MVE025, MVE295
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F, Komplex analys Kf / TM
Datum: 2024-10-31, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531 (Frågor kan ställas endast per telefon.)
===

1.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)},$$

där $a > b > 0$. (5p)

(b) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}\, dx, \quad a > b > 0. \qquad \text{(2p)}$$

2.(a) Ge definitionen av z-transform av en talföljd $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$. (2p)

(b) Antag att $Z(\{x_n\}_{n=0}^{\infty}) = X(z)$. Visa att $Z(\{nx_n\}_{n=0}^{\infty}) = -zX'(z)$. (5p)

3. Avbilda konformt på övre halvplanet området

$$\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\} \setminus \{z : z = t\sqrt{3} + it,\ t \in \mathbb{R},\ t > 1\}. \qquad \text{(7p)}^1$$

4. Bestäm antalet nollställen funktionen $f(z) = z+3+2e^z$ har i det vänstra halvplanet. Bestäm R så att funktionen $\dfrac{1}{f}$ är holomorf i mängden $\{z : |z| > R,\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$. (7p)

5. Finns det en hel funktion f sådan att $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin\dfrac{1}{n}$, för alla positiva heltal n? Om nej, varför inte? Om ja, hur många sådana finns det? (7p)

6. Funktionen f har isolerad singularitet i z_0 och är begränsad i en punkterad omgivning till z_0. Visa att f:s Laurentutveckling i en punkterad omgivning till z_0 inte innehåller några negativa potenser av $z - z_0$. (5p)

7. Formulera och bevisa Cauchys integralformel för första derivatan av en holomorf funktion. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

[1] Det skulle ha stått $t \geq 1$, ber om ursäkt.

MVE025 / MVE295

Komplex (matematisk) analys F/TM/Kf

31/10 -2024

1.a $\quad f(x) = \dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$

Partialbråksuppdela: $\dfrac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+a^2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+b^2}$

$$1 = (Ax+B)(x^2+b^2) + (Cx+D)(x^2+a^2)$$

$x^3: \quad 0 = A + C \quad \Rightarrow C = -A$

$x^1: \quad 0 = Ab^2 + Ca^2 \Rightarrow A(b^2-a^2) = 0$

$\quad\quad \Rightarrow A = C = 0$

$x^2: \quad 0 = B + D \quad \Rightarrow D = -B$

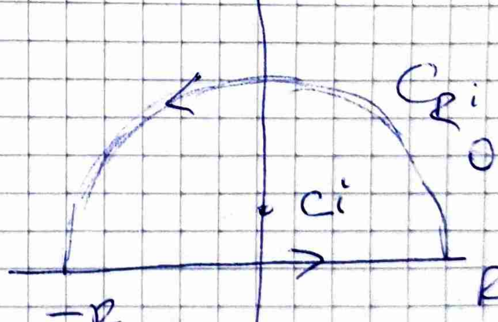
$x^0: \quad 1 = Bb^2 + Da^2 \Rightarrow B(b^2-a^2) = 1$

$$\Rightarrow B = -\frac{1}{a^2-b^2}, \quad D = \frac{1}{a^2-b^2}$$

Fouriertransformen är linjär, så man kan transformera partialbråken för sig. De är av samma typ.

$g(z) = \dfrac{e^{-iz\xi}}{z^2+c^2}, \; c > 0$ $\qquad$ $C_R: \; z = Re^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$

Låt $\xi \le 0$. Γ_R:



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R, \; R > c$ (ett varv moturs)

$$\int_{\Gamma_R} = \int_{-R}^{R} + \int_{C_R} \qquad \int_{-R}^{R} g(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2+c^2}\,dx$$

$\boxed{2}$

$$\left|\int_{C_R} g(z)\,dz\right| = \left|\int_{C_R} \frac{e^{-iz\xi}}{z^2+c^2}\,dz\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\pi} \frac{e^{-iR\xi\cos\theta} \cdot e^{R\xi\sin\theta}}{R^2 e^{2i\theta} + c^2} \cdot Rie^{i\theta}\,d\theta\right| \leq$$

$$\leq \int_0^{\pi} \frac{1 \cdot e^{R\xi\sin\theta}}{R^2 - c^2} \cdot R \cdot 1 \cdot 1\,d\theta \leq$$

$$\leq \frac{\pi R}{R^2-c^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0,$$

eftersom $\xi \leq 0$, $\sin\theta \geq 0$ i $[0;\pi]$

s.a. $R\xi\sin\theta \leq 0$,

$$e^{R\xi\sin\theta} \leq 1$$

$\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{ci} g$, eftersom den enda singulariteten g har i öhp är ci, det är en enkelpol

$$\operatorname{Res}_{ci} g = \left.\frac{e^{-iz\xi}}{2z}\right|_{z=ci} = \frac{e^{c\xi}}{2ci}$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = \frac{\pi e^{c\xi}}{c} \xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{x^2+c^2}\,dx$$

oberoende av R

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{\pi e^{b\xi}}{b} - \frac{\pi e^{a\xi}}{a}\right), \quad \xi \leq 0$$

Låt $\underline{\xi > 0}$: $\underline{-\xi < 0}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix\xi}}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx =$$

$$= \hat{f}(-\xi) = \frac{\pi}{a^2-b^2}\left(\frac{e^{-b\xi}}{b} - \frac{e^{-a\xi}}{a}\right)$$

$\xi \le 0$: $\xi = -|\xi|$

$\xi > 0$: $-\xi = -|\xi|$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{ab(a^2-b^2)}\left(ae^{-b|\xi|} - be^{-a|\xi|}\right)$$

(b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \operatorname{Re} \hat{f}(1)$$

eftersom $e^{-ix\xi}\Big|_{\xi=1} = e^{-ix} =$

$= \cos x + i\sin(-x)$

(cos jämn)

$\hat{f}(\xi)$ reell

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,dx = \frac{\pi}{ab(a^2-b^2)}\left(ae^{-b} - be^{-a}\right)$$

---

2. (b) $$Z\left(\{nx_n\}_{n=0}^{\infty}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^n} = z\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx_n}{z^{n+1}} =$$

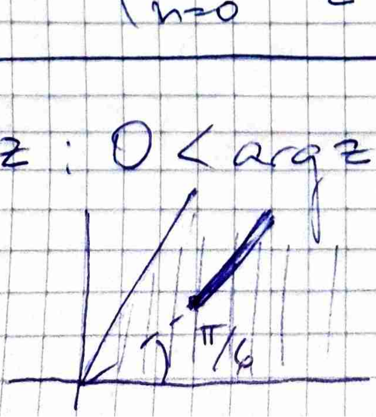
$$= z\sum_{n=1}^{\infty} x_n\left(-\frac{1}{z^n}\right)' = -z\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}\right)' =$$

$$= -z\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{z^n}\right)' = -zX'(z)$$

---

3. $$\left\{z : 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\} \setminus \left\{z : z = t\sqrt{3} + it,\ t \geq 1\right\}$$

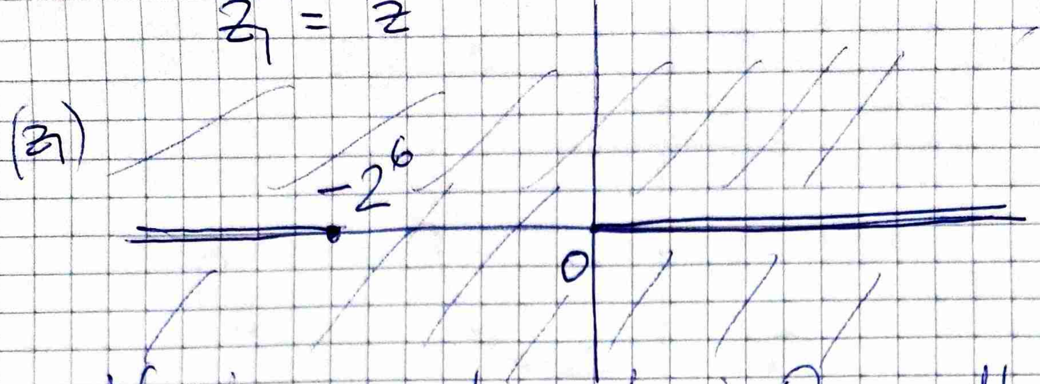
(z)



insidan till $\frac{\pi}{3}$ − vinkel

snittet vid $\frac{\pi}{6}$

$z_1 = z^6$



Vinklar med spets i 0 multipliceras med 6; snittet går över i ett snitt längs negativa realaxeln ($6 \cdot \frac{\pi}{6} = \pi$), från -2^6 till ∞; vinkelns två axlar avbildas på positiva realaxeln, men eftersom området är öppet bildas ett snitt längs hela positiva realaxeln.

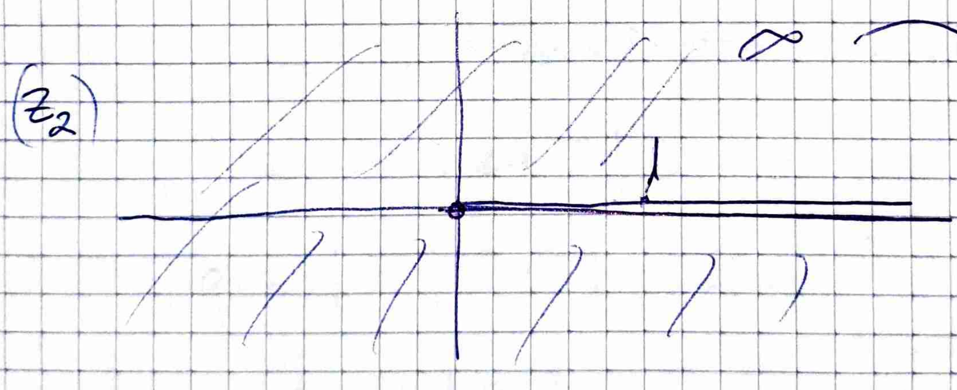
$$z_2 = \frac{z_1}{z_1 + 2^6}$$

$0 \to 0$

$-2^6 \to \infty$

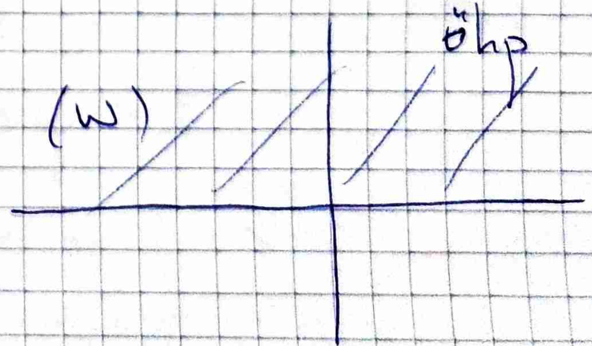
Re-axeln $\to$ Re-axeln

$\infty \to 1$

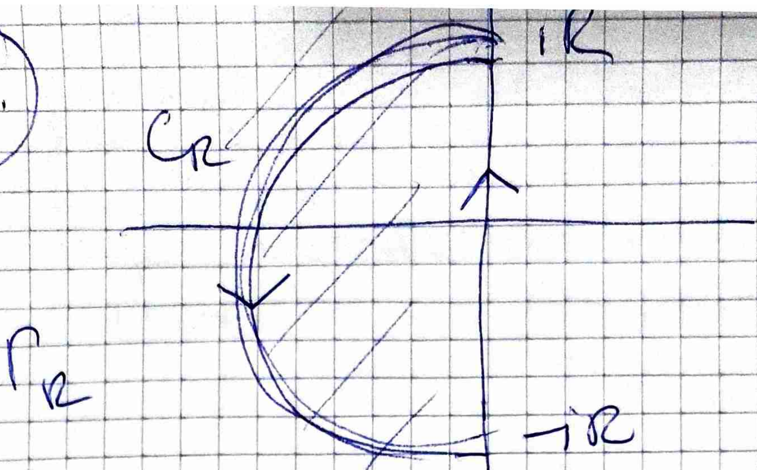


snittet avbildas på ett snitt längs hela positiva realaxeln i z_2-planet

$$w = z_2^{1/2} = \left(\frac{z^6}{z^6 + 2^6} \right)^{1/2}$$



4.



Låt

$f(z) = z+3$

$g(z) = 2e^{z}$

C_R: en stor halvcirkel med radie R i vhp; f & g holomorfa innanför Γ_R

$z = Re^{i\theta}$, $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{3\pi}{2}$

Från $-iR$ till iR på imaginäraxeln:

$|f(z)| = |3+it| = \sqrt{3^2+t^2} \geq 3$

$|g(z)| = |2e^{it}| = 1 \cdot 2 < 3$

$\Rightarrow |f| > |g|$ på Im-axeln

På C_R: (vi använder Rouchés sats)

$|f(z)| = |z+3| \geq |z|-3 = R-3$

$|g(z)| = |2e^{z}| = 2e^{\operatorname{Re} z} \le 2 \cdot e^{0} = 2$

$\Rightarrow |f| > |g|$ på C_R för stora R

$\Rightarrow f$ o $f+g$ har lika många nollställen innanför Γ_R, d.v.s. ett, för alla $R > 5$, $f+g = f$

$R \to \infty \Rightarrow$ ett nollställe i vhp enl. Rouchés sats

6

$f = \tilde{f} + g$ har ett nollställe i vhp innanför Γ_R $\forall$ $R > 5$

$\Rightarrow$ inga nollställen utanför Γ_R i vhp för $R > 5$

$\Rightarrow$ $f \neq 0$ i $\{z : |z| > 5, \operatorname{Re} z < 0\}$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ holomorf i den mängden

5.

f hel $\Rightarrow$ f kontinuerlig

sin hel

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \sin \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $f(z) = \sin z$ i mängden

$$\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$$

mängden har en hopningspkt (0)

$\Rightarrow$ enligt identitetsprincipen gäller

$f(z) = \sin z$ i hela $\mathbb{C}$