Komplex analys, MVE025/MVE295

2022 10 27, 8:30-12:30

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

---

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet $u'''(t) = u(t)$ med begynnelsevillkor $u(0) = 0, u'(0) = 1$ och $u''(0) = -1$.

   (4p)

2. Beräkna med hjälp av residykalkyl följande integraler:

   (a)
   $$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 - \cos^2(x)},$$

   (6p)

   (b)
   $$\int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2)^2}.$$

   (7p)

3. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till $z^3 - 5z + \frac{e^{-z}}{5}$ i området $\{z : \text{Re}(z) > -2, |z| > 1\}$.

   (8p)

4. Hitta en begränsad kontinuerlig funktion u på $\{z : \text{Re}(z) \geq 0, -1 \leq \text{Im}(z) \leq 1\} \setminus \{i, -i\}$ som är harmonisk i $\{z : \text{Re}(z) > 0, -1 < \text{Im}(z) < 1\}$ och sådan att $u(z) = 1$ då $\text{Re}(z) = 0$ medan $u(z) = 0$ då $|\text{Im}(z)| = 1$.

   (10p)

5. Formulera och bevisa Cauchys integralformel.

   (5p)

6. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner.

   (5p)

7. Låt f vara en hel funktion sådan att $f(-z) = -f(z)$. Visa att det finns en hel funktion g sådan att $f(z) = zg(z^2)$.

   (5p)

Lycka till!
David

1: LT av $*$ ger: $s^3\tilde{u} - s^2 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{u(0)}} - s\underset{1}{\underset{\shortparallel}{u'(0)}} - \underset{-1}{\underset{\shortparallel}{u''(0)}} =$

$= s^3\tilde{u} - s + 1 = \tilde{u} \Rightarrow (s^3-1)\tilde{u} = s-1 \Rightarrow \tilde{u} = \frac{s-1}{s^3-1} =$

$= \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$. Tabell/räkneregler ger att

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$, $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$, så

$\tilde{u} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \underset{\text{IF}}{\Longrightarrow} u = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$.

Vi kollar begynnelsevärdena:

$u(0)=0$, $u'(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2})e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$, $u'(0)=1$,

$u''(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2})e^{-t/2}\left(\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\left(-\frac{3}{2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) -\right.$

$\left.- \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(-\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right)$, $u''(0)=-1$.

Svar: $u(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2}\sin\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)$.

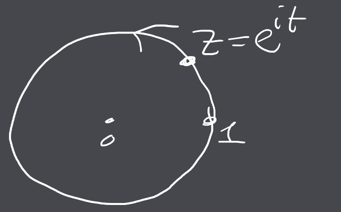
2a: Vi genomför variabelbytet $z = e^{it}$.

$dz = \gamma'(t)dt = ie^{it}dt = iz\,dt \Rightarrow dt = -\frac{i\,dz}{z}$

$\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{z+\frac{1}{z}}{2} = \frac{\frac{z^2+1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$,

$\frac{dt}{3-\cos^2 t} = \frac{-i\frac{1}{z}}{3-\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}dz = \frac{-i\frac{1}{z}}{\frac{12z^2-z^4-2z^2-1}{4z^2}} = \frac{i4z}{z^4-10z^2+1}dz$,

så $\int_0^{2\pi}\frac{dt}{3-\cos^2 t} \underset{\text{VB}}{=} \int_{|z|=1}\frac{4iz}{z^4-10z^2+1}dz$



Vi noterar att $g(z) := \frac{4iz}{z^4-10z^2+1}$ holo i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. i nollst. till

z^4-10z^2+1. $z^4-10z^2+1 = (z^2-5)^2-25+1 = (z^2-5)^2-24$

$\Rightarrow$ nollst. är $a_1 = \sqrt{5+\sqrt{24}}$, $a_2 = -\sqrt{5+\sqrt{24}}$,

$a_3 = \sqrt{5-\sqrt{24}}$, $a_4 = -\sqrt{5-\sqrt{24}}$.

Vi noterar att $a_3, a_4 \in \operatorname{int} C(0,1)$, ty $4<\sqrt{24}<5$.

$$\operatorname{Res}_{a_3}\left(\frac{4iz}{z^4-10z^2+1}\right) \underset{\text{RR4}}{=} \left(\frac{4iz}{4z^3-20z}\right)_{z=a_3} = \left(\frac{i}{a_3^2-5}\right) = -\frac{i}{\sqrt{24}}$$

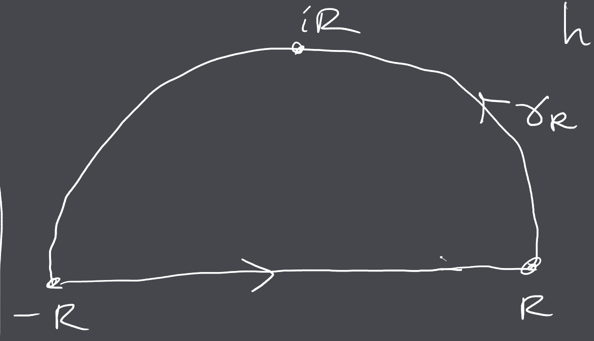
$$\operatorname{Res}_{a_4}\left(\frac{4iz}{z^4-10z^2+1}\right) \underset{\text{RR4}}{=} \left(\frac{4iz}{4z^3-20z}\right)\Big|_{z=a_4} = \frac{i}{a_4^2-5} = -\frac{i}{\sqrt{24}}.$$

Vi får att
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{3-\cos^2 t} \underset{\text{VB}}{=} \int_{|z|=1} \frac{4iz}{z^4-10z^2+1}\,dz \underset{\text{RS}}{=} 2\pi i\left(-\frac{i}{\sqrt{24}}-\frac{i}{\sqrt{24}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{24}} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

2b: Först noterar vi att eftersom $\frac{x^2}{(x^2+2)^2}$ är en jämn funktion så är
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx.$$

Vi observerar också att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)\,dz$, där
$$g(z) := \frac{z^2}{(z^2+2)^2}.$$

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $0 \le t \le \pi$, och
$\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$



Vi får:

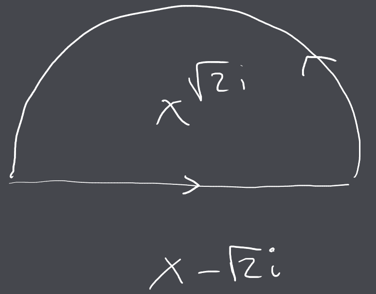
$$\underbrace{\int_{\sigma_R} g(z)\,dz}_{\text{beräknas mha RS}} = \underbrace{\int_{[-R,R]} g(z)\,dz}_{\xrightarrow[R\to\infty]{} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+2)^2}dx} + \underbrace{\int_{\gamma_R} g(z)\,dz}_{\text{felterm, vill visa} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0} \quad \cancel{*}$$

Uppskattning av felterm:

$$\left|\int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right| \underset{\Delta\le\int}{\le} \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{z^2}{(z^2+2)^2}\right| \pi R \le \left[\begin{array}{l} |z^2| = |z|^2 = R^2 \text{ på } \gamma_R \\ |(z^2+2)^2| = |z^2+2|^2 \underset{\Delta\ge}{\ge} \big||z|^2-2\big|^2 = \\ = |R^2-2|^2 \underset{R\ge\sqrt{2}}{=} (R^2-2)^2 \text{ på } \gamma_R,\ R\ge\sqrt{2} \end{array}\right] \underset{R\ge\sqrt{2}}{\le} \frac{\pi R^3}{(R^2-2)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$\int_{-\sigma_R} g(z)\,dz$:

$\frac{z^2}{(z^2+2)^2}$ holo i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. i $\pm\sqrt2 i$,



$\sqrt2 i \in \text{int}\,\sigma_R$, $R>\sqrt2$

$$\text{Res}_{\sqrt2 i}\left(\frac{z^2}{(z^2+2)^2}\right) \overset{RR3a}{=} \left(\frac{z^2}{(z+\sqrt2 i)^2}\right)'\Big|_{z=\sqrt2 i} =$$

$$= \left(\frac{2z(z+\sqrt2 i)^2 - z^2\, 2(z+\sqrt2 i)}{(z+\sqrt2 i)^4}\right)\Big|_{z=\sqrt2 i} = \frac{2\sqrt2 i(2\sqrt2 i)^2-(\sqrt2 i)^2\cdot2\cdot2\sqrt2 i}{(2\sqrt2 i)^4} =$$

$$= \frac{\sqrt2^9 i^3 - \sqrt2^7 i^3}{\sqrt2^{12}} = \frac{2(-i)-(-i)}{\sqrt2^5} = -\frac{i}{4\sqrt2}$$

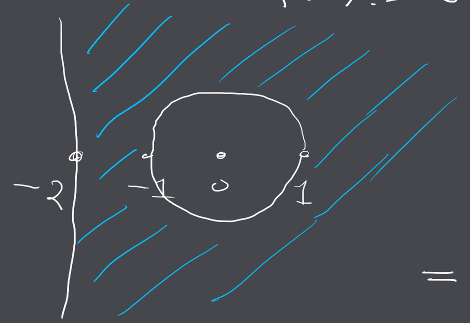
$$\int_{\sigma_R}\frac{z^2}{(z^2+2)^2}\,dz \overset{RS}{=} 2\pi i\left(-\frac{i}{4\sqrt2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt2}, \quad R>\sqrt2$$

Vi får alltså att $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx = \frac12\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+2)^2}\,dx \overset{*}{=} \frac12\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\sigma_R} g(z)\,dz - \int_{\gamma_R} g(z)\,dz\right) =$

$$\frac12\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R}g(z)\,dz - \frac12\underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R}g(z)\,dz}_{=0} = \frac{\pi}{4\sqrt2}.$$

3:

$f(z) := z^3 - 5z + \frac{e^{-z}}{5}$.



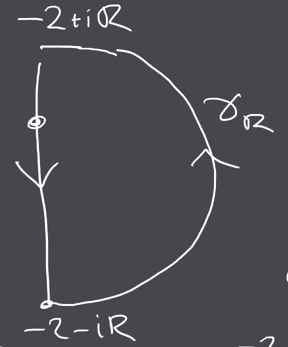
Vi observerar att

$\#$ nollställen i $A := \{z : \text{Re}\, z > -2,\ |z|>1\}$

$= \#$ nollst. i $B := \{z: \text{Re}\,z>-2\}$

$- \#$ nollst. i $D(0,1) - \#$ nollst. i $C(0,1)$.

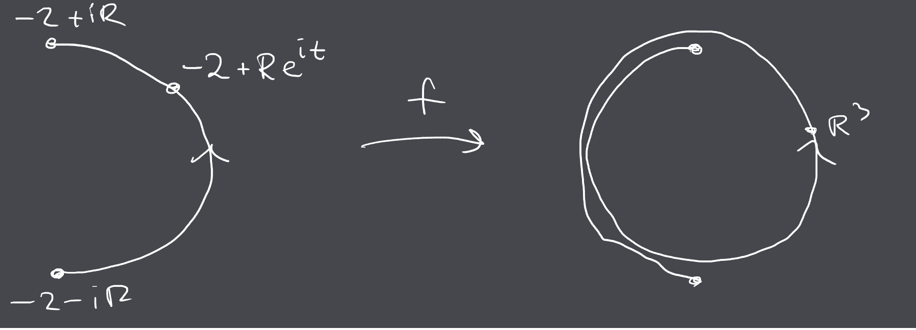
$\#$ nollst. i B: Vi använder argumentprincipen.



Låt $\gamma_R(t) = -2+Re^{it}$, $-\pi/2\le t\le\pi/2$,

$\sigma_R := [-2+iR, -2-iR]\cup\gamma_R$

argvar$(f\circ\gamma_R)$:



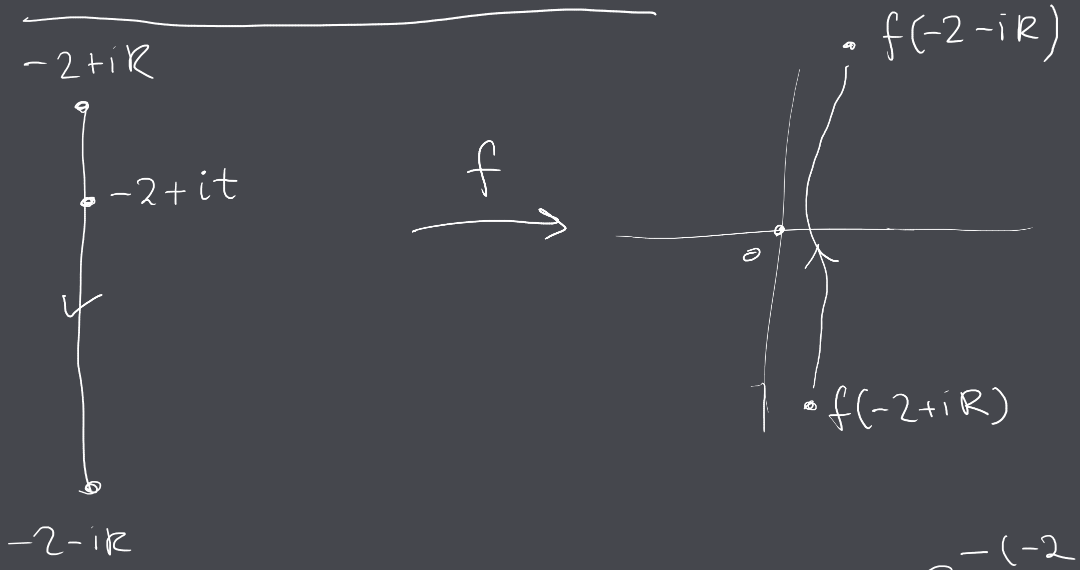
$$f(-2+Re^{it}) = (-2+Re^{it})^3 - 5(-2+Re^{it}) + \frac{e^{-(-2+Re^{it})}}{5} =$$

$$= \left[\left| \frac{e^{-(-2+Re^{it})}}{5} \right| = \frac{e^{2-R\cos t}}{5} \le \frac{e^2}{5} \text{ på } \gamma_R \right] =$$

$$= R^3 e^{i3t}\left(1 + O\left(\tfrac{1}{R}\right)\right) \Rightarrow \arg\left(f(-2+Re^{it})\right) \approx 3t + 2\pi k, \; R \gg 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{argvar}(f \circ \gamma_R) \approx 3\pi, \; R \gg 1$$

$\operatorname{argvar}(f \circ [-2+iR, -2-iR])$:



$$f(-2+it) = (-2+it)^3 - 5(-2+it) + \frac{e^{-(-2+it)}}{5} =$$

$$= (-2)^3 + 3(-2)^2 it + 3(-2) i^2 t^2 + i^3 t^3 + 10 - 5it + \frac{e^2}{5}(\cos t - i \sin t) =$$

$$= -8 + 12it + 6t^2 - it^3 + 10 - 5it + \frac{e^2}{5}\cos t - \frac{e^2}{5} i \sin t =$$

$$= 6t^2 + 2 + \frac{e^2}{5}\cos t + i\left(-t^3 + 7t - \frac{e^2}{5}\sin t\right)$$

$$f(-2+iR) = 6R^2 + 2 + \frac{e^2}{5}\cos R + i\left(-R^3 + 7R - \frac{e^2}{5}\sin R\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(f(-2+iR)) \approx -\pi/2$$

$$f(-2-iR) = 6R^2 + 2 + \frac{e^2}{5}\cos R + i\left(R^3 - 7R + \frac{e^2}{5}\sin R\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}(f(-2-iR)) \approx \pi/2$$

Vi noterar också att $\operatorname{Re}(f(-2+it)) = 6t^2 + 2 + \frac{e^2}{5}\cos t \ge$

$$\ge \left[t^2 \ge 0, \; \cos t \ge -1 \right] \ge 2 - \frac{e^2}{5} = \frac{10 - e^2}{5} > 0$$

$e^2 < 3^2 = 9$

$\Rightarrow f \circ [-2+iR, -2-iR]$ passerar

0 till höger $\Rightarrow \operatorname{argvar}(f \circ [-2+iR, -2-iR]) \approx \pi$

(se figur!).

Vi får $W(f \circ \sigma_R) = \frac{1}{2\pi}\left(\operatorname{argvar}(f \circ \gamma_R) + \operatorname{argvar}(f \circ [-2+iR, -2-iR])\right)$;

$$\approx \frac{1}{2\pi}(3\pi + \pi) = 2 \Rightarrow W(f \circ \sigma_R) = 2, \; R \gg 1$$

$R \gg 1$

$W(f \circ \sigma_R)$ heltal!

Vi får nu att # nollst. i B $= \lim_{R\to\infty}$ # nollst. i int(σ_R) =

$\underset{\text{Argumentprinc.}}{=} \lim_{R\to\infty} W(f\circ\sigma_R) = 2$.

nollst. i D(0,1): Här använder vi istället Rouchés sats.

Vi låter $g(z) := -5z$, $h(z) := z^3 + \frac{e^{-z}}{5}$.

g har 1 nollst. i D(0,1).

$|g(z)| = |-5z| = 5|z| = 5$ på C(0,1).

$|h(z)| = \left|z^3 + \frac{e^{-z}}{5}\right| \underset{\Delta\le}{\le} |z|^3 + \frac{|e^{-z}|}{5} = 1 + \frac{e^{-\mathrm{Re}\,z}}{5} \underset{-\mathrm{Re}\,z \le 1 \text{ på } C(0,1)}{\le} 1 + \frac{e}{5} < 2$

på C(0,1)

$\Rightarrow |g| > |h|$ på C(0,1) $\underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ $f = g+h$ har också 1 nollst.

i D(0,1).

nollst. på C(0,1): $|f| = |g+h| \underset{\text{omv. }\Delta\ge}{\ge} |g| - |h| > 0$ på C(0,1)

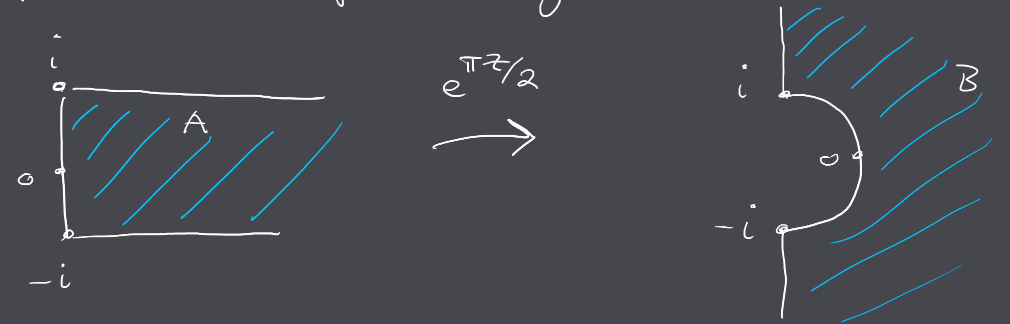
$\Rightarrow$ f har 0 nollst. på C(0,1).

Sammantaget får vi att f har $2-1-0=1$ nollst.

i $\{z : \mathrm{Re}\,z > -2,\ |z| > 1\}$.

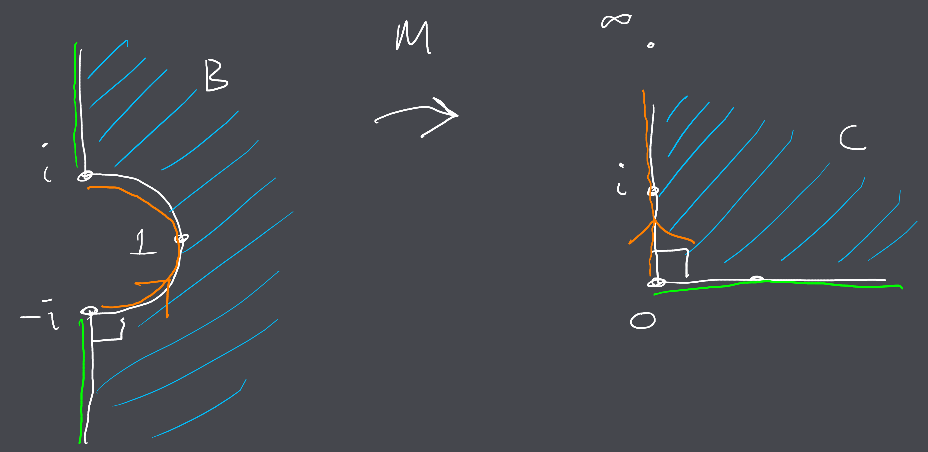
4: Idén är att först hitta en holomorf och bijektiv avbildning f från $A := \{z : \mathrm{Re}\,z > 0,\ -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ till det övre halvplanet.

Vi konstruerar f i steg: först tar vi $e^{\pi z/2}$



$e^{\pi A/2} = \left\{ e^{\pi(x+iy)/2} : x > 0,\ -1 < y < 1 \right\} =$

$= \left\{ re^{i\theta} : r > 1,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2 \right\} = \{z : \mathrm{Re}\,z > 0,\ |z| > 1\} =: B$.



Nu försöker vi hitta en Marb M som avbildar B på första kvadranten $\{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\} =: C$.

Vi får detta genom att låta $M(-i)=0$, $M(1)=i$, $M(i)=\infty$, ty detta implicerar att $M(C(0,1)) \underset{\text{sats}}{=}$ cirkel el. linje genom $0, i, \infty \Rightarrow i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$, $M(i\mathbb{R}\cup\{\infty\}) \underset{\text{sats}}{=}$ cirkel el linje genom $0, \infty$ och $\underbrace{\text{som skär}}_{\text{p g a konformitet}}$ $i\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ i rät vinkel $= \mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

$M(B)$ avgränsas alltså av koordinataxlarna och måste därför vara en kvadrant. Men p g a konformitet måste $M(B)$ ligga till höger om kurvan som går från 0 till i vidare till ∞ (se figur), dvs $M(B) =$ första kvadranten.

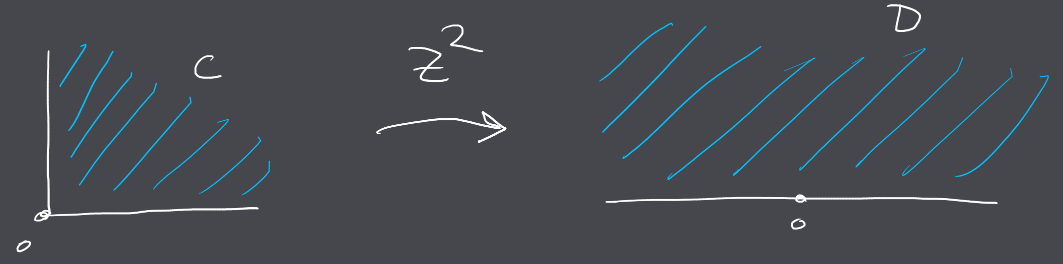
Nu bestämmer vi $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$:

$M(-i)=0 \Rightarrow a(-i)+b=0 \Rightarrow b=ia$, vi sätter $a=1$, $b=i$

$M(i)=\infty \Rightarrow ci+d=0 \Rightarrow d=-ic$, dvs $M(z)=\dfrac{z+i}{cz-ic}$

$M(1)=i \Rightarrow \dfrac{1+i}{c-ic}=i \Rightarrow c=1$, så

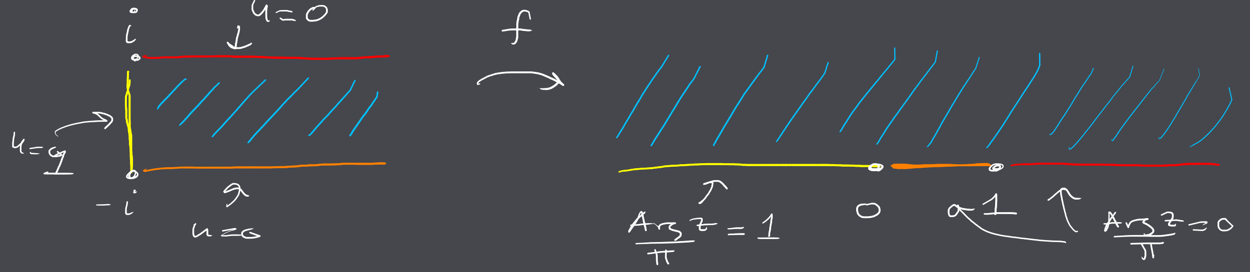
$$M(z)=\frac{z+i}{z-i}.$$



I nästa steg noterar vi att z^2 avbildar den första kvadranten holomorft o bijektivt på det övre halvplanet. Eftersom sammansättningen av holomorfa o bijektiva funktioner är holomorfa o bijektiva får vi att $f := z^2 \circ M \circ e^{\pi z/2}$ är en holomorf o bijektiv fkn från A till det övre halvplanet.

Vi har alltså att $f(z) = \left(\frac{e^{\pi z/2}+i}{e^{\pi z/2}-i}\right)^2$.

Vi noterar också att f är en kontinuerlig fkn från $\{z : \operatorname{Re} z \ge 0,\ -1 \le \operatorname{Im} z \le 1\}\setminus\{i\}$ till $\{z : \operatorname{Im} z \ge 0\}$, och att $f(\{z : \operatorname{Re} z = 0,\ -1<\operatorname{Im} z<1\}) = \{z : \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z = 0\}$



medan $f(\{z : \operatorname{Re} z>0,\ |\operatorname{Im} z|=1\}) = \{z : \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z = 0,\ z\ne 1\}$

Vi noterar också att $\frac{\operatorname{Arg} z}{\pi} = \operatorname{Re}\left(\frac{\operatorname{Log} z}{\pi}\right)$ enligt Prop. ä en harmonisk fkn på det övre halvplanet som är 0 på den positiva reella axeln o 1 på den negativa reella axeln. Den ä också kontinuerlig o begr. på $\{z : \operatorname{Im} z \ge 0,\ z \ne 0\}$.

Enligt Kor. är då $u(z) := \frac{\operatorname{Arg}(f(z))}{\pi}$ harm. i A, kont. o begr. på $f^{-1}(\{z : \operatorname{Im} z \ge 0,\ z\ne 0\}) = \{z : \operatorname{Re} z \ge 0,\ -1\le \operatorname{Im} z\le 1\}\setminus\{i,-i\}$,

och $u=1$ på $f^{-1}(\{z : \operatorname{Re} z<0,\ \operatorname{Im} z = 0\}) = \{z : \operatorname{Re} z = 0,\ -1<\operatorname{Im} z<1\}$

medan $u = 0$ på $f^{-1}(\{z : \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z = 0,\ z\ne 1\}) =$

$= \{z : \operatorname{Re} z>0,\ |\operatorname{Im} z| = 1\}$. Vi får alltså att

$u(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arg}\left(\left(\frac{e^{\pi z/2}+i}{e^{\pi z/2}-i}\right)^2\right)$ är en sådan funktion som söktes.

7: Enligt satsen om Taylorutveckling kan f skrivas $f(z) = \sum_0^\infty c_k z^k$. Enligt antagandet är

$f(-z) = -f(z)$, så $0 = f(z)+f(-z) = \sum_0^\infty c_k z^k + \sum_0^\infty c_k(-z)^k =$

$$= \sum_0^\infty c_k(1+(-1)^k)z^k = \sum_{m=0}^\infty 2c_{2m}z^{2m} \underset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow} c_{2m} = 0 \ \forall m\ge 0.$$

Detta betyder att $f(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots = z(c_1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \dots)$

$$= z\sum_{k=0}^\infty c_{2k+1} z^{2k} = z g(z^2),$$ där $g(z) := \sum_{k=0}^\infty c_{2k+1} z^k$.

Vi noterer att då f:s TU hade konv.radie ∞ så är konv.radie för $\sum_{0}^{\infty} c_{k+1} z^k$ också ∞, så enl. sats är g en hel funktion. Vi har alltså visat att f kan skrivas $f(z) = zg(z)$ där g hel funktion!

5: Cauchys integralformel

Om f holo i G, $\overline{D}(a,r) \subseteq G$, då är

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Bevis: Notera att $\displaystyle\int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz \underset{w:=z-a}{=} \int_{|w|=r} \frac{1}{w} dw \underset{\text{FEX}}{=} 2\pi i$

$$\Rightarrow f(a) = f(a) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz}_{=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a} dz.$$

Låt $\displaystyle A_t := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz$, $0 < t \leq r$.

Vill visa $A_r = 0$.

$\dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ holo i $G \setminus \{a\}$, $C(a,t) \sim_{G\setminus\{a\}} C(a,r)$

$\underset{CS}{\Longrightarrow}$ A_t oberoende av t!

Idé: Vill visa $A_t \xrightarrow[t\to 0]{} 0$, för då följer det att $A_r = 0$!

$$|A_t| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz \right| \underset{\Delta\leq\int}{\leq} \frac{1}{2\pi} \max_{|z-a|=t} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| 2\pi t =$$

$$= \max_{|z-a|=t} |f(z)-f(a)| \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$ tty f kont. i a (holo $\Rightarrow$ kont.). $\square$

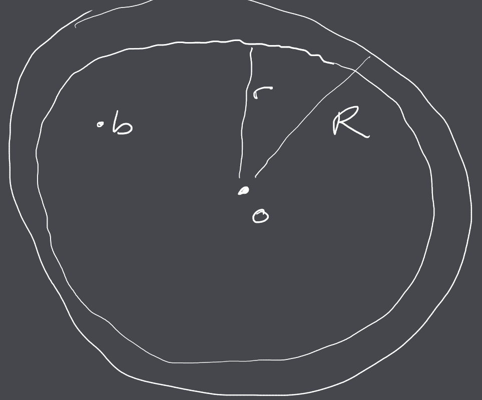
6: Taylorutveckling av holo fkner

Antag f holo i $D(a,R)$. Då har f en Taylorutveckling

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} c_k (z-a)^k \text{ i } D(a,R), \text{ där}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad 0 < r < R.$$

Bevis: Antar först $a=0$. Välj $b\in D(0,R)$ och r s.a. $|b|<r<R$.



$$f(b) \underset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z-b}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\left(\frac{1}{1-b/z}\right)dz =$$

$$= \left[\ |b/z| = \frac{|b|}{r} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-b/z} = \sum_0^\infty \left(\frac{b}{z}\right)^k\ \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z}\sum_0^\infty\left(\frac{b}{z}\right)^k dz = \left[\ \sum_0^\infty\left(\frac{b}{z}\right)^k \underset{w:=\frac{b}{z}}{=} \sum_0^\infty w^k \text{ likf. konv.}\right.$$

$$\text{på } |w| = \frac{|b|}{r} < 1,\quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \max_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{r} < \infty$$

$$\left.\underset{\text{om}}{\Longrightarrow} \sum_0^\infty \frac{f(z)}{z}\left(\frac{b}{z}\right)^k \text{ likf. konv. på } C(0,r)\ \right] =$$

$$\underset{\text{Prop. 7.27}}{=} \sum_0^\infty b^k\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \sum_0^\infty c_k b^k.$$

För $a\neq 0$ låt $w:=z-a$, $g(w):=f(z)$ holo i $w\in D(0,R)$

$$\Rightarrow f(z) = g(w) \underset{\text{ovan}}{=} \sum_0^\infty c_k w^k = \sum_0^\infty c_k (z-a)^k,$$

$$c_k \underset{\text{Kor. 8.5}}{=} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.\quad \square$$