

Komplex analys, MVE025/MVE295

2021 10 28, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

1. (a) Lös med hjälp av Laplacetransformen begynnelsevärdesproblemet

$$u''(t) + 2u'(t) + u(t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = u'(0) = 0,$$

där g är en given funktion s.a. $|g(t)| \leq Ae^{Bt}$ för några konstanter A, B . Ge endast svar.

(5p)

- (b) Om

$$g(t) := \begin{cases} 1/(2-t), & \text{för } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{för } t > 1, \end{cases}$$

vad blir $u(2)$? Ge endast svar.

(3p)

2. (a) Låt $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vara Möbiusavbildningen s.a. $M(0) = 0$, $M(1) = 1 - i$ och $M(2) = \infty$, och låt $A := \{z : \operatorname{Im}(z) > 0, |z - 1| < 1\}$. Bestäm $M(A)$. Ge endast svar.

(5p)

- (b) Låt $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ och A vara som i (a) och definiera

$$f(z) := \operatorname{Log} \left(\frac{a^2 z^2 + 2abz + b^2}{c^2 z^2 + 2cdz + d^2} \right).$$

Bestäm $f(A)$. Ge endast svar.

(3p)

3. Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

(8p)

4. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till

$$p(z) := z^5 + 2iz^2 + iz + 1$$

i området $\{z : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

(8p)

5. Formulera och bevisa Cauchys integralformel för derivatan av en holomorf funktion. (6p)
6. Formulera och bevisa Argumentprincipen. (6p)
7. Låt $p(z)$ vara polynom i z av grad n och $q(z)$ vara ett polynom i z av grad $m \geq 1$. Visa att om $n \leq m$ så finns en följd $\alpha := (a_k)_0^\infty$ vars Z-transform är lika med $\frac{p(z)}{q(z)}$ i någon annulus $A(0, r, \infty)$. (6p)

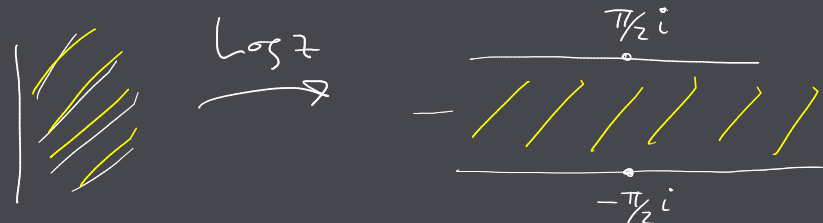
Lycka till!
David

$$= \{z: |z| > 0, -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2\} = \{z: \text{Re } z > 0\}$$



$$\log(\{z: |z| > 0, -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}) = \{ \ln|z| + i\text{Arg}(z) : |z| > 0, -\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2 \}$$

$$-\pi/2 < \text{Arg}(z) < \pi/2 = \{z: -\pi/2 < \text{Im}(z) < \pi/2\}$$



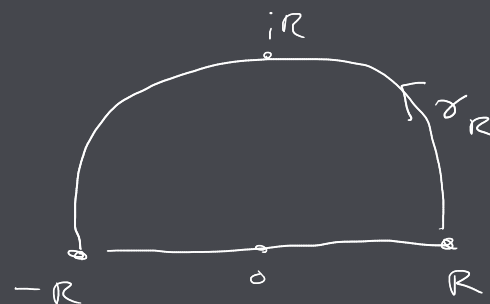
Svar: $f(A) = \{z: -\pi/2 < \text{Im}(z) < \pi/2\}$

3. Vi noterar att $\sin 2x = \text{Im}(e^{2ix})$, och därför

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}(e^{2ix})}{x^2+2x+2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{Im}\left(\frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2}\right) dx = \text{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx\right)$$

Sedan noterar vi också att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(z) dz$,

$$g(z) := \frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2}$$



Lat $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$,

$$\Gamma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$$

Vi har nu

$$\int g dz = \int_{\gamma_R} g dz + \int_{[-R, R]} g dz$$

använd residy
teknik $\int_{\gamma_R} g dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2} dx$ filter, vill visa $\rightarrow 0$

Uppskattning av filterterm:

$$\left| \int_{\gamma_R} g dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2} \right| \pi R \leq \left[\begin{array}{l} |e^{2iz}| = |e^{2ix-2y}| = e^{-2y} \leq 1 \\ \text{ty } y \leq 0 \text{ p: } \gamma_R \end{array} \right]$$

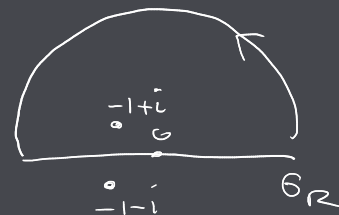
$$\left| \frac{e^{2iz}}{z^2+2z+2} \right| \geq \frac{1}{|z|^2+2|z|+2} = \frac{1}{R^2+2R+2} \text{ p: } \gamma_R \leq$$

$$\leq \frac{\pi R}{R^2+2R+2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_{\gamma_R} g dz :$$

$$z^2+2z+2 = (z+1)^2+1, \text{ har nollst. i } -1 \pm i,$$

så g har i $\mathbb{C}$ femta isol. sing. i $-1 \pm i$, varav



$$-1+i \in G_R, R > \sqrt{2}$$

$$\text{Res}_{-1+i} g = \left(\frac{e^{2iz}}{2z+2} \right) \Big|_{z=-1+i} = \frac{e^{-2i-2}}{2i}$$

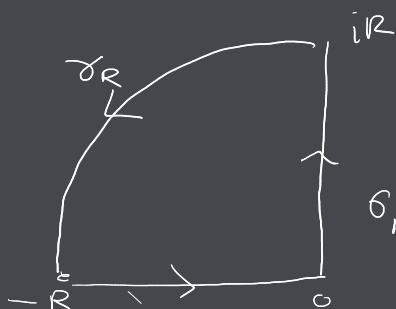
$$\int_{G_R} g dz = 2\pi i \cdot \frac{e^{-2i-2}}{2i} = \frac{\pi e^{-2i}}{e^2}, \quad R > \sqrt{2}$$

Vi säg även att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{G_R} g dz - \int_{\gamma_R} g dz \right) = \frac{\pi e^{-2i}}{e^2} - 0 =$

$$= \frac{\pi e^{-2i}}{e^2}, \text{ och } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2} dx = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+2x+2} dx = \frac{\pi \sin(-2)}{e^2} =$$

$$= -\frac{\pi \sin 2}{e^2}. \quad \text{Svar: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+2x+2} dx = -\frac{\pi \sin 2}{e^2}$$

4. Lösning: Vi använder Argumentprincipen.

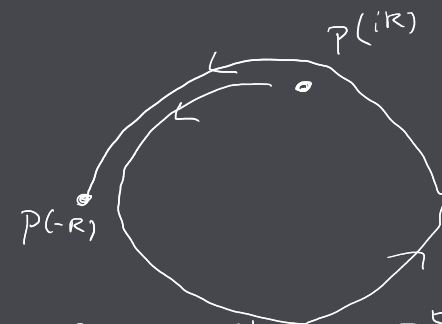


$$\text{Låt } \gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [\pi/2, \pi],$$

$$G_R := [0, iR] \cup \gamma_R \cup [-R, 0]$$

G_R Vi vill räkna ut $W(p \circ G_R)$, $R \gg 1$, genom att beräkna argvar längs delkurvorna.

$$\text{argvar}(p \circ \gamma_R):$$

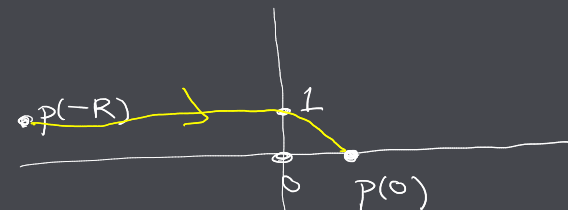


$$p(Re^{it}) = (Re^{it})^5 + 2i(Re^{it})^2 + iRe^{it} + 1 = (Re^{5it}) \left(1 + \frac{2ie^{-3it}}{R^3} + \frac{ie^{-4it}}{R^4} + \frac{e^{-5it}}{R^5} \right) \Rightarrow \arg(p(Re^{it})) \approx 5t + 2\pi k$$

litar då $R \gg 1$

$$\Rightarrow \text{argvar}(p \circ \gamma_R) \approx \frac{5\pi}{2}, \quad R \gg 1.$$

$$\text{argvar}(p \circ [-R, 0]):$$



$$p(t) = t^5 + 2it^2 + it + 1 = t^5 + 1 + i(2t^2 + t)$$

$$p(-R) = -R^5 + 1 + i(2R^2 - R) \Rightarrow \text{Arg}(p(-R)) \approx \pi$$

$$p(0) = 1 \Rightarrow \text{Arg}(p(0)) = 0$$

