

MVE025, MVE295

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F, Komplex analys Kf / TM

Datum: 2025-08-29, kl. 14:00 - 18:00.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

=====

1.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x-1}{x^4+6x^2+5}. \quad (7p)$$

(b) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+5}. \quad (2p)$$

2. Visa att funktionen

$$u(x, y) = e^{x^2-y^2} \sin 2xy$$

är harmonisk och finn en holomorf funktion $f = f(z)$, $z = x + iy$, som har realdel $u(x, y)$. (7p)

3.(a) Bestäm bilden av högra halvplanet under avbildningen $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$. (3p)

(b) Visa att linjerna $\operatorname{Re} z = c$ avbildas på cirkelbågar genom punkten 1. (2p)

(c) Finn bilden av linjen $\operatorname{Re} z = 1$. (Du får använda resultatet i (b) även om du inte visat det.) (2p)

4. Givet är funktionen $f(z) = z^3 + z^2 + 9z + 4$.

(a) Bestäm antalet nollställen till f i det högra halvplanet. (5p)

(b) Bestäm antalet nollställen till f utanför den slutna cirkelskivan med radie 2. (2p)

5. Bestäm f givet att f är holomorf i punkten 0 och $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$ för alla positiva heltal n . (7p)

6. Visa att $\operatorname{Log} \frac{1}{z} = -\operatorname{Log} z$ för alla z , i vilka principalgrenen Log av den komplexa logaritmen är holomorf. Ge exempel på en annan gren av logaritmen och tal z så att den egenskapen inte gäller. (5p)

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel. (5p)

8. Formulera och bevisa satsen om Taylorserieutveckling (= potensserieutveckling). (5p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

MVE025 / MVE295

Komplex (matematisk) analys

Lösningar 29/8 - 2025

① (a)
$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+5} e^{-ixz} dx =$$

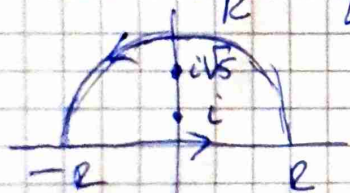
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{(x^2+5)(x^2+1)} e^{-ixz} dx$$

Närnarens nollställen är $\pm i, \pm i\sqrt{5}$
 (enkla nollställen)

$\boxed{z \leq 0}$

Tag $R > \sqrt{5}$

$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där $C_R = \{Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$
 ett vanligt matrus



$$g(z) = \frac{(z-1)e^{-izz}}{(z^2+5)(z^2+1)} \quad (z \leq 0)$$

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz = \underbrace{\int_{-R}^R g(x) dx}_{\xrightarrow{R \rightarrow \infty} f(z)} + \int_{C_R} g(z) dz$$

$$\left| \int_{C_R} g(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} (Re^{i\varphi} - 1) e^{-iRz} e^{i\varphi} e^{Rz} d\varphi}{(R^2 e^{2i\varphi} + 5)(R^2 e^{2i\varphi} + 1)} \right|$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{1 \cdot R(R+1) \cdot 1 \cdot e^{R \cos \varphi}}{(R^2 - 5)(R^2 - 1)} d\varphi \leq \begin{cases} z \leq 0 \\ R > 0 \\ \sin \varphi \geq 0 \end{cases}$$

$$\leq \frac{R(R+1)}{(R^2-5)(R^2-1)} \cdot 1 \cdot \pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\Gamma_R} g(z) dz = 2\pi i \sum_{\text{ölp}} \text{Res } g =$$

2

$$= 2\pi i \left(\underset{i}{\text{Res } g} + \underset{i\sqrt{5}}{\text{Res } g} \right) \quad \text{entkelpoler}$$

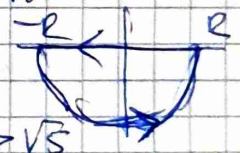
$$\underset{i}{\text{Res } g} = \frac{(z-1)e^{-i\xi z}}{(z^2+5) \cdot 2z} \Big|_{z=i} = \frac{(i-1)e^{+\xi}}{2i \cdot 4}$$

$$\underset{i\sqrt{5}}{\text{Res } g} = \frac{(z-1)e^{-i\xi z}}{(z^2+5) \cdot 2z} \Big|_{z=i\sqrt{5}} = \frac{(i\sqrt{5}-1)e^{+\xi\sqrt{5}}}{2i\sqrt{5} \cdot (-4)}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} g(z) dz = \frac{\pi i}{4} \left(\frac{(i-1)e^{+\xi}}{1} - \frac{(i\sqrt{5}-1)e^{+\xi\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left((i-1)e^{\xi} - (i\sqrt{5}-1)e^{\xi\sqrt{5}/\sqrt{5}} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4} \left((i-1)e^{\xi} - (i\sqrt{5}-1)e^{\xi\sqrt{5}/\sqrt{5}} \right), \quad \xi \leq 0$$

$\boxed{\xi \geq 0}$ Upprepa ovanstående längs 

Alternativt:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix\xi}}{x^4+6x^2+5} dx = \hat{f}(-\xi) =$$

$$= \frac{\pi}{4} \left((i-1)e^{-\xi} - \frac{1}{\sqrt{5}}(i\sqrt{5}-1)e^{-\xi\sqrt{5}} \right) \quad \begin{matrix} \xi > 0 \\ -\xi < 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{4} \left((i-1)e^{-|\xi|} - \frac{1}{\sqrt{5}}(i\sqrt{5}-1)e^{-|\xi|\sqrt{5}} \right), \quad \xi \in \mathbb{R}$$

$$(b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+6x^2+5} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-1}{x^4+6x^2+5} dx = \hat{f}(0) =$$

$$= -\frac{\pi}{4} \left(i-1 - (i\sqrt{5}-1)/\sqrt{5} \right) = -\frac{\pi}{4} \left(i-1 - i + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{\pi(\sqrt{5}-1)}{4\sqrt{5}}$$

2

$$z = x + iy, \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xy \cdot i$$

$$e^{z^2} = e^{x^2 - y^2} \cdot e^{2xy \cdot i} =$$

$$= e^{x^2 - y^2} (\cos 2xy + i \sin 2xy)$$

$$\Rightarrow -ie^{z^2} = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy - ie^{x^2 - y^2} \cos 2xy$$

$f(z) = -ie^{z^2}$ är holomorf i $\mathbb{C}$ (hel)

$$\text{och } \operatorname{Re} f(z) = e^{x^2 - y^2} \sin 2xy = u(x, y)$$

$\Rightarrow u$ harmonisk i $\mathbb{C}$

3

(a) $T(z) = \frac{z-1}{z+1}$

reella koefficienter

$$\operatorname{Re} z \mapsto \operatorname{Re} w, \quad \infty \mapsto 1, \quad 0 \mapsto -1$$

$\Rightarrow$ Im-axeln avbildas på en cirkel genom 1 och -1, och $\perp$ Re-axeln

$\Rightarrow$ Im-axeln $\mapsto$ enhetscirkeln

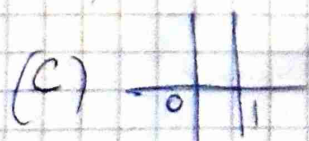
$$1 \in \text{hkp}, \quad 1 \mapsto 0$$

$\Rightarrow$ 'hkp' $\mapsto$ det mre av enhetscirkeln

$\Rightarrow \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ avbildas på $\{w: |w| < 1\}$

(b) Linjerna $\operatorname{Re} z = c$ går genom $\infty, \infty \mapsto 1$

$\Rightarrow$ avbildas på cirkelbågar genom 1



$$\operatorname{Re} z = 1, \quad 1 \mapsto 0, \quad \infty \mapsto 1$$

$\operatorname{Re} z = 1 \perp$ Re-axeln

$\Rightarrow \{\operatorname{Re} z = 1\}$ avbildas på cirkelbåge genom

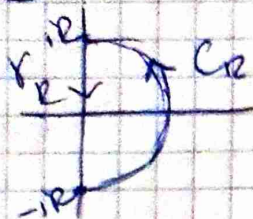
0 och 1, $\perp$ Re-axeln $\Rightarrow$ avbildas på delen av

cirkeln med diameter $[0, 1]$ innanför enhetscirkeln

④

(a) $f(z) = z^3 + z^2 + 9z + 4$

④



$\gamma_R: z = iy, y \in [-R, R]$

$C_R: z = Re^{i\varphi}, \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$

Vi vill räkna hur många varv $f(\Gamma_R)$ gör runt 0 i w-planet, för stora R.

$\gamma_R: f(iy) = -iy^3 - y^2 + 9iy + 4 =$

$= (-y^2 + 4) + i(-y^3 + 9y)$

$u = \operatorname{Re} f = -y^2 + 4; v = \operatorname{Im} f = -y^3 + 9y$

$u=0: y = \pm 2$ ($f(\gamma_R)$ skär Im-axeln)

$v(\pm 2) = \pm 10$

$v=0: y = 0, y = \pm 3$ ($f(\gamma_R)$ skär Re-axeln)

$u(0) = 4, u(\pm 3) = -5$

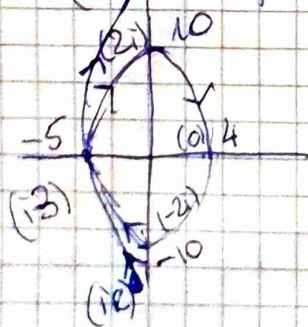
$y = \pm R, R$ stort: $|v| \gg |u|$ (högre potens)

$y = +R: u < 0, v < 0, |v| \gg |u|$

$\Rightarrow f(iR) \in \text{III kv.}, \text{ nära Im-axeln}$

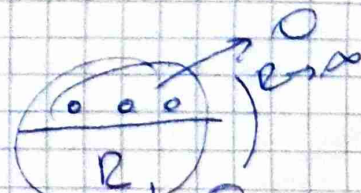
$y = -R: u < 0, v > 0, |v| \gg |u|$

$\Rightarrow f(-iR) \in \text{II kv.}, \text{ nära Im-axeln}$

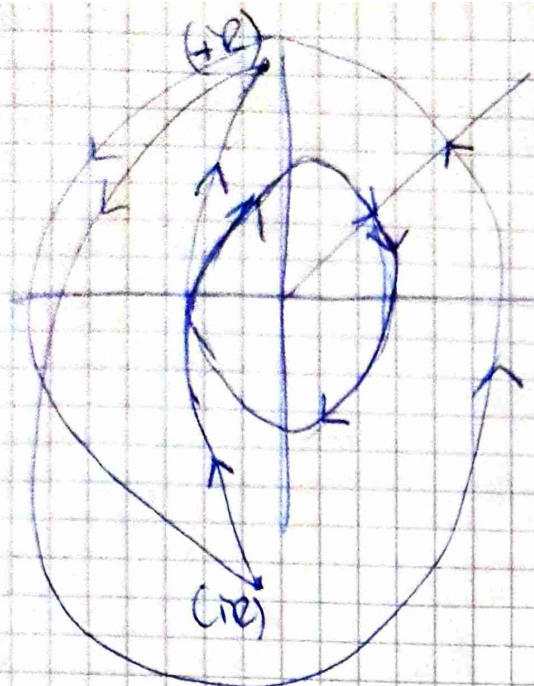


	-R	-3	-2	0	2	3	R				
u	-	-	-5	-	0	+4	+	0	-	-5	-
v	+	+	0	-	-10	-	0	+10	+	0	-

$C_R: f(Re^{i\varphi}) = Re^{3i\varphi} (1 + \dots)$



$\Rightarrow f(C_R)$ gör ungefär $\frac{3}{2}$ varv runt 0 för stora R (positiv riktning)



5

(b) $F(z) = 9z$, $G(z) = z^3 + z^2 + 4$

på $\{ |z| = 2 \}$: $|F(z)| = 18$

$|G(z)| \leq |z|^3 + |z|^2 + 4 = 16$

på cirkeln : $|F| > |G|$

$\Rightarrow F$ och $F+G$ har lika många nollställen innanför , d.v.s. ett
 $\Rightarrow f = F+G$ har två nollställen innanför $\{ |z| = 2 \}$

5,
z

f holomorf i 0 $\Rightarrow f$ holomorf i en omgivning till 0 , därmed kontinuerlig

$\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

$\Rightarrow f(0) = 0$

$\Rightarrow f(z)$ och z^2 sammanfaller på $\{0, 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}\}$
 mängden har en hopningspunkt som $\in$ mängden

$\Rightarrow f(z) = z^2$ i en omgivning till 0

enligt identitetsprincipen

$g(z) = \begin{cases} z^2 , & |z| < 2 \\ 0 , & |z| > 3 \end{cases}$ uppfyller också villkoret