MVE025, MVE295
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F, Komplex analys Kf / TM
Datum: 2024-08-30, kl. 14:00 - 18:00.
Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.
Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

==

1.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+9)^2} \qquad (7\text{p})$$

(b) Beräkna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+9)^2}\, dx, \quad a \in \mathbb{R}. \qquad (2\text{p})$$

2. Finn en holomorf funktion $f = f(z),\ z = x + iy$, som har realdel

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}.$$

Kan man välja f så att $f(1) = 0$? (6p)

3. Ange två Laurentutvecklingar för funktionen

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2+5z+6}$$

kring 0. Redogör noga för var de konvergerar. (6p)

4. Givet är funktionen $f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2$.

(a) Bestäm antalet nollställen till f i det högra halvplanet. (4p)

(b) Bestäm ett positivt tal r sådant att funktionen $g = \dfrac{1}{f}$ är holomorf utanför den slutna cirkelskivan med radie r. (2p)

5. Bestäm bilden av området $\{|z-i| < 1\} \cap \{|z-1| > 1\}$ under avbildningen $f(z) = \left(\dfrac{z-(1+i)}{z}\right)^2$. (5p)

6. Låt Ω vara ett område i $\mathbb{C}$. Visa att funktionen $f(z) = \overline{z}$ inte har någon primitiv funktion i Ω. (5p)

7.(a) Formulera Cauchys integralformel för derivatan av en holomorf funktion. (2p)

(b) Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

8. Formulera och bevisa satsen om Laurentserieutveckling. (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM

MVE025 / MVE295

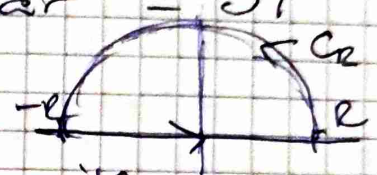
Komplex (matematisk) analys F/TM/Kf

Lösningar 30/8 -2024

1 (a) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{-ix\xi}}{(x^2+9)^2}\,dx$$

nämnarens nollställen är $\pm 3i$

$\boxed{\xi \le 0}$ Tag $R > 3$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där $C_R = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$,

$$g(z) = \frac{ze^{-iz\xi}}{(z^2+9)^2} \qquad (\xi \in \mathbb{R},\ \xi \le 0)$$

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = \int_{-R}^{R} g(x)\,dx + \int_{C_R} g(z)\,dz$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{-ix\xi}}{(x^2+9)^2}\,dx \xrightarrow[R\to\infty]{} \hat{f}(\xi)$$

$$\left|\int_{C_R} g(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{iR^2 e^{2i\varphi} e^{-i\xi R\cos\varphi} \cdot e^{\xi R\sin\varphi}}{(R^2e^{2i\varphi}+9)^2}\,d\varphi\right| \le$$

$$\le \int_0^{\pi} \frac{1 \cdot R^2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot e^{\xi R\sin\varphi}}{(R^2-9)^2}\,d\varphi \le \left[\begin{array}{l} \xi \le 0 \\ R > 0 \\ \sin\varphi \ge 0 \end{array}\right]$$

$$\le \frac{R^2}{(R^2-9)^2}\cdot\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\int_{\Gamma_R} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} g = 2\pi i \operatorname*{Res}_{3i} g$$

2

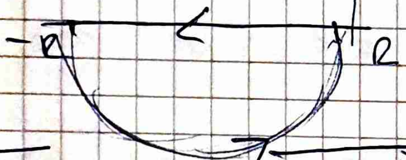
$$\operatorname*{Res}_{3i} g = \left(\frac{z e^{-i\xi z}}{\cancel{(z-3i)^2}(z+3i)^2} \cdot \cancel{(z-3i)^2} \right)' \Bigg|_{z=3i} =$$

$$= \frac{\left(e^{-i\xi z} - i\xi z e^{-i\xi z}\right)(z+3i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+3i)}\, z e^{-i\xi z}}{(z+3i)^{\cancel{4}\,3}} \Bigg|_{z=3i} =$$

$$= \frac{e^{3\xi}\left(\cancel{3i} + \cancel{3i} + (3i)^2(-i\xi) + 3\xi \cdot 3i - \cancel{6i}\right)}{6^3 \cdot (-i)} =$$

$$= \frac{18\,\cancel{i}\,\xi e^{3\xi}}{6^3 \cdot (-\cancel{i})} = -\frac{\xi e^{3\xi}}{12}, \quad \hat{f}(\xi) = -\frac{\pi i \xi e^{3\xi}}{6}$$

$\boxed{\xi > 0}$ Man kan antingen upprepa ovanstående kalkyl & uppskattningar längs



, eller:

$$\overline{\hat{f}(\xi)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-ix\xi}}{(x^2+9)^2}\,dx} \overset{(x \in \mathbb{R})}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{ix\xi}}{(x^2+9)^2}\,dx =$$

$$= \hat{f}(-\xi) = \frac{\pi i \xi e^{-3\xi}}{6}, \quad \xi > 0$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} = -\frac{\pi i \xi e^{-3\xi}}{6} \quad (\xi > 0)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = -\frac{\pi i \xi e^{-3|\xi|}}{6}$$

(b) $e^{-ix\xi} = \cos(\xi x) - i\sin(\xi x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos \xi x}{(x^2+9)^2}\,dx = 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \xi x}{(x^2+9)^2} = i\hat{f}(\xi) = \frac{\pi \xi e^{-3|\xi|}}{6}$$

udda

(2.) $x^2-y^2 = \operatorname{Re} z^2$ $\triangle$ 3

Sätt $u_1(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$

$$(CR)\left|\begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \quad (\text{om } \exists v_1) \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow v_1(x,y) = -2x\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy + \varphi(x) =$$

$$= x(-1)\int \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi \equiv \text{const } (\in \mathbb{R})$$

$\Rightarrow \exists v_1$ harmoniskt konjugat till u_1 $(z \neq 0)$

$$u_1 + iv_1 = iC + \frac{y+ix}{x^2+y^2} = iC + i\frac{x-iy}{x^2+y^2} =$$

$$= i\frac{1}{x+iy} + iC$$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 + i\frac{1}{z} + iC \quad (C \in \mathbb{R})$$

har realdel u

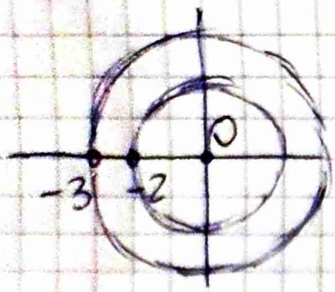
$$f(1) = 1 + i + iC$$

$C \in \mathbb{R} \Rightarrow C$ kan inte väljas s.a. $f(1)=0$

(3.) $$f(z) = \frac{z-1}{z^2+5z+6} = \frac{z-1}{(z+2)(z+3)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z+3}$$

$$= \frac{-3}{z+2} + \frac{4}{z+3}$$

4



Laurentutvecklingar kring 0 : i $\{2 < |z| < 3\}$ och i $\{|z| > 3\}$

$\boxed{2 < |z| < 3}$ $\quad \dfrac{1}{z+3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{1+\frac{z}{3}} =$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \dots + \frac{(-1)^n z^n}{3^n} + \dots\right)$$

konvergent i $\left\{\left|\frac{z}{3}\right| < 1\right\}$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z}} =$$

$$= \frac{1}{z}\left(1 - \frac{2}{z} + \frac{4}{z^2} - \dots + \frac{(-1)^n 2^n}{z^n} + \dots\right)$$

konvergent i $\left\{\left|\frac{2}{z}\right| < 1\right\} = \{|z| > 2\}$

Återstår att lägga ihop $\dfrac{4}{z+3}$ o $\dfrac{-3}{z+2}$.

$\boxed{|z| > 3}$ För $\dfrac{1}{z+2}$ som ovan

$(|z| > 3 \Rightarrow |z| > 2)$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1+\frac{3}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \dots + \frac{(-1)^n 3^n}{z^n} + \dots\right)$$

Återstår att lägga ihop $\dfrac{4}{z+3}$ o $\dfrac{-3}{z+2}$.

---

4. (a) $f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - z + 2$

$\Gamma_R = \gamma_R \cup C_R$, $\quad C_R = \{Re^{i\varphi} : \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}$

$\gamma_R = \{iy : y \in [-R, R]\}$

Vi vill räkna antalet varv $f(\Gamma_R)$ går runt origo i w-planet för stora R.

γ_R : $f(iy) = y^4 + 2iy^3 - 3y^2 - iy + 2$

$u = \mathrm{Re} f$ $\quad u(y) = y^4 - 3y^2 + 2 =$
$= (y-1)(y+1)(y-\sqrt{2})(y+\sqrt{2})$

$v = \mathrm{Im} f$ $\quad v(y) = 2y^3 - y = 2y\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(y + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

($f \neq 0$ på γ_R)

$R \longrightarrow +\infty$: $u, v \longrightarrow +\infty$, $u \gg v$
$R \longrightarrow -\infty$: $u \to +\infty$, $v \to -\infty$, $|u| \gg |v|$

$\Rightarrow$ $f(iR) \in$ I kv. , nära u-axeln
$f(-iR) \in$ IV kv. , —— u ——

	$-R$		$-\sqrt{2}$		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		$\sqrt{2}$		R
u	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	2	$+$	$\frac{3}{4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
v		$-$	$-3\sqrt{2}$	$-$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	1	$+$	$3\sqrt{2}$	$+$	

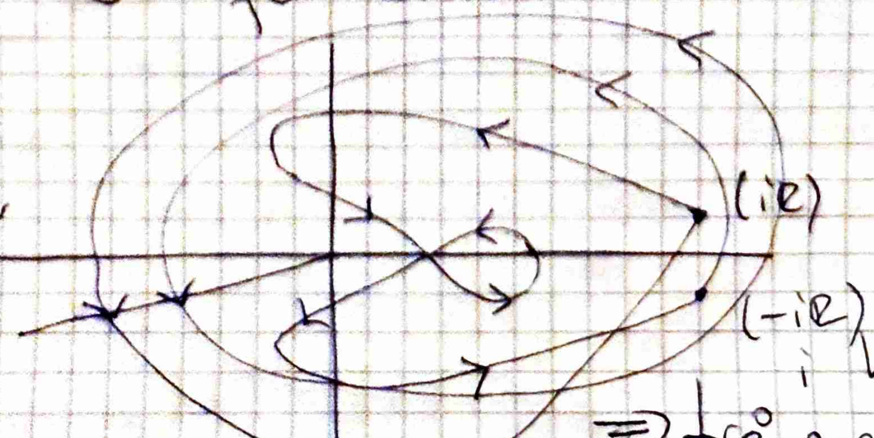
f på C_R : $f(Re^{i\varphi}) = R^4 e^{4i\varphi}\left(1 + \frac{\text{lägre gradtal i } R}{R}\right)$

$\xrightarrow{R \to \infty} 0$

$\Rightarrow f(C_R)$ gör ≈ 2 varv runt 0 för stora R

(w)

två varv runt 0



i hhp fenus

$\Rightarrow$ två nollställen

(b) $\underset{=}{r}$ s. a. $f \neq 0$ utanför $\{|z| \le r\}$

Tag $r = 10$, $F(z) = z^4$, $G(z) = f(z) - F(z)$

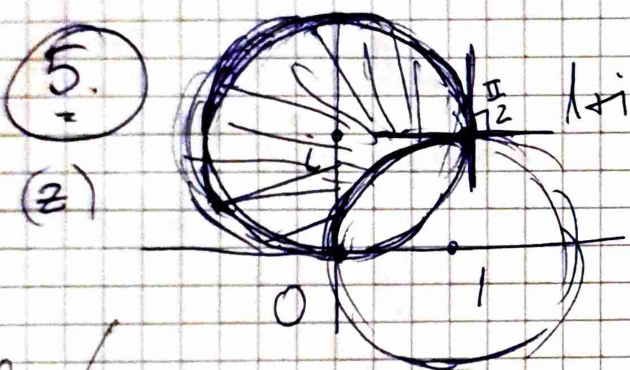
$|F(z)| = 10^4$ för $|z| = r = 10$

$|G(z)| \le 2|z|^3 + 3|z|^2 + |z| + 2 =$

$= 2312 < 10^4$

$\Rightarrow$ enligt Rouchés sats är $1/f$ holomorf i $\{|z| > 10\}$

5.



$$f(z) = \left(\frac{z-(1+i)}{z}\right)^2$$

$$f_1(z) = \frac{z-(1+i)}{z}$$

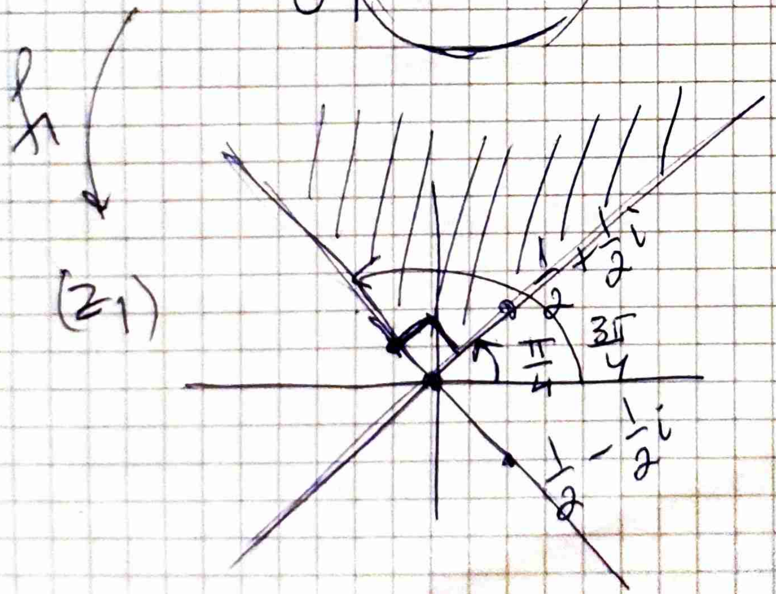
$1+i \to 0$

$0 \to \infty$

$\Rightarrow$ cirklarna $\to$ räta linjer genom 0

$2 \to \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$

$2i \to \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$



cirklarna bildar rät vinkel

avbildningen f_1 är konform $\Rightarrow$ området avbildas på en av "kvadranterna" som bildas randen $\ni \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, $\not\ni \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \Rightarrow$ den streckade

$f_2 \downarrow$ $\qquad f_2(z_1) = w = z_1^2$

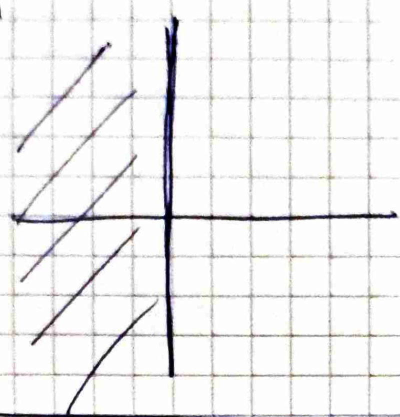
(w)

f_2 dubblar vinklarna i origo

$\Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \curvearrowright \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{3\pi}{4} \curvearrowright \frac{3\pi}{2}$

(w)



$\Rightarrow$ området avbildas av f på vhp

6. Antag att $\overline{z} = f_1'(z)$ för någon holomorf funktion f_1 i Ω. Då är f_1' också holomorf i Ω och uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer. Det gör inte $f(z)=\overline{z}$, alltså är f inte derivatan av någon holomorf funktion och saknar därmed primitiv i Ω.