3} + e^{-it} z \cdot \frac{-3}{(z+i)^4}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} h = \frac{(-it)^2 e^{-it} z}{(z+i)^3} + 2 \frac{-it e^{-it} z \cdot (-3)}{(z+i)^4} + \frac{e^{-it} z \cdot 12}{(z+i)^5} =$$

$$\frac{e^{-it} z}{(z+i)^5} \left[-t^2 (z+i)^2 + 6it(z+i) + 12 \right]$$

Außer $\text{Res}_i g = \frac{d^2 h}{dz^2} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2} \frac{e^b}{(2i)^5} \left[-t^2 (2i)^2 + 6it \cdot 2i + 12 \right] =$

$$\frac{e^t}{2^6 i} \left[4t^2 - 3t + 12 \right] = \frac{e^t (t^2 - 3t + 3)}{16i}$$

Außer um $R > 1$ so gut ready setzen

$$\int_{\Gamma_R} g dz = 2\pi i \text{Res}_i g = 2\pi i \frac{e^t (t^2 - 3t + 3)}{16i} = \frac{\pi e^t (t^2 - 3t + 3)}{8}$$

Außer um $t \leq 0$, so

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} g dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Gamma_R} g dz - \int_{\delta_R} g dz \right) = \frac{\pi e^t (t^2 - 3t + 3)}{8}$$

Für $t > 0$, kann berechnen $\hat{f}(t)$ so oder, man mal 

Alternativ: f reell $\Rightarrow$

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)} = \frac{\pi e^{-t} (t^2 + 3|t| + 3)}{8}$$

Sammanfattning

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-|t|} (t^2 + 3|t| + 3)}{8}$$

2) Antag f hol (helo i $\mathbb{C}$) &

$$\operatorname{Re} f = u = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$$

Di u harmonisk i $\mathbb{R}^2$. (ty reeller an helo)

Km: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 20x^3 - 60x^2y + 60xy^2 - 20y^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 20x^3 - 60x^2y + 60xy^2 - 20y^3$$

$$\Rightarrow \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 40(x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

$\Delta u = 0 \Leftrightarrow x=y=0$ Anta u ej harmonisk i $\mathbb{R}^2$

Anta ∇ helo fun vns reeller an u .

3) VM avbilde $A := \{ \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z < 0 \} = \{ re^{i\theta}, r > 0, -\pi/2 < \theta < 0 \}$

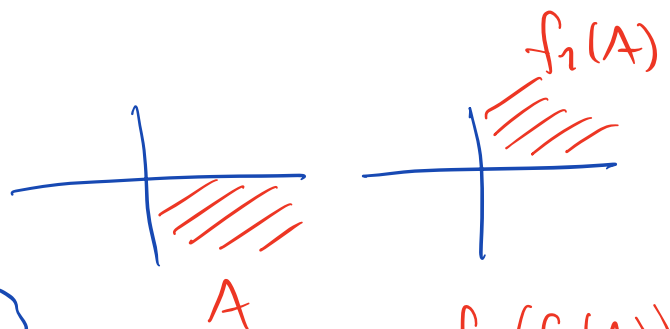
i $D := \{ |z| < 1 \}$ konform.

EM färlag:

• Lät $f_1: z \mapsto iz = e^{i\pi/2} z$

Di $f_1' = i \Rightarrow f_1$ konform i $\mathbb{C}$

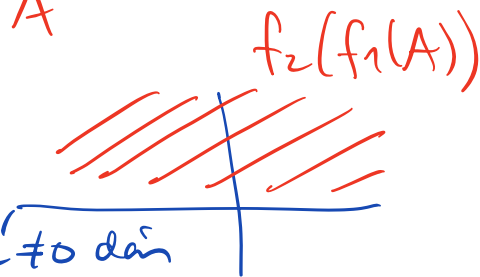
$$f_1(A) = \{ re^{i\theta}, r > 0, 0 < \theta < \pi/2 \}$$



• Lät $f_2: z \mapsto z^2$

Di $f_2' = 2z \Rightarrow f_2$ konform p A ty $f_2' \neq 0$ dan

$$f_2(f_1(A)) = \{ \rho e^{i\varphi}, \rho > 0, 0 < \varphi < \pi \} = \{ \operatorname{Im} z > 0 \} = \partial \mathbb{H}^+$$



• Hitta nu M-avb. M si dA

Jämf: velt M si dA

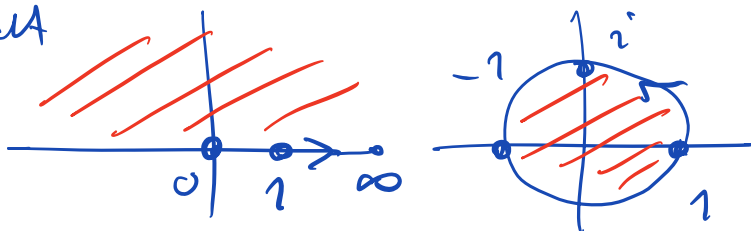
$$0 \mapsto 1$$

$$1 \mapsto i$$

$$\infty \mapsto -1$$

Di avbildes reaxel p en helo av helo

& $\partial \mathbb{H}^+$ p D , ty M -avb. bevarer orientering



Anteg $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$

Nu $M(\infty) = \frac{a}{c} = -1 \Rightarrow a \neq 0$ sis $a=1$ & $c=-a=-1$

$M(0) = \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow d=b$ Aufz $M = \frac{z+b}{-z+b}$

$M(1) = \frac{1+b}{-1+b} = i \Rightarrow 1+b = i(-1+b) \Leftrightarrow b = \frac{1+i}{i-1} = -i$

Altern $M = \frac{z-i}{-z-i} = \frac{i-z}{i+z}$

M konform bz M -abb.

Let nm $f = M \circ f_2 \circ f_1 = M \circ f_2(iz) = M((iz)^2) =$

$M(-z^2) = \frac{i - (-z^2)}{i + (-z^2)} = \frac{i + z^2}{i - z^2}$

Di $f(A) = D$ & f konform p. A bz zusammensetzen.
 or konforme abbildungen.

4) obs e^M hat unendlich viele $z = -1/2$, multi $\gamma = \text{clos}$

Res setzen gen $\int_{\text{clos}} e^M dz = 2\pi i \text{Res}_{-1/2} e^M$

Für all bleibena residyn, LSU $e^{M(z)}$ i $-1/2$:

obs $M = \frac{4z+3}{2z+1} = \frac{4z+2}{2z+1} + \frac{1}{2z+1} = 2 + \frac{1}{2} \frac{1}{z+1/2} \Rightarrow$

$e^M = e^{2 + \frac{1}{2} \frac{1}{z+1/2}} = e^2 e^{\frac{1}{2} \frac{1}{z+1/2}} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \frac{1}{z+1/2} =$

$\uparrow$ Reihe neg exp

$e^w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2}{2^k k!} \frac{1}{(z+1/2)^k}$

$$\Rightarrow \text{Res}_{-1/2} e^M = \text{koef. framför } \frac{1}{z+1/2} \stackrel{k=1 \text{ ovan}}{\downarrow} = \frac{e^2}{2}$$

$\uparrow$ def residy

$$\text{Alltså } \int_{C(0,5)} e^M dz = 2\pi i \frac{e^2}{2} = \pi e^2 i$$

5) Obs $f = \frac{(z-a_1) \dots (z-a_n)}{(z-b_1) \dots (z-b_j)(z-c_{j+1}) \dots (z-c_s)}$ nyl j

där a_i nollställen, b_j ples multi $A := \{1 \leq |z| \leq 2\}$
 c_k ples utanför A_j eftersom nämnare & täljare
 polynom med ledande koef 1

Det är klart att $|a_j| = 20^{1/4} > 16^{1/4} = 2$ och
 alltså sammanfaller a_j ej med några b_k .

Alltså # ples till f i A = # nollställen i A till

täljaren $g := z^5 + 5z^2 + z + 1$

Räkna dessa med Rouché's sats!

• Om $|z|=2$ så

$$|5z^2 + z + 1| \leq 5|z^2| + |z| + 1 = 20 + 2 + 1 = 23 < 32 = |z^5|$$

$\xRightarrow{\text{Rouché}}$ g lika många nollställen som z^5 i $D(0,2)$,
 dvs 5 stycken

Dessutom följer att $g \neq 0$ på $\{|z|=2\}$

• Om $|z|=1$ så

$$|z^5 + z + 1| \leq |z^5| + |z| + 1 = 3 < 5 = 5|z^4|$$

$\uparrow$ Δ -dikh. $\uparrow$ $|z|=1$ $\uparrow$ $|z|=1$

Runde

$\Rightarrow$ g like många nollställen som $St^2 \in D(0,1)$,
dvs 2 stycken

Antal $\# \text{ noll i } A =$

$$\# \text{ noll i } \{ |z|=2 \} + \# \text{ noll i } D(0,2) - \# \text{ noll i } D(0,1) =$$

$$0 + 5 - 2 = 3 \quad \text{Antal har } \underline{\underline{3 \text{ p\ddot{a}r i } A.}}$$

6) Antag att f är hel och att $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

De är $f(z) = z$ på mängden $\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Denne har en kuperingspunkt i 0, och därför följer det från identitetsprincipen att $f(z) = z$ i $\mathbb{C}$.

Men de är $f(\frac{1}{3^n}) = \frac{1}{3^n} \neq -\frac{1}{3^n}$. Alltså finns det ingen hel f som uppfyller $f(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2^n}$ & $f(\frac{1}{3^n}) = -\frac{1}{3^n}$.

7) Se Satz 4.27 i [BMPS]

8) Se Korollarium 5.13 i [BMPS]