MATEMATIK **Hjälpmedel: Inga, inte ens räknedosa**

Chalmers tekniska högskola Datum: 2023-10-26 kl. 8.30–12.30

Tentamen Telefonvakt: Elizabeth Wulcan / David Witt Nyström (om Elizabeth ej kan nås)

Telefon: 031-772 53 47 / 076-779 4288

MVE025 Komplex matematisk analys F2 / MVE295 Komplex analys Kf2/TM2

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.
Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).
Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

---

1. Använd residykalkyl för att beräkna integralen (7 p)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx.$$

2. Låt $G = \{x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ och låt $u(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2}) - 2x$. (6 p)

(a) Visa att u är harmonisk i G genom att använda definitionen.

(b) Avgör om u har ett harmoniskt konjugat $v(x,y)$ i G. Ange i så fall ett sådant.

3. (a) Beräkna Z-transformen av $\alpha = (a_k)_{k=0}^{\infty}$, där $a_k = a^k$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) Lös med hjälp av Z-transformen differensekvationen

$$a_{k+1} + 2a_k = 2^k$$

med begynnelsevärde $a_0 = 0$. (6 p)

4. Bestäm bilden av $D(1/2, 1/2)$ under avbildningen

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2z + 1}.$$

Tips: Skriv f som en sammansättning av enklare avbildningar. (6 p)

5. Avgör hur många nollställen polynomet

$$1 + z + z^2 - z^3 + z^4 + z^5 - z^6 + z^7 - z^8$$

har i området $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z > 2\}$. (6 p)

6. Antag att f är holomorf i $D(0,1)^* = \{0 < |z| < 1\}$, att f inte är identiskt lika med 0 i $D(0,1)^*$ och att $f(1/2^n) = 0$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Avgör vilken typ av singularitet f har i 0. (6 p)

7. (a) Definiera vad det innebär att en komplexvärd funktion är holomorf. (7 p)

(b) Formulera Cauchy-Riemanns ekvationer.

(c) Visa att om en komplexvärd funktion $f = u + iv$ är holomorf så uppfyller u och v Cauchy-Riemanns ekvationer.

(d) Visa att om en komplexvärd funktion $f = u + iv$ har kontinuerliga partiella derivator och dessa uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer så är f holomorf.

8. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (6 p)

Lycka till!

Elizabeth

MVE025 / MVE295 Komplex (matematisk) analys 26/10 23 ①

1) Låt $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx$.

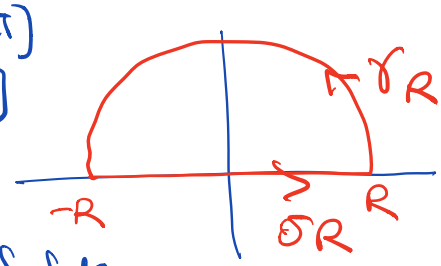
Då $I = \lim_{R\to\infty} I_R$ där $I_R = \int_{-R}^{R} \frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx$.

För att beräkna I_R låt $f(z) = \frac{1}{4+4z^2+z^4}$

& låt $\gamma_R(t) = Re^{it}$ $t\in[0,\pi]$

$\sigma_R(t) = t$ $t\in[-R,R]$

$\Gamma = \gamma_R \cup \sigma_R$.



Då $I_R = \int_{\sigma_R} f\,dz = \int_{\Gamma_R} f\,dz - \int_{\gamma_R} f\,dz$

- Undersök $\int_{\gamma_R} f\,dz$:

$$\boxed{\left|\int_{\gamma_R} f\,dz\right| \le \max_{z\in\gamma_R} |f(z)|\cdot \underbrace{|\gamma|}_{\text{längden av } \gamma = \pi R}}$$

Δ-olikheten för ∫

Obs $|4+4z^2+z^4| \ge |z^4| - 4|z^2| - 4 = R^4 - 4R^2 - 4$

omvänd Δ på γ_R

Alltså på γ_R: $|f| \le \frac{1}{R^4-4R^2-4}$

$$\le \frac{1}{R^4-4R^2-4}\cdot \pi R \longrightarrow 0 \text{ då } R\to\infty$$

- Beräkna $\int_{\Gamma_R} f\,dz$. Görs lättast med residykalkyl.

Obs $4+4z^2+z^4 = (z^2+2)^2 = (z-i\sqrt{2})^2(z+i\sqrt{2})^2$

Alltså har f poler av ordning 2 i $\pm i\sqrt{2}$.

1 forts.) $i\sqrt{2}$ ligger inuti Γ_R om $R \gg 0$.

Beräkna residyn i $i\sqrt{2}$:

$$\boxed{\operatorname{Res}_{i\sqrt{2}} f} = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\left((z-i\sqrt{2})^2 f\right) = \lim_{z\to i\sqrt{2}} \frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^2}$$

$$= -2\frac{1}{(z+i\sqrt{2})^3}\Big|_{z=i\sqrt{2}} = -2\frac{1}{(2\sqrt{2}i)^3} = \boxed{\frac{1}{8\sqrt{2}i}}, \quad R\gg 0$$

Residysatsen $\Longrightarrow$ $\boxed{\int_{\Gamma_R} f\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}}$, $R\gg 0$

Om vi sätter samman räkningarna ovan får vi

$$I = \lim_{R\to\infty} I_R = \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} f\,dz = \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f\,dz}_{\pi/4\sqrt{2}} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} f\,dz}_{=0} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Alltså $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{4+4x^2+x^4}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{4\sqrt{2}}}}$ [Obs $\frac{\pi}{4\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$ dvs!]

---

2 a) Obs $u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - 2x$

I G gäller:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} - 2 = \frac{x}{x^2+y^2} - 2$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

På samma sätt / av symmetriskäl

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = \boxed{\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

Alltså $\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0}$

Alltså är u harmonisk. $\square$

b) <u>Obs</u> $u = \ln|z| - 2\operatorname{Re} z$

Detta är realdelen av hol. funen $f = \operatorname{Log} z - 2z$, där $\operatorname{Log} z$ är en gren av logaritmen def i G.

Minns att $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg}$ där Arg är något argument i G.

Det följer att $v = \operatorname{Im}(\operatorname{Log} z - 2z) = \operatorname{Arg} z - 2\operatorname{Im} z$ är ett harmoniskt konjugat till u.

Låt oss välja ett argument i G, tex principalargumentet $\operatorname{Arg} z = \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}$.

Dvs är $\underline{\underline{v(x,y) = \arctan \frac{y}{x} - 2y}}$ ett harm. konjugat till u.

Kol att u & v uppfyller CR:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ok!}$$

---

3 a) $\boxed{z(\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{1}{1-a/z} = \frac{z}{z-a}}$

geometrisk serie

b) Låt $\beta = (b_k)_{k=0}^{\infty}$, där $b_k = 2^k$.

3 forts) Differensekvationen kan då skrivas

$$S(\alpha) + 2\alpha = \beta, \quad a_0 = 0.$$

Om vi Z-transformerar denna får vi:

$$\boxed{Z(VL)} = Z(S(\alpha) + 2\alpha) \underset{\text{ZT linjär}}{=} Z(S(\alpha)) + 2Z(\alpha) \underset{\text{Räkneregler skift}}{=}$$

$$z[Z(\alpha) - a_0] + 2Z(\alpha) = zZ(\alpha) + Z(\alpha) = \boxed{(z+2)Z(\alpha)}$$

$$\boxed{Z(HL) = Z(\beta) \underset{\text{uppg. a)}}{=} \frac{z}{z-2}}$$

Alltså blir ekv. $Z(\alpha) = \dfrac{z}{(z+2)(z-2)} =$

[PBU ger $\dfrac{1}{(z+2)(z-2)} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z+2}\right)$]

$$\frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z+2}\right) \underset{\text{uppg a)}}{=} \frac{1}{4}\left(Z(2^k) - Z((-2)^k)\right) \underset{\text{ZT linjär}}{=}$$

$$Z\left(\frac{1}{4}\left(2^k - (-2)^k\right)\right).$$

Alltså $\alpha = (a_k)_{k=0}^{\infty}$ där $a_k = \frac{1}{4}\left(2^k - (-2)^k\right)$.

<u>Obs</u> om k jämn: $a_k = 0$

k udda $\frac{1}{4}(2^k + 2^k) = \frac{1}{2}2^k = 2^{k-1}$.

Alltså $\alpha = (a_k)_{k=0}^{\infty}$ där $a_{2k} = 0$ $a_{2k+1} = 2^{k-1}$.

[Kom $a_0 = 0$ ihåg!

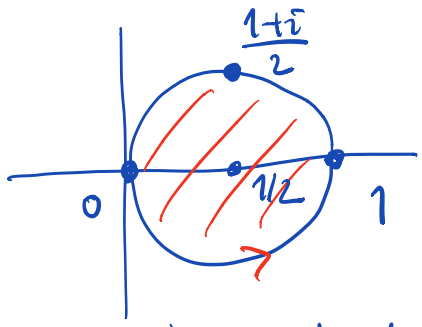
$k = 2l+1$ $VL = a_{2l+2} + 2a_{2l+1} = 0 + 2\cdot 2^{2l} = 2^{2l+1} = HL$

$k = 2l$ $VL = a_{2l+1} + 2a_{2l} = 2^{2l} + 0 = 2^{2l} = HL$

ok!]

4) Låt $g(z) = z^2$, $M(z) = \frac{z}{z-1}$. Då är $f = g \circ M$.

Låt $D = D(1/2, 1/2)$. Bestäm först bilden av D under M!



D avgränsas av $C := C(1/2, 1/2)$

$\Rightarrow M(D)$ begränsas av $M(C)$

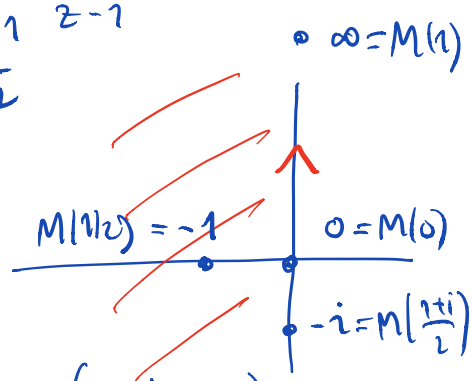
M bijektiv

M Möbiusavbildning $\Rightarrow M(C)$ linje / cirkel, bestäms av bilden av 3 punkter på C.

Nu $M(0) = \frac{0}{0-1} = 0$, $M(1) = \lim_{z \to 1} \frac{z}{z-1} = \infty$,

$M\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{(1+i)/2}{(1+i)/2 - 1} = \dots = -i$

räkning



Alltså $M(C)$ = linjen genom $0, \infty, -i$, dvs Im-axeln $\cup \{\infty\}$

För att avgöra vilket halvplan $M(D)$ är, titta på orientering (se bild), eller betrakta bild av punkt i D, t.ex. $1/2$:

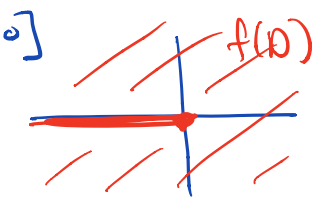
$M(1/2) = \frac{1/2}{1/2 - 1} = -1 \in \{\mathrm{Re}\, z < 0\}$

Alltså $M(D) = \{\mathrm{Re}\, z < 0\} = \{re^{i\theta}, r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\} =: H$

Bestäm nu bilden av H under g!

$g(H) = \{r^2 e^{i2\theta}, r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\} = \{\rho e^{i\varphi}, \rho > 0, \pi < \theta < 3\pi\}$

$= \mathbb{C} \setminus \{z = x, x \leq 0\} =: \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

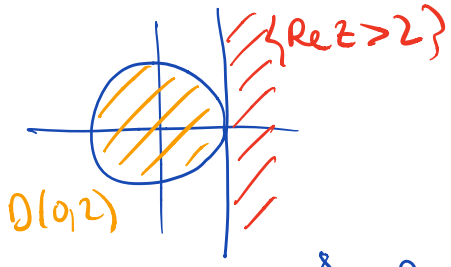


Alltså får vi att

$\underline{\underline{f(D)}} = g(M(D)) = g(H) = \underline{\underline{\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}}$

5) Låt $p(z) = 1+z+z^2-z^3+z^4+z^5-z^6+z^7-z^8$.

Polynom grad 8 $\xrightarrow{\text{AFS}}$ 8 nollställen totalt i $\mathbb{C}$



Idé: använd Rouché för att visa att alla nollställen är i $D(0,2)$.

Låt
- $f = -z^8$ Då $f=0$ med mult 8 i 0.
- $g = 1+z+z^2-z^3+z^4+z^5-z^6+z^7$
- $\gamma = C(0,2)$.

Då, på γ: $|f| = |z^8| = 2^8$

$$\boxed{|g|} \underset{\Delta\text{-olikheten}}{\leq} 1+|z|+|z^2|+\dots+|z^7| = 1+2+\dots+2^7 = 2^8-1 < 2^8 = \boxed{|f|}$$

$\xRightarrow{\text{Rouché}}$ $p=f+g$ har lika många nollställen som f inuti γ, dvs 8 st.

Alltså är alla 8 nollställen till p i $D(0,2) \subseteq \{\operatorname{Re} z < 2\}$.

Alltså saknar p nollställen i $\{\operatorname{Re} z > 2\}$.

---

6) Antag först att f har en hävbar singularitet i 0. Då $\exists$ holo fkn g i $D(0,1)$, så $f=g$ i $D(0,1)^*$. Eftersom $\frac{1}{2^n} \to 0 \in D(0,1)$ & $g(\frac{1}{2^n}) = 0$ ger identitetsprincipen att $g \equiv 0$ i $D(0,1) \Rightarrow f \equiv 0$ i $D(0,1)^*$, vilket motsäger $f \not\equiv 0$ i $D(0,1)^*$. Alltså är sing. i 0 inte hävbar.

6 forts) Eftersom $f(\frac{1}{2^n}) = 0$ & $\frac{1}{2^n} \to 0$ gäller inte att $|f(z)| \to \infty$ då $z \to 0$. Alltså är singularitet i 0 inte en pol.

Eftersom singularitet i 0 varken är hävbar eller en pol är den väsentlig.

---

7) Se Kapitel 2.2 & 2.3, speciellt 2.13 i [BMPS]

---

8) Se Kommentarium 5.13 i [BMPS]