

Komplex analys, MVE025/MVE295

2022 01 05, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Om kursansvarig ej kan nås, ring: Elizabeth Wulcan, 0317725347

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

1. Låt $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ vara följderna som löser differensekvationen

$$a_{k+1} + a_k = b_{k+1} - b_k,$$

där $a_0 = 0$, och $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ är en given begränsad följd s.a. $b_0 = 0$.

- (a) Hitta följderna $(c_k)_{k=0}^{\infty}$ och $(d_k)_{k=0}^{\infty}$ sådana att

$$Z((a_k)_{k=0}^{\infty}) = Z((b_k)_{k=0}^{\infty})Z((c_k)_{k=0}^{\infty}) + Z((d_k)_{k=0}^{\infty}),$$

där Z betecknar Z -transformationen. Ge endast svar.

(4p)

- (b) Bestäm följderna $(a_k)_{k=0}^{\infty}$. Ge endast svar.

(2p)

- (c) Om $b_k := k(-1)^k$, vad blir a_{100} ? Ge endast svar.

(2p)

2. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformationen av

$$f(x) := \frac{x}{x^4 + 16}.$$

(8p)

3. Använd metoder från kursen för att hitta antalet nollställen till polynomet

$$p(z) := z^3 - 5iz^2 + 2$$

i området

$$A := \{z : (\operatorname{Re}(z))^2/5 + (\operatorname{Im}(z))^2/7 < 1\}.$$

(8p)

4. Hitta en bijektiv och konform avbildning från $A := \{z : -1 < \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) < 1\}$ till $B := \{z : |z| < 1\}$.

(8p)

5. Formulera och bevisa Liouvilles sats.

(6p)

6. Formulera och bevisa den del av klassifikationen av isolerade singulariteter som handlar om hävbara singulariteter.

(6p)

7. Bestäm alla Möbiusavbildningar M sådana att $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avbildas på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ medan $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ avbildas på $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

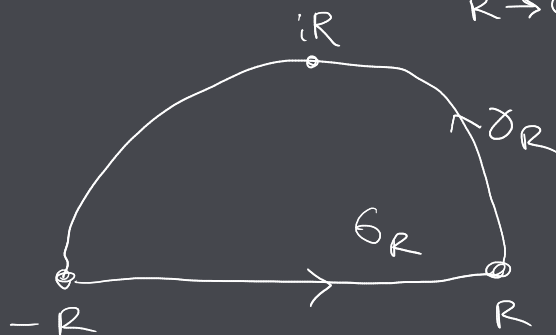
(6p)

Lycka till!
David

2: Enligt definition är $\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-itx}}{x^4 + 16} dx$.

Anta $t \leq 0$ och låt $g(z) := \frac{z e^{-itz}}{z^4 + 16}$.

Vi har då $\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz$.



låt $\gamma_R(s) := R e^{is}$, $s \in [0, \pi]$,

$\gamma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$

Har då:

$$\int_{\gamma_R} g(z) dz = \int_{[-R, R]} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz$$

↗
Beräkna nu
residuerna

$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \hat{f}(t)$

felterm, vilken $\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

Uppskattning av felterm:

$$\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \frac{|z| |e^{-itz}|}{|z^4 + 16|} \pi R \leq \left[\begin{array}{l} |z| = R \text{ på } \gamma_R \\ |e^{-itz}| = |e^{-it(x+iy)}| = e^{ty} \end{array} \right]$$

$$= |e^{ty - itx}| = e^{ty} \leq 1 \text{ på } \gamma_R \text{ då } t \leq 0, y \geq 0,$$

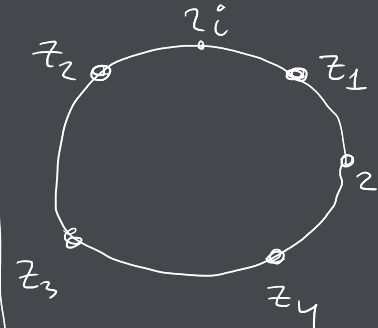
$$|z^4 + 16| \geq |z|^4 - 16 = R^4 - 16 \text{ på } \gamma_R$$

$$\leq \frac{\pi R^2}{R^4 - 16} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

$g(z)$ har i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. nollst. till

$$z^4 + 16 : z_1 = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2}(1+i), z_2 = 2e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}(-1+i),$$

$$z_3 = 2e^{i5\pi/4} = \sqrt{2}(-1-i), z_4 = 2e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}(1-i),$$

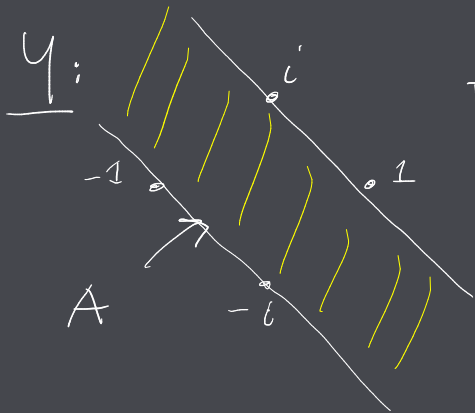


varav $z_1, z_2 \in \text{int}(\gamma_R), R > 2$

Vi får att $|f(z)| > |g(z)|$ på $\partial A \Rightarrow p$ har lika
Rouché

många nollställen i A som f , dvs 2 st.

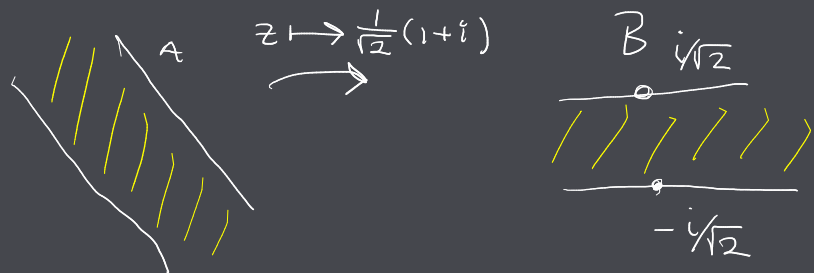
Svar: p har 2 nollst. i A .



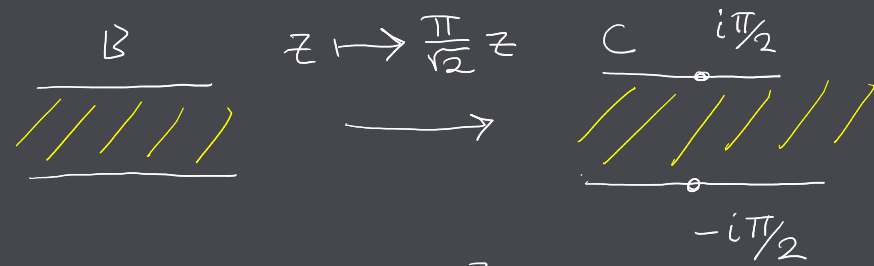
Det finns ett oändligt antal rätta svar,
detta är bara en möjlighet.

Vi gör detta i steg.

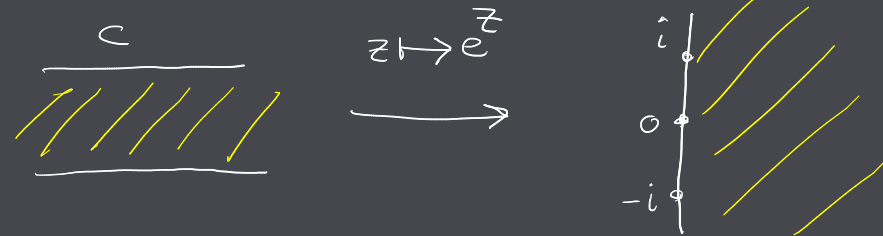
Först multiplicerar vi med $e^{i\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ så
att linjerna som begränsar området blir horisontella



Vi kommer utja applicera e^z , men för att då få ett halvplan
förstärkar vi först området:



Nu applicerar vi e^z :



Till sist vill vi ha en Möbiustransformation $E = \text{högra halvplanet}$
som avbildar högra halvplanet på $D(0,1)$.
 $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$



Vi väljer M s.a. $M(0) = -1$, $M(i) = i$, $M(\infty) = 1$,
för då måste den imaginära axeln avbildas på enhetscirkeln,
och orienteringen av punkterna ger tack vare konformitet att
 M måste avbildat högra halvplanet på $D(0,1)$
(se figur)

