MVE025, MVE295
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F, Komplex analys Kf / TM
Datum: 2025-01-09, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531 (Frågor kan ställas endast per telefon.)
==

1.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+a^2)^2},$$

där $a > 0$. (5p)

(b) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+a^2)^2}\, dx, \quad a > 0. \qquad (2p)$$

2. Hur många Laurentutvecklingar har funktionen

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+6z+5}$$

kring $z = -1$? Ange den av dem, i vilken man hittar residyn för f i punkten -1. (7p)

3. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\} \cap \{z \in \mathbb{C} : |z+i| < 1\}. \qquad (7p)$$

4. Bestäm antalet nollställen funktionen $f(z) = z^5 + 3z + 1$ har **(a)** i det vänstra halvplanet; **(b)** i cirkelringen $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{2}\}$. (7p)

5. Funktionen f har enkelpol i punkten $z_0 = a \in \mathbb{R}$. Beteckna med γ_δ halvcirkeln med medelpunkt a och radie δ från punkten $a - \delta$ till punkten $a + \delta$ (i den riktningen). Visa att

$$\lim_{\delta \to 0_+} \int_{\gamma_\delta} f(z)dz = -i\pi \mathrm{Res}_{z=a} f. \qquad (7p)$$

6. Funktionen f är holomorf i området D. Givet att $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le R\} \subset D$, visa att det finns en konstant M sådan att

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!M}{R^n}. \qquad (5p)$$

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel för första derivatan av en holomorf funktion. (5p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

MVE025 / MVE295

Komplex (matematisk) analys F/TM/Kf

9/1 - 2025

1. (a)

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+a^2)^2}\,dx =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+a^2)^2}\,dx$$

Definiera $\tilde{f}(z) = \dfrac{e^{-iz\xi}}{(z^2+a^2)^2}$.

Låt $\Gamma_R = [-R,R] \cup C_R$, moturs

där $C_R = \{ z = Re^{i\theta} : \theta \in [0,\pi] \}$,

$R > a$

$$\int_{\Gamma_R} \tilde{f}(z)\,dz = \int_{-R}^{R} \tilde{f}(z)\,dz + \int_{C_R} \tilde{f}(z)\,dz =$$

$$= 2\pi i \sum_{\substack{z_k \text{ innanför} \\ \Gamma_R}} \operatorname{Res}_{z_k} \tilde{f} = 2\pi i \operatorname{Res}_{ai} \tilde{f}$$

$$\int_{-R}^{R} \tilde{f}(z)\,dz \longrightarrow \hat{f}(\xi)$$

Låt $\xi \leq 0$.

$$\left| \int_{C_R} \tilde{f}(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\xi Re^{i\theta}}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta \right| =$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{-i\xi R\cos\theta} \cdot e^{\xi R\sin\theta}}{(R^2e^{2i\theta}+a^2)^2}\, iRe^{i\theta}\,d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1\cdot 1\cdot 1\cdot R\cdot 1}{(R^2-a^2)^2}\cdot\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \triangle$$

ty

$$|e^{i\cdot\text{reellt}}|=1 \;;\; R\xi\sin\theta\leq 0 \quad \forall\theta\in[0,\pi]$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = 2\pi \operatorname*{Res}_{ai}\tilde{f}$$

ai dubbelpol

$$\operatorname*{Res}_{ai}\tilde{f} = \frac{1}{1!}\left((z-ai)^2\tilde{f}(z)\right)'\Big|_{z\to ai} =$$

$$=\left(\frac{e^{-iz\xi}}{(z+ai)^2}\right)'\Bigg|_{z=ai} = \frac{-i\xi e^{-iz\xi}(z+ai)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+ai)}e^{-iz\xi}}{(z+ai)^{\cancel{4}\,3}}\Bigg|_{z=ai}$$

$$=\frac{-i\xi e^{a\xi}\cdot 2ai - 2e^{a\xi}}{(2ai)^3} = \frac{\cancel{2}a\xi-\cancel{2}^{1}}{\cancel{2}\cdot 4a^3(-i)}e^{a\xi}$$

$$2\pi\operatorname*{Res}_{ai}\tilde{f} = \frac{\pi(\cancel{2}-\cancel{2}a\xi)}{\cancel{2}\cdot 2a^3}e^{a\xi} = \frac{\pi(1-a\xi)e^{a\xi}}{2a^3}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi(1-a\xi)}{2a^3}e^{a\xi} \quad \text{för } \xi\leq 0.$$

För $\xi\geq 0$: man kan göra om kalkylen i nhp med $\tilde{C}_R=\{z=Re^{i\theta}:\ \pi\leq\theta\leq 2\pi\}$, eller:

$$f \text{ reell} \Rightarrow \overline{e^{-ix\xi}f(x)} = e^{ix\xi}f(x) =$$

$$= e^{-ix(-\xi)}f(x) \quad,\ -\xi\leq 0$$

$$\Rightarrow \overline{\hat{f}(\xi)} = \hat{f}(-\xi) = \frac{\pi(1+a\xi)}{2a^3}e^{-a\xi}$$

$\xi\leq 0$: $\xi=-|\xi|$; $\xi\geq 0$: $-\xi=-|\xi|$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi(1+a|\xi|)}{2a^3}e^{-a|\xi|}$$

1 (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \hat{f}(2)$, 3

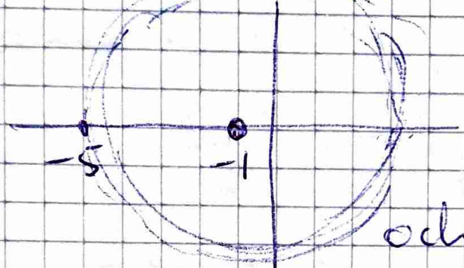
eftersom $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{(x^2+a^2)^2}\,dx = 0$

udda

$$\hat{f}(2) = \frac{\pi(1+2a)}{2a^3} e^{-2a}$$

---

2. $z^2+6z+5 = (z+1)(z+5)$



Två: i $\{0<|z+1|<4\}$ och i $\{|z+1|>4\}$

Res: vi behöver utvecklingen i den punkterade omgivningen till $z_0=-1$

$$\frac{z-1}{(z+1)(z+5)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+5}$$

$$z-1 = A(z+5) + B(z+1)$$

$z=-1$: $-2 = 4A$ $\quad A = -\frac{1}{2}$

$z=-5$: $-6 = -4B$ $\quad B = \frac{3}{2}$

$\frac{1}{z+1}$ "färdigutvecklad" term (i potenser av $z+1$)

$$\frac{1}{z+5} = \frac{1}{4+(z+1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z+1}{4}} =$$

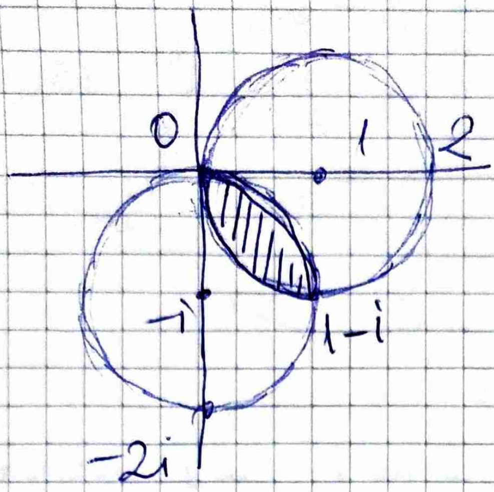
holomorf i området

$$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{z+1}{4} + \frac{(z+1)^2}{4^2} - \ldots + \frac{(-1)^k(z+1)^k}{4^k} + \ldots\right)$$

återstår att plocka ihop

3

4



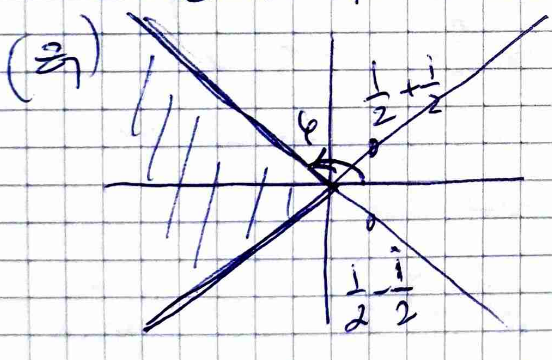
Cirklarna skär varandra i 0 och i $1-i$

Möbius: $z_1 = T(z) = \frac{z-(1-i)}{z}$ $1-i \to 0$, $0 \to \infty$

$\Rightarrow$ cirklarna avbildas på räta linjer genom 0

$2 \to \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$; $-2i \to \frac{-1-i}{-2i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

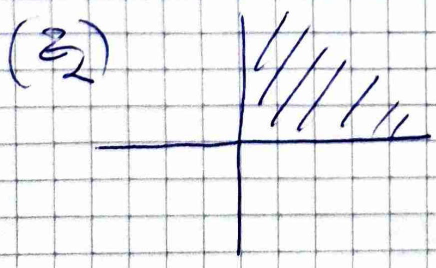
2 & $-2i$ tillhör inte randen till området vi avbildar $\Rightarrow$ deras bilder tillhör inte randen till bilden



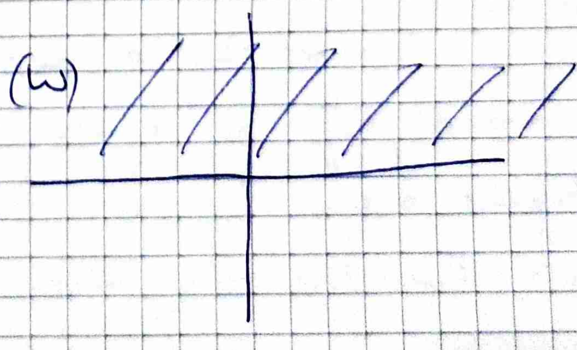
$\Rightarrow$ vi får det streckade området i z_1-planet

$\varphi = \frac{3\pi}{4}$

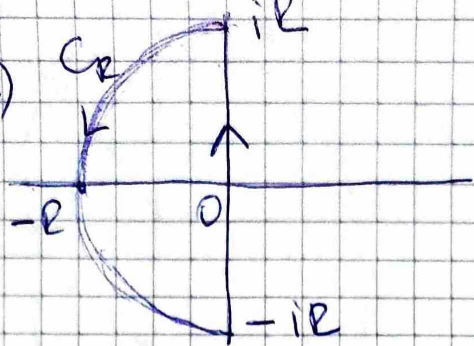
$z_2 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} z_1$ roterar $\frac{3\pi}{4}$ moturs



$w = z_2^2$



(4.) (a)



Γ_R = sträckan från $-iR$ till iR $\cup$ C_R

$C_R = \{z = Re^{i\theta} : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$

Sträckan på Im-axeln:

$z = iy$, $y \in [-R, R]$ (i den riktningen)

$f(iy) = (iy)^5 + 3iy + 1 = i(y^5 + 3y) + 1$

$\text{Re } f = u = 1 \quad \forall y \in [-R, R]$

$\text{Im } f = v = y^5 + 3y = y(y^4 + 3)$

$\Rightarrow$ bilden av sträckan skär aldrig Im-axeln; skär Re-axeln en gång, för $y = 0$.

$v \gg u$ för stora $|y|$ $\quad v(-R) < 0$

$\rightarrow$ man börjar i IV kv. nära Im-axeln
slutar i I kv. nära Im-axeln

C_R: $f(z) = z^5 + 3z + 1 = z^5\left(1 + \frac{3}{z^4} + \frac{1}{z^5}\right)$

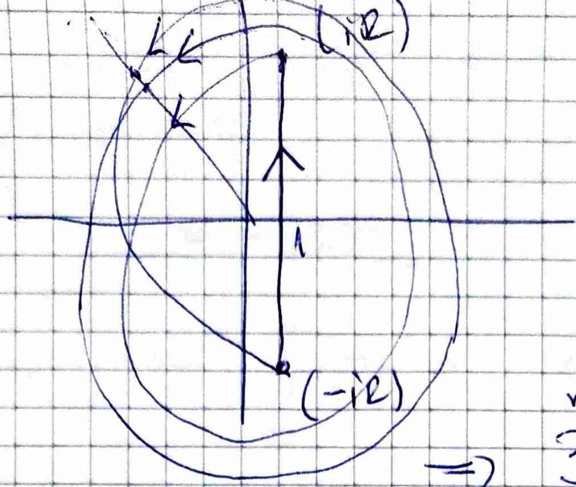
Sätt in $z = Re^{i\theta}$:

$$f(Re^{i\theta}) = R^5 e^{5i\theta}\Big(1 + \underbrace{\boxed{\frac{3}{R^4 e^{4i\theta}} + \frac{1}{R^5 e^{5i\theta}}}}_{\to 0 \text{ , } R\to\infty}\Big)$$

$\rightarrow$ ger inget bidrag för varv runt 0 för stora R

När θ genomlöper ett intervall med längd π kommer 5θ att genomlöpa ett intervall med längd 5π

6



$\Rightarrow$ tre varv runt 0 i positiv riktning

$\Rightarrow$ 3 nollställen i vhp

(b) Rouchés sats

$|z| = 1$: $|3z| = 3|z| = 3$

$|z^5 + 1| \leq |z|^5 + 1 = 2$

$\Rightarrow f$ har ett nollställe innanför $\{|z| = 1\}$ (inget på cirkeln)

$|z| = \sqrt{2}$: $|z|^5 = (\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$

$|3z+1| \leq 3|z| + 1 = 3\sqrt{2} + 1 < 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow f$ har fem nollställen innanför $\{|z| = \sqrt{2}\}$ (inget på den cirkeln)

$\Rightarrow f$ har $5 - 1 = 4$ nollställen i cirkelringen $\{1 < |z| < \sqrt{2}\}$

---

5. $f(z) = \dfrac{g(z)}{z-a}$, där g är holomorf i $z_0 = a$, kan Taylorutvecklas

$\gamma_\delta = \{ z = a + \delta e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi] \}$

$$\int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz = \int_{\gamma_\delta} \frac{g(z)}{z-a}\,dz = \int_{\gamma_\delta} \left(\frac{a_0}{z-a} + a_1 + a_2(z-a) + \ldots \right) dz$$

$$= \int_{\gamma_\delta} \frac{a_0}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_\delta} \text{holomorf funktion}\,dz$$

$$\int_{\gamma_\delta} \frac{a_0}{z-a}\,dz = a_0 \int_{\pi}^{0} \frac{\cancel{\delta} i \cancel{e^{i\theta}}}{\cancel{\delta} \cancel{e^{i\theta}}}\,d\theta =$$

$$= -i\pi a_0$$

$$\left| \int_{\gamma_\delta} \underbrace{\text{holomorf funktion}}_{\phi}\, dz \right| \leq \underbrace{\max|\phi|}_{\text{begränsat}} \cdot l(\gamma_\delta)$$

$$\leq M \cdot \pi\delta \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz \xrightarrow[\delta \to 0]{} -i\pi a_0$$

$$g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \ldots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{a_0}{z-a} + a_1 + a_2(z-a) + \ldots$$

$$\Rightarrow a_0 = \operatorname{Res}_{z_0=a} f$$

$$\Rightarrow \lim_{\delta \to 0} \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz = -i\pi \operatorname{Res}_{a} f$$