

Komplex analys, MVE025/MVE295

2021 01 07, 8.30-12.30

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 0-19.5 (U), 20-29.5 (3), 30-39.5 (4), 40-50 (5)

1. Lös med hjälp av Laplacetransform begynnelsevärdesproblemet $u''(t) + u'(t) + u(t) = e^{-t/2}$ med begynnelsevillkor $u(0) = 0$ och $u'(0) = 1$.

(8p)

2. Bestäm med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3} dx.$$

(10p)

3. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till funktionen

$$2z^4 - z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$$

i annulusen $A(0, 1/3, 1)$.

(9p)

4. Hitta en bijektiv konform avbildning från $A := \{z : 0 < |z| < 1, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$ till $B := \{z : |z| < 1, |z - 1 - i| < 1\}$.

(10p)

5. Visa att funktionen

$$\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$$

har en primitiv i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ men inte i $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

(7p)

6. Låt f vara holo i $D(0, 1)$. Visa att

$$\int_{|z|=1/2} z \overline{f(z)} dz = \frac{\pi i \overline{f''(0)}}{16}.$$

(6p)

Lycka till!
David

1. Lösning: Laplacetransformen av ekvationen ger:

$$s^2 \tilde{u} - s u(0) - u'(0) + s \tilde{u} - u(0) + \tilde{u} = \widetilde{e^{-t/2}}$$

Enligt räkneregeln är $\widetilde{e^{-t/2}} = \frac{1}{s+1/2}$ vilket ger oss

$$(s^2 + s + 1) \tilde{u} - 1 = \frac{1}{s+1/2} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s+1/2)} + \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

Vi kan skriva $s^2 + s + 1 = (s+1/2)^2 + 3/4$ och PBU ger:

$$\frac{1}{((s+1/2)^2 + 3/4)(s+1/2)} = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1/2} - \frac{4}{3} \frac{(s+1/2)}{(s+1/2)^2 + 3/4}, \text{ så}$$

$$\tilde{u} = \frac{4}{3} \frac{1}{s+1/2} - \frac{4}{3} \frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 3/4} + \frac{1}{(s+1/2)^2 + 3/4}$$

Räkneregler ger: $\frac{s+1/2}{(s+1/2)^2 + 3/4} = \widetilde{e^{-t/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}$, $\frac{1}{(s+1/2)^2 + 3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}} \widetilde{e^{-t/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t)}$,

$$\text{så } \tilde{u} = \widetilde{e^{-t/2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right)}$$

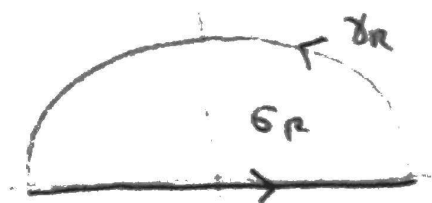
Inversionsformeln säger då att $u = e^{-t/2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right)$.
(Vi noterar att $u(0)=0$ samt $u'(0)=1$!)

Svar: $u = e^{-t/2} \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right)$

2. Lösning: Vi noterar först att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{x^2+x+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} g(z) dz \quad \text{där } g(z) = \frac{1}{z^2+z+1}.$$

Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$ och $\Theta_R := [-R, R] \cup \gamma_R$



Vi kan nu skriva

$$\int_{\gamma_R} g(z) dz = \int_{[-R, R]} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz$$

↖
Beräknar ut nka
residuellt

$$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$$

↖
felterna

Vi visar först att felterna går mot noll.

$$\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| \stackrel{\Delta \S}{\leq} \max_{z \in \gamma_R} |g(z)| \pi R \leq \left[\max_{|z|=R} |z^2+z+1|^{-3} (|z|^2 - |z| - 1)^3 = (R^2 - R - 1)^3 \right]_{\substack{\text{om } \Delta \geq \\ \text{på } \gamma_R}} \leq$$

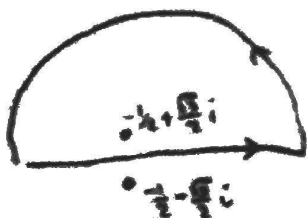
$$\leq \frac{\pi R}{(R^2 - R - 1)^3} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Nu beräknar vi ut $\int_{\gamma_R} g(z) dz$.

$\frac{1}{(z^2+z+1)^3}$ är holm i $\mathbb{C}$ förutom i nollställen till z^2+z+1 .

$$z^2+z+1 = (z+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \text{nollställen är } -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

varav endast $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in \text{int}(\Theta_R)$, $R > 1$.



$$g(z) = \frac{1}{(z^2 + z + 1)^3} = \frac{1}{(z + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3 (z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3} \quad \text{så enligt rektregel är}$$

$$\operatorname{Res}_{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} g = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3} \right)' \Big|_{z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{(z + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)^5} \right) \Big|_{z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{6}{(\sqrt{3}i)^5} = \frac{6}{9\sqrt{3}i} = \frac{2}{3\sqrt{3}i}.$$

Enligt residysatsen är nu $\int_{\Gamma_R} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} g = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

Eftersom funktionen går mot noll för $|z| \rightarrow \infty$ är

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$

3. Lösning: Vi använder Rouchés sats.

Vi hittar först antalet nollst. i $D(0,1)$.

Låt $f(z) := 2z^4$, $g(z) := -z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$. f har 4 nollst. i $D(0,1)$

Vi har att $|f(z)| = 2|z|^4 = 2$ på $\partial D(0,1)$ medan

$$|g(z)| = \left| -z^3 + \frac{1}{(z+3)^2} \right| \stackrel{\Delta \leq}{\leq} |z|^3 + \frac{1}{|z+3|^2} \leq \left[\underset{\substack{|z+3| \geq 3-|z|=2 \\ \text{på } \partial D}}{\frac{1}{2^2}} \right] \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} < 2 = |f(z)| \quad \text{på } \partial D(0,1).$$

Enligt Rouchés sats har $f+g$ lika många nollst. i $D(0,1)$ som f , dvs 4 st.

Vi hittar nu antalet nollst. i $D(0, \frac{1}{3})$.

Låt $f(z) := \frac{1}{(z+3)^2}$, $g(z) := 2z^4 - z^3$. f har inga nollst. i $D(0, \frac{1}{3})$.

$$|f(z)| \geq \left[|z+3| \leq |z|+3 = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \text{ på } \partial D(0, \frac{1}{3}) \right] \geq \left(\frac{3}{10} \right)^2 = \frac{9}{100} \text{ på } \partial D(0, \frac{1}{3}).$$

$$|g(z)| = |2z^4 - z^3| \stackrel{\Delta \leq}{\leq} 2|z|^4 + |z|^3 = \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^3} = \frac{5}{81} < \frac{9}{100} \leq |f(z)|$$

$\text{på } \partial D(0, \frac{1}{3}) \Rightarrow$ Rouché $f+g$ har lika många nollst. som f i $D(0, \frac{1}{3})$,

dvs inga. Vi noterar också att $f+g$ ej har några nollst.

på $\partial D(0, \frac{1}{3})$ eftersom $|f+g| \geq |f| - |g| > 0$ där

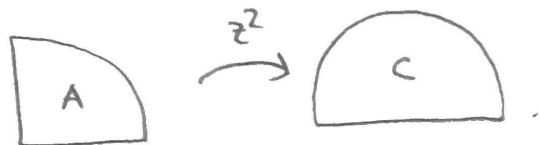
Det följer att $2z^4 - z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$ har $4 - 0 = 4$ nollst.

i $A(0, \frac{1}{3}, 1)$.

Svar: $2z^4 - z^3 + \frac{1}{(z+3)^2}$ har 4 nollst. i $A(0, \frac{1}{3}, 1)$.

4, Lösning: Vi gör detta i två steg.

Först noterar vi att z^2 avbildar A bijektivt och konformt på halvcirkelskivan $C := \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$

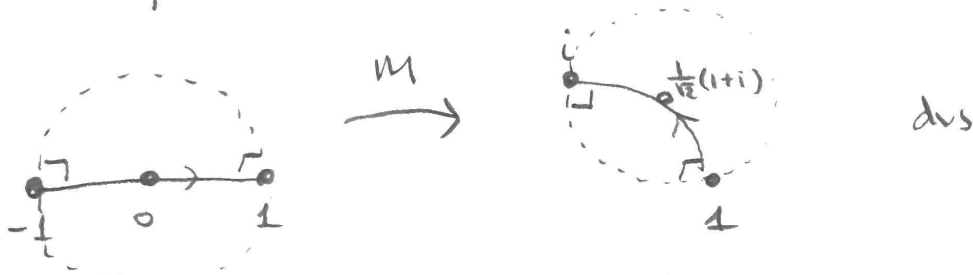


Nu letar vi efter en Möbiusavbildning som tar C till B :



Notera att B begränsas av cirkelerna $C(0,1)$ och $C(1+i,1)$ och dessa skär varandra i rät vinkel i punkterna 1 och i , medan C begränsas av $C(0,1)$ och den reella axeln, och att dessa skär varandra i rät vinkel i -1 och 1 .

Vi väljer nu Möb M på följande sätt:

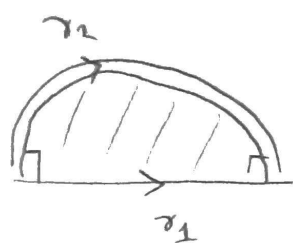


$$M(-1)=1, M(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), M(1)=i.$$

$$\text{Ständardräcker ger att } M(z) = \frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)z + (1+i)}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)z + \sqrt{2}}$$

Eftersom Möb avbildar cirklar $\cup$ linjer på cirklar el linjer får vi att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = C(0,1)$.

Eftersom $C(0,1)$ skär $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i rät vinkel och M är konform följer det att $M(C(0,1)) =$ cirkel el linje genom 1 och i som skär $C(0,1)$ i rät vinkel $= C(1+i,1)$



Om $\gamma_1 \circ \gamma_2$ är som på bilden ser vi också att tack vare M 's konformitet att $M \circ \gamma_2$ går till vänster om $M \circ \gamma_1$ från startpunkten 1. Det följer att $M(C) = B$.

Vi får alltså att sammanföringen M

$$M(z^2) = \frac{(\sqrt{2}-1)(1+i)z^2 + (1+i)}{(2-\sqrt{2})(\sqrt{2}-i)z^2 + \sqrt{2}}$$

är en bijektiv och

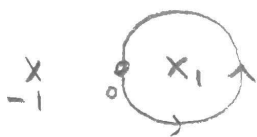
konform avbildning från A till B.

5. Lösning: Vi noterar att $f(z) := \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}$ är

holo i $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ och att $\text{Res}_1 f = 1$, $\text{Res}_{-1} f = -1$.

Vi får att $\int_{|z-1|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_1 f = 2\pi i \neq 0$.

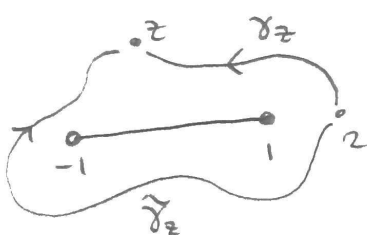
f kan därför ej ha primitiv F i $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ för ist skulle enligt sats $\int_{|z-1|=1} f dz = F(0) - F(0) = 0$.



Vi visar nu att f har primitiv F i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

Låt för varje $z \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$: $F(z) := \int_{\gamma_z} f dz$ där

γ_z är någon st. gl. kurva i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ från säg 2 till z :



Antag att $\tilde{\gamma}_z$ är någon annan st. gl. kurva i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ från 2 till z .

$\gamma_z \cup (-\tilde{\gamma}_z)$ är då en st. gl. sluten kurva

i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, och kommer därför vara homotop med $mC(0, 2)$ där m är kurvans vridningsstal. Vi får då att

$$\int_{\gamma_z} f dz - \int_{\tilde{\gamma}_z} f dz = \int_{\gamma_z \cup (-\tilde{\gamma}_z)} f dz \stackrel{CS}{=} m \int_{|z|=2} f dz \stackrel{RS}{=} m 2\pi i (\text{Res}_{-1} f + \text{Res}_1 f) = 0$$

dvs $\int_{\gamma_z} f dz$ är oberoende av val av kurva!

Givet z, h låt $\gamma_h(t) := z + th$, $t \in [0, 1]$. Vi får att

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{\int_{\gamma_z \cup \gamma_h} f dz - \int_{\gamma_z} f dz}{h} = \frac{\int_{\gamma_h} f dz}{h} = \frac{1}{h} \int_0^1 f(z+th) dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(z)$$

som i beviset av existens av primitiv i enkelt sam. område.

Detta visar att f har primitiv i $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

6. Lösning:

Enligt sats kan f skrivas $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ i $D(0,1)$,

$$\text{där } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

$$\text{Vi har också att } \overline{f(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} \bar{z}^k.$$

$$\text{På } C(0, 1/2) \text{ är } z\bar{z} = |z|^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{4z},$$

$$\text{så } z \overline{f(z)} = z \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k} \frac{1}{4^k} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{4^k} z^{1+k} \text{ på } C(0, 1/2).$$

Serien är även likformigt konvergent på $C(0, 1/2)$ så

$$\int_{|z|=1/2} z \overline{f(z)} dz = \int_{|z|=1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{4^k} z^{1+k} dz \stackrel{\text{likf. konv.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{4^k} \int_{|z|=1/2} z^{1+k} dz =$$

$$= \left[\int_{|z|=1/2} z^{1+k} dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=2 \\ 0, & k \neq 2 \end{cases}, \text{ fud. ex} \right] = \frac{\overline{a_2}}{16} 2\pi i = \frac{\overline{f''(0)} \pi i}{16},$$

vilket skulle visas.