

Komplex analys, MVE025/MVE295

2021 08 27, 14.00-18.00

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

1. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$\frac{x}{x^4 + 4}.$$

(9p)

2. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till $z^4 - (2 - i)z - i$ i området $\{z : |z| > 0, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/4\}$.

(9p)

3. Beräkna integralen

$$\int_{|z+1-i|=\sqrt{2}} \frac{z^2}{\cos(z^2)} dz.$$

(8p)

4. Hitta en konform och bijektiv avbildning av området $A := \{z : |z| < 2, \text{Re}(z) > 0\}$ på enhetscirkelskivan $D(0, 1)$ sådan att punkten 1 avbildas på origo.

(9p)

5. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att $\text{Log}(z)$ är holomorf i det öppna högra halvplanet.

(6p)

6. Låt f vara holomorf i $D(0, 1)$ och anta att $\text{Im} f(x) = 0$ för reella x . Visa att $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ i $D(0, 1)$.
Tips: Visa först att $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ är holomorf i $D(0, 1)$.

(9p)

Lycka till!
David

1. Lösning:

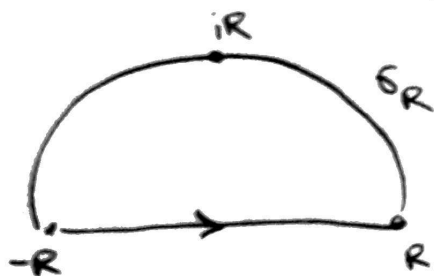
Låt $f(x) = \frac{x}{x^4 + 4}$, då är $\hat{f}(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{-itx}}{x^4 + 4} dx$.

Vi sätter $g(z) := \frac{z e^{-itz}}{z^4 + 4}$, och vi noterar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} g(z) dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$.

Låt $\gamma_R(s) := R e^{is}$, $s \in [0, \pi]$, samt $\delta_R := [-R, R] \cup \gamma_R$.



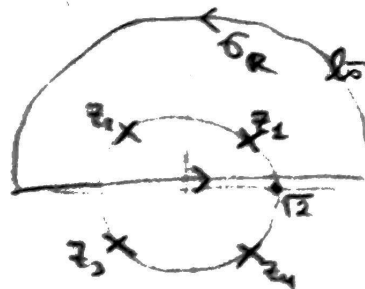
Vi har att $\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z e^{-itz}}{z^4 + 4} \right| |\gamma_R| \leq \left[\frac{e^{-itR} = e^{ty} \leq 1}{R^4 - 4} \right] \pi R$

$|z| \leq R$ på δ_R , $|z^4 + 4| \geq |z|^4 - 4 = R^4 - 4$ på δ_R $\left[\leq \frac{R \cdot \pi R}{R^4 - 4} \rightarrow 0 \right]$

Detta visar att $\int_{\delta_R} g(z) dz \rightarrow 0$,

så $\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\delta_R} g(z) dz$.

Vi antar att g har i $\mathbb{C}$ finit i all ord. i



lösningarna till ekvationen $z^4 = -4$.

Dessa lösningar har absolutbelopp $|z| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

och argument $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$, $k=0,1,2,3$,

där $z_1 = 1+i$, $z_2 = -1+i$, $z_3 = -1-i$, $z_4 = 1-i$.

Av dessa ligger z_1, z_2 i $\text{int}(\delta_R)$ medan z_3, z_4 ligger utanför ($\text{d.} R > \sqrt{2}$).

$$\text{Vi har att } \text{Res}_{1+i} \left(\frac{ze^{-itz}}{z^4+4} \right) \underset{\text{r  rregel}}{=} \left(\frac{ze^{-itz}}{4z^3} \right) \Big|_{z=1+i} = \frac{(1+i)e^{-it(1+i)}}{4(1+i)^2} = \dots =$$

$$= -\frac{ie^te^{-it}}{8}$$

$$\text{P  r vi Res}_{-1+i} \left(\frac{ze^{-itz}}{z^4+4} \right) = \left(\frac{ze^{-itz}}{4z^3} \right) \Big|_{z=-1+i} = \frac{(-1+i)e^{-it(-1+i)}}{4(-1+i)^2} = \dots =$$

$$= (-1+i) \frac{ie^te^{it}}{8}$$

Enligt Residueteo  r f  r vi:

$$\int_{\mathcal{C}_R} g(z) dz = 2\pi i \left(\frac{-ie^te^{-it}}{8} + \frac{ie^te^{it}}{8} \right) = 2\pi i \text{Re} \left(\frac{ie^te^{it}}{4} \right) =$$

$$= -\frac{\pi i e^t \sin t}{2}$$

G  r att l  t $R \rightarrow \infty$ s   vi allt   att $\hat{f}(t) = -2\pi i e^t \sin t$ f  r $t \leq 0$.

Efters  n $f(x)$ reellv  rd har vi att $\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$,

$$\text{s   f  r } t \geq 0 \text{ f  r vi: } \hat{f}(t) = \overline{-2\pi i e^{-t} \sin(-t)} =$$

$$= -2\pi i e^{-t} \sin t$$

S   slutligen f  r vi att $\hat{f}(t) = -2\pi i e^{-|t|} \sin t$, $t \in \mathbb{R}$.

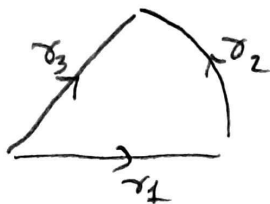
$$\text{Svar: } \hat{f}(t) = -\frac{\pi i e^{-|t|} \sin t}{2}$$

2. Lösung: $p(z) := z^4 - (2-i)z - i$

Vi använder Argumentprincipen.

Låt $\gamma_1(t) = t$, $t \in [0, R]$, $\gamma_2(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi/4]$,

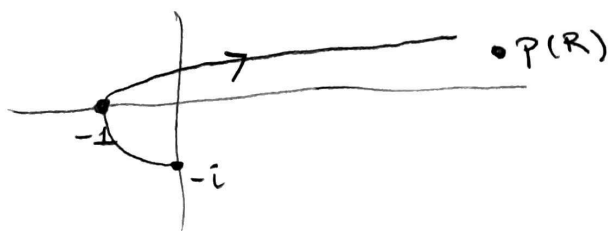
$\gamma_3(t) = te^{i\pi/4}$, $t \in [0, R]$, och $\sigma_R := \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$



argvar $p \circ \gamma_1$:

$$p(t) = t^4 - (2-i)t - i = t^4 - 2t + i(t-1)$$

$$p(0) = -i, \quad \text{Arg}(p(0)) = -\pi/2$$



$$p(R) = R^4 - 2R + i(R-1), \quad \text{Arg } p(R) \approx 0, \quad \text{Im } p(R) > 0 \text{ för } R \gg 0$$

$$\text{Im } p(t) = 0 \Leftrightarrow t-1=0 \Leftrightarrow t=1$$

$$\Rightarrow p \circ \gamma_1 \text{ skär } x\text{-axeln endast i punkten } p(1) = 1^4 - 2 \cdot 1 = -1$$

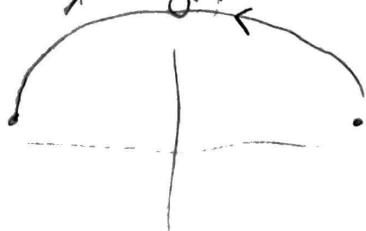
Vi får att $\argvar p \circ \gamma_1 \approx -3\pi/2$ (se figur)

argvar $p \circ \gamma_2$:

$$p(Re^{it}) = R^4 e^{i4t} - (2-i)Re^{it} - i = R^4 e^{i4t} \left(1 - \frac{(2-i)e^{-3it}}{R^3} - \frac{i}{R^4} e^{-4it} \right)$$

$$\Rightarrow \arg p(Re^{it}) \approx 4t$$

$$\Rightarrow \argvar p \circ \gamma_2 \approx \pi \quad (\text{se figur})$$



arguer $p \circ \gamma_3$:

$$p(te^{i\pi/4}) = -t^4 - (2-i)\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}t - i = -t^4 - \frac{3}{\sqrt{2}}t + i(-\frac{1}{\sqrt{2}}t - 1)$$

$$p(0) = -i, \quad \text{Arg } p(0) = -\pi/2$$

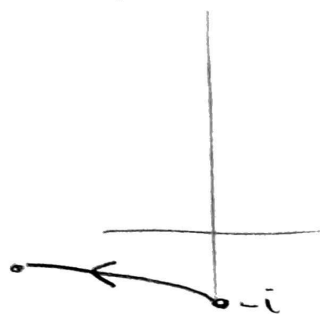
$$p(Re^{i\pi/4}) = -R^4 - \frac{3}{\sqrt{2}}R + i(-\frac{1}{\sqrt{2}}R - 1), \quad \arg p(Re^{i\pi/4}) \approx \pi,$$

$$\operatorname{Im} p(Re^{i\pi/4}) < 0, \quad \text{for } R > 0$$

$$\operatorname{Im} p(te^{i\pi/4}) < 0 \quad \text{for all } t \geq 0$$

$$\Rightarrow p \circ \gamma_3 \text{ korsar inte x-axeln}$$

$$\Rightarrow \arg p \circ \gamma_3 \approx -\pi/2 \quad (\text{se figur})$$



Vi får:

$$W(p \circ \gamma_R) = \frac{1}{2\pi} (\arg p \circ \gamma_1 + \arg p \circ \gamma_2 - \arg p \circ \gamma_3) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{3\pi}{2} + \pi + \pi/2 \right) = 0$$

Argumentprincipen ger att p har inga nollställen

inuti D_R , så ger oss ett lätet $R \rightarrow \infty$ för vi ett

p saknar nollställen i $\{z: |z| > 0, 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/4\}$.

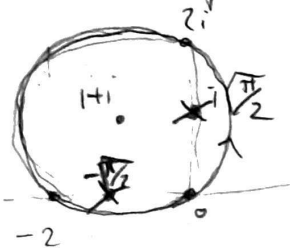
3. Lösning:

$$f(z) := \frac{z^2}{\cos z^2} \quad \text{är holm i } \mathbb{C} \text{ förutom isol. sing.}$$

i punkterna där $\cos z^2 = 0$.

Detta är precis de punkter där $z^2 = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{dvs } z = \pm \sqrt{\pi/2 + k\pi}, \pm i \sqrt{\pi/2 + k\pi}, \quad k=0,1,2,\dots$$



Eftersom $\sqrt{\frac{3\pi}{2}} > 2$ ser vi att det endast

finns två singulariteter i $D(1+i, \sqrt{2})$,

nämligen $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $i\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, där ju $\partial D(1+i, \sqrt{2}) = C(1+i, \sqrt{2}) = \emptyset$.

Vi behöver beräkna residyn i dessa två punkter:

$$\text{Res}_{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} f = \left(\frac{z^2}{-2 \sin z^2} \right) \Big|_{z=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \left(\frac{-\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{-2 \sin \frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{Res}_{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}} f = \left(\frac{z}{-2 \sin z^2} \right) \Big|_{z=i\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \underset{\text{RR}}{=} \frac{i\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{-2 \sin(-\frac{\pi}{2})} = i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

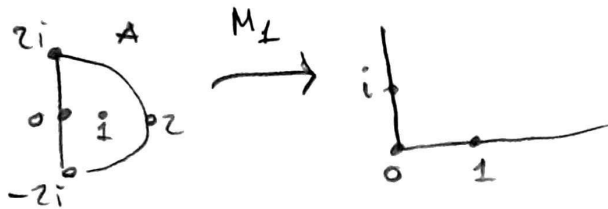
Enligt Residuetsats blir då:

$$\int_{|z|=1-i\sqrt{2}} \frac{z^2}{\cos z^2} dz = 2\pi i \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} + i \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} (-1+i).$$

4. Lösning:

Vi gör detta i steg.

Först vill vi hitta en Möbiustransformation från A till den första kvadranten



Detta kan vi göra genom att låta $2i \mapsto \infty$, $-2i \mapsto 0$, $2 \mapsto 1$,

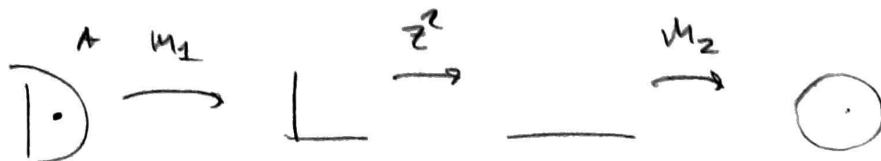
och ... standardrönningar som måste ingå i fullst. lös. ... $M_1(z) = \frac{z+2i}{iz+2}$

Sedan ser vi att z^2 avbildar första kvadranten konform och bijektivt på övre halvplanet.

Sen vill vi hitta en Möbiustransformation som tar det övre halvplanet på $D(0,1)$.

Detta kan vi göra genom att låta $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto i$, $\infty \mapsto -1$,

och ... vi får tillslut $M_2(z) = \frac{z-i}{-z-i}$.



$M_2 \circ z^2 \circ M_1$ är nu en konform & bijektiv avb.

från A till $D(0,1)$, men det är inte säkert att den avbildar 1 på 0!

Vi undersöker att $z^2 M_2(1) = \left(\frac{1+2i}{1+2}\right)^2 = \dots = e^{\pi i/3}$

vilket $M_2^{-1}(0) = i$, så om M_3 är en Möbiustransformation som avbildar övre halvplanet på övre halvplanet och s.a.

$M_3(e^{\pi i/3}) = i$, då kommer $M_2 \circ M_3 \circ z^2 \circ M_1$ lösa vårt problem.

$M_3(z) := az + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, kommer att bilda övre halvplanet
 på det övre halvplanet eftersom $M_3(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ och

$\operatorname{Im}(M_3(i)) = a > 0$. Vi letar därför efter a, b s.a

$$ae^{i\pi/3} + b = a\left(\frac{2i+1}{\sqrt{3}}\right) + b = \frac{a}{\sqrt{3}} + b + \frac{2a}{\sqrt{3}}i = i,$$

dvs $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, så $M_3(z) = \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}$

Vi får till slut att $M_2 \circ M_3 \circ z^2 \circ M_1(z) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{z+2i}{iz+2}\right)^2 - \frac{1}{2} - i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{z+2i}{iz+2}\right)^2 + \frac{1}{2} - i}$

är en Möbiustransformation med de egenskaper som önskades i uppgiften.

5. Lösning:

i högre halvplanet kan vi skriva:

$$\text{Vi noterar att } \text{Log } z = \ln|z| + i \text{Arg } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x},$$

$$\text{så } u(x, y) := \text{Re } \text{Log } z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), \quad v(x, y) := \text{Im } \text{Log } z = \arctan \frac{y}{x}.$$

Enligt satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer är

$\text{Log } z$ holm i högre halvplanet om den är C^1 och

$$u, v \text{ löser CR:s ekvationer } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}.$$

u & v är uppenbart C^∞ i det öppna högre halvplanet, så $\text{Log } z$ är också C^∞ där, så det återstår att visa att identiteterna är uppfyllda.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{1}{(x^2 + y^2)} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{p.s.s}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot -\frac{y}{x^2} = -\frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{x^2 + y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Vi ser alltså att } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{och} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

och u, v löser CR:s ekvationer, och vi ser således att

$\text{Log } z$ är holm i det öppna högre halvplanet.

6. Lösning: Vi visar först att

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} \text{ är holm i } D(0,1).$$

Nästa först att om $z \in D(0,1)$ så $\bar{z} \in D(0,1)$,

so g är väldefinierad på $D(0,1)$. Vi visar nu

att g är komplext deriverbar i en godst. punkt $z \in D(0,1)$.

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \overline{f'(\bar{z})}$$

(ul. skenregl. är laggyt)

vilket visar att g är holm i $D(0,1)$.

Låt nu x vara reellt. Vi får att $g(x) = \overline{f(\bar{x})} = \overline{f(x)}$

eftersom $\bar{x} = x$ och $\overline{f(x)} = f(x)$ (ty $\operatorname{Im} f(x) = 0$).

Vi har alltså att g och f är två holm för på $D(0,1)$

så $g = f$ på $[-1,1]$. Speciellt är $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n}) \forall n$,

och $\frac{1}{n} \rightarrow 0 \in D(0,1)$, så enligt identitetsprincipen

är $g = f$ på hela $D(0,1)$, dvs $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$ i $D(0,1)$,

vilket skulle visas.