

Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2020 10 29, 8:30-12:30

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

1. Bestäm med hjälp av residykalkyl integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{(x^2 - 6x + 11)^2} dx. \quad (7p)$$

2. Använd metoder från kursen för att hitta antalet nollställen till polynomet

$$p(z) := z^5 + (-2 + i)z^2 - i \text{ i kvadranten } \{z : \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Im}(z) > 0\}. \quad (7p)$$

3. Hitta med hjälp av Z-transformen en följd $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ som löser differensekvationen:

$$a_{k+3} - 8a_k = b_{k+2} + 8b_k,$$

med begynnelsevärden $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, där $(b_k)_{k=0}^{\infty}$ är en given begränsad följd och $b_0 = b_1 = 0$. (7p)

4. Låt M vara en Möbiusavbildning sådan att $M(-1) = -1$, $M(1) = 1$ samt $M(0) = e^{i\theta}$ för något $\theta \in (0, 2\pi)$. Bestäm bilden av $A := \{z : \operatorname{Re}(z) < 0, \operatorname{Im}(z) < 0\}$ under avbildningen $g(z) := M(z^2)$. (7p)

5. Hitta en primitiv funktion till $\frac{1}{1+z^3}$ i området $\{z : \operatorname{Re}(z) > -1, -1/2 < \operatorname{Im}(z) < 1/2\}$, och använd sedan denna för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx. \quad (7p)$$

6. Låt f vara en meromorf funktion i $\mathbb{C}$ och a en punkt (inte en pol). Visa att konvergensradien för f 's Taylorutveckling med centrum i a är lika med avståndet mellan a och den närmaste polen. (5p)

7. Låt $f(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ vara en kontinuerlig funktion, och låt $g(z) := \int_0^1 f(t)e^{zt} dt$. Visa att g är komplext deriverbar i $z = 0$ och att $g'(0) = \int_0^1 t f(t) dt$. (5p)

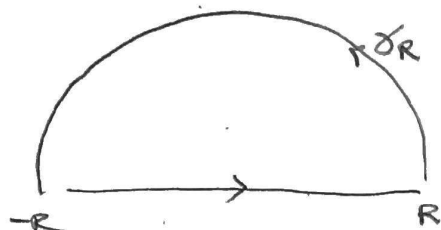
8. Låt $u(z)$ vara en harmonisk funktion på $\mathbb{C}$, och anta att $u(x) = 0$ för $x \in [-1, 1]$. Visa att $u(x) = 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. (5p)

Lycka till!
David

1. Lösning: $\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix})$ s.a.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2-6x+11)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}(e^{ix})}{(x^2-6x+11)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Im}\left(\frac{e^{ix}}{(x^2-6x+11)^2}\right) dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-6x+11)^2} dx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-6x+11)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz$$



Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$$\Gamma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$$

$$\int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz = \int_{[-R, R]} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 räknas ut mha $\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-6x+11)^2} dx$ $\rightarrow$ fellem, vill visa $\rightarrow 0$
 residykalleyd $R \rightarrow \infty$ $R \rightarrow \infty$

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} \right| \pi R \leq \left[|e^{iz}| = e^{\operatorname{Re}(iz)} = e^{-y} \leq 1 \text{ p.ä. } \gamma_R \text{ ty } y \leq 0 \text{ p.ä. } \gamma_R \right]$$

$\Delta \leq \int$

$$|(z^2-6z+11)^2| = |z^2-6z+11|^2 \geq \underset{\text{omv. } \Delta \geq}{(|z|^2 - 6|z| - 11)^2} = (R^2 - 6R - 11)^2 \text{ p.ä. } \gamma_R \leq$$

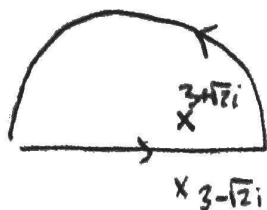
$$\leq \frac{\pi R}{(R^2 - 6R - 11)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$z^2 - 6z + 11 = (z-3)^2 + 2 \text{ - har nollst. i } 3 \pm \sqrt{2}i$$

$$\Rightarrow (z^2 - 6z + 11)^2 = (z-3-\sqrt{2}i)^2 (z-3+\sqrt{2}i)^2$$

$$\frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} \text{ har i } \mathbb{C} \text{ första ord. sing. i } 3 \pm \sqrt{2}i, \text{ varav}$$

$$3 + \sqrt{2}i \in \operatorname{int}(\Gamma_R) \text{ f.ä. } R > 1$$



$$\text{Res}_{3+\sqrt{2}i} \left(\frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} \right) \underset{\text{RRC}}{=} \left(\frac{e^{iz}}{(z-3+\sqrt{2}i)^2} \right)' \Big|_{z=3+\sqrt{2}i} = \left(\frac{ie^{iz}(z-3+\sqrt{2}i)^2 - e^{iz}2(z-3+\sqrt{2}i)}{(z-3+\sqrt{2}i)^4} \right) \Big|_{z=3+\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{ie^{i(3+\sqrt{2}i)}(2\sqrt{2}i)^2 - e^{i(3+\sqrt{2}i)}2(2\sqrt{2}i)}{(2\sqrt{2}i)^4} = \frac{e^{-\sqrt{2}+3i}}{64}(-8i-4\sqrt{2}i) =$$

$$= -\frac{i(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+3i}}{16}$$

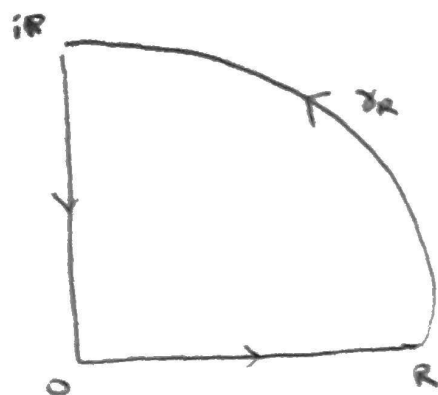
$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz \underset{\text{residysatien}}{=} 2\pi i \left(\frac{-i(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+3i}}{16} \right) = \frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+3i}}{8}$$

Vi får alltså att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2-6x+11)^2} dx = \text{Im} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2-6x+11)^2} dx \right) =$

$$= \text{Im} \left(\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z^2-6z+11)^2} dz \right) = \text{Im} \left(\frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}+3i}}{8} \right) = \frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \sin 3}{8}$$

Svar: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{(x^2-6x+11)^2} dx = \frac{(2-\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \sin 3}{8}$

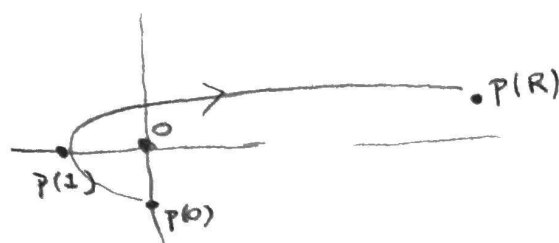
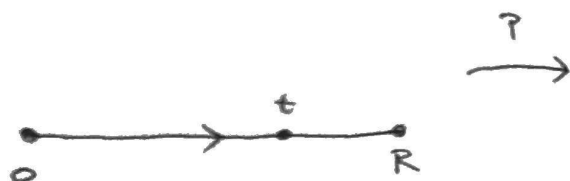
2. Lösning: Vi använder argumentprincipen.



$$\gamma_R(t) := Re^{it}, t \in [0, \pi/2]$$

$$\delta_R := [0, R] \cup \gamma_R \cup [iR, 0]$$

arguer($p \circ [0, R]$):



$$p(t) = t^5 + (-2+i)t^2 - i = t^2 - 2t + i(t^2 - 1)$$

$$p(0) = -i, \text{ Arg}(p(0)) = -\pi/2$$

$$p(R) = R^5 - 2R + i(R^2 - 1) \leftarrow i \text{ ÖHP}$$

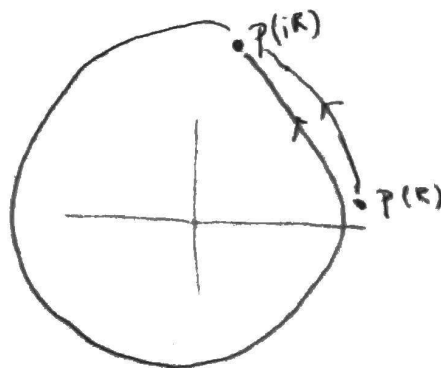
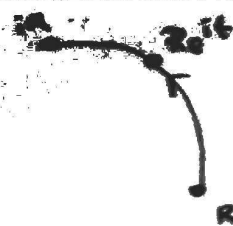
$$\Rightarrow \text{Arg}(p(R)) \approx 0$$

$p \circ [0, R]$ skär reella axeln då $\text{Im } p(t) = (t^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow t = 1$ ($t \in [0, R]$ så $t = -1$ ingår inte i kurvan), så vi ser att $p \circ [0, R]$ skär reella axeln endast i punkten $p(1) = -1$.

Det följer att $\arguer(p \circ [0, R]) \approx -\frac{3\pi}{2}$, se figur!

arguer($p \circ \gamma_R$):



$$p(Re^{it}) = R^5 e^{5it} + (-2+i)R^2 e^{2it} - i =$$

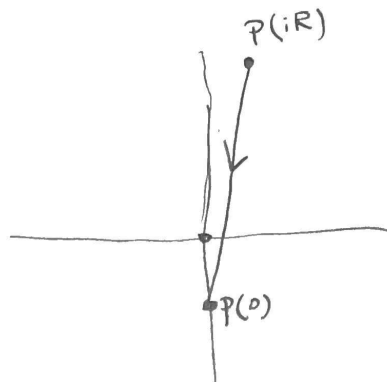
$$= R^5 e^{5it} \left(1 + \frac{(-2+i)e^{-3it}}{R^3} - \frac{ie^{-5it}}{R^5} \right)$$

eftersom $R \gg 1$

$$\Rightarrow \arg(p(Re^{it})) \approx 5t + 2\pi k$$

$$\Rightarrow \arguer(p \circ \gamma_R) \approx \frac{5\pi}{2}, \text{ se figur!}$$

$\arg\text{ver}(p \circ [iR, 0])$:



$$p(it) = it^5 + (-2+i)(-t^2) - i = 2t^2 + i(t^5 - t^2 - 1)$$

$$p(iR) = 2R^2 + i(R^5 - R^2 - 1), \quad \text{Arg}(p(iR)) \approx \pi/2$$

$$p(0) = -i, \quad \text{Arg}(p(0)) = -\pi/2$$

$$\text{Re}(p(it)) = 2t^2 \geq 0 \quad \forall t \in [0, R] \Rightarrow p \circ [iR, 0] \text{ passerar } 0 \text{ till h\u00f6ger}$$

$$\Rightarrow \arg\text{ver}(p \circ [iR, 0]) \approx -\pi, \text{ \& figurs!}$$

$$\forall i \text{ f\u00f6r } W(p \circ \gamma_R) = \frac{1}{2\pi} (\arg\text{ver}(p \circ [0, R]) + \arg\text{ver}(p \circ \gamma_R) + \arg\text{ver}(p \circ [iR, 0])) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{3\pi}{2} + \frac{5\pi}{2} - \pi \right) \approx 0, \quad R \gg 1 \Rightarrow W(p \circ \gamma_R) = 0, \quad R \gg 1$$

$\uparrow$
 $W(p \circ \gamma_R)$
heltal

$\Rightarrow p(z)$ har inga nollst\u00e4llen i f\u00f6rsta kvadranten.

Ans. p\u00e5r.

Svar: $p(z)$ har inga nollst. i f\u00f6rsta kvadranten.

3. Lösning: Låt $\alpha := (a_k)_{k=0}^{\infty}$, $\beta := (b_k)_{k=0}^{\infty}$.

* kan då skrivas: $S^3(\alpha) - 8\alpha = S^2(\beta) + 8\beta$.

$$ZT \text{ av detta ger: } z^3(z(\alpha) - \underbrace{a_0}_0 - \underbrace{\frac{a_1}{z}}_0 - \underbrace{\frac{a_2}{z^2}}_0) - 8z(\alpha) = z^2(z(\beta) - \underbrace{b_0}_0 - \underbrace{\frac{b_1}{z}}_0) + 8z(\beta)$$

$$\Rightarrow (z^3 - 8)z(\alpha) = (z^2 + 8)z(\beta) \Rightarrow z(\alpha) = \frac{z^2 + 8}{z^3 - 8} z(\beta).$$

Vi letar nu efter följd (h_k) s.a. $Z((h_k)) = \sum_0^{\infty} \frac{h_k}{z^k} = \frac{z^2 + 8}{z^3 - 8}$

$$\frac{1}{z^3 - 8} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - 8/z^3} \stackrel{|\frac{8}{z^3}| < 1}{=} \frac{1}{z^3} \sum_0^{\infty} \left(\frac{8}{z^3}\right)^k = \frac{1}{z^3} \sum_0^{\infty} \frac{8^k}{z^{3k}}$$

$$\frac{z^2 + 8}{z^3 - 8} = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} \frac{8^k}{z^{3k}} + \frac{8}{z^3} \sum_0^{\infty} \frac{8^k}{z^{3k}} = \sum_0^{\infty} \frac{8^k}{z^{3k+1}} + \sum_0^{\infty} \frac{8^{k+1}}{z^{3k+1}} = \sum_0^{\infty} \frac{h_m}{z^m},$$

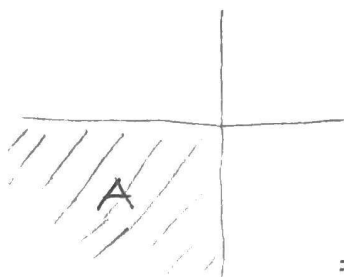
$$\text{där } h_m := \begin{cases} 8^k, & m=3k, k \geq 1 \\ 8^k, & m=3k+1, k \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}, \text{ dvs } (h_m) = (0, 1, 0, 8, 8, 0, 64, 64, 0, \dots)$$

Vi har alltså att $Z(\alpha) = Z((h_k)) Z(\beta) = Z((h_k) * \beta)$

$$\Rightarrow \alpha = (h_k) * \beta, \text{ dvs } a_k = \sum_{j=0}^k h_j b_{k-j} \quad \text{Prop.}$$

$$\text{Svar: } a_k = \sum_{j=0}^k h_j b_{k-j}, \text{ där } h_j := \begin{cases} 8^k, & j=3k, k \geq 1 \\ 8^k, & j=3k+1, k \geq 0 \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

4. Lösning:



Eftersom $A = \{z: |z| > 0, -2\pi < \text{Arg}(z) < -\frac{3\pi}{2}\}$

och $\arg(z^2) = 2\arg(z) + 2\pi k$ för vi

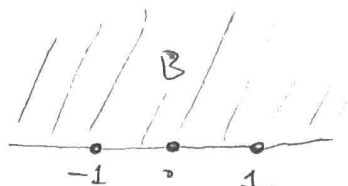
att bilden av A under avbildningen

z^2 är $B = \{z: |z| > 0, -0 < \text{Arg}(z) < \pi\} =$

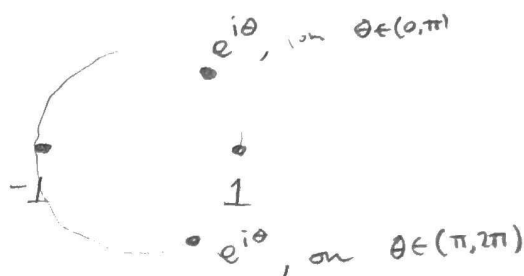
$= \{z: \text{Im}(z) > 0\}$ = det öppna övre halvplanet.

Vi har nu att $g(A) = M(B)$.

Vad är $M(B)$?



M



Randen till B är den reella axeln

-1, 0, 1 ligger alla på den reella axeln

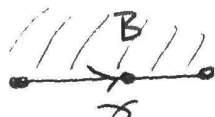
M Märv $\Rightarrow M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) =$ cirkel el linje som går genom

punkterna $M(-1) = -1, M(0) = e^{i\theta}, M(1) = 1 = C(0, 1)$

Det följer att $M(B)$ begränsas av $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = C(0, 1)$,

så $M(B) =$ antingen $D(0, 1)$ el. $\hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(0, 1)}$.

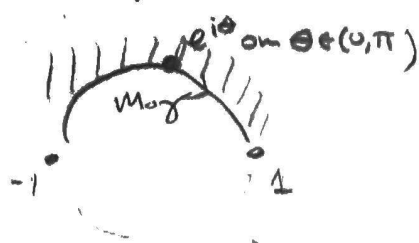
Vi avgör vilket mha konformitet.



Låt $\gamma(t) = t, t \in [-1, 1]$. γ ligger till vänster om γ .

M är konform, så $M(B)$ ligger till vänster om $M \circ \gamma$.

M



$M \circ \gamma$ går längs $C(0, 1)$ från -1 via $e^{i\theta}$

till 1. Vi ser från figur att om

$\theta \in (0, \pi): M(B) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(0, 1)}$

medan om

$\theta \in (\pi, 2\pi): M(B) = D(0, 1)$



$M \circ \gamma$ $e^{i\theta}$ om $\theta \in (\pi, 2\pi)$

Svar: Om $\theta \in (0, \pi)$ är $g(A) = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{D(0, 1)}$,

medan om $\theta \in (\pi, 2\pi)$ är $g(A) = D(0, 1)$.

5. Lösning:

$1+z^3$ har nollst. $-1, e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}$

PBU ger: $\frac{1}{1+z^3} = \frac{a_1}{z+1} + \frac{a_2}{z-e^{\pi i/3}} + \frac{a_3}{z-e^{-\pi i/3}}$

Vi notera: $a_1 = \underset{\text{Res}}{\text{Res}}_{-1} \left(\frac{1}{1+z^3} \right) = \left(\frac{1}{3z^2} \right) \Big|_{z=-1} = -\frac{1}{3}$, $a_2 = \underset{\text{Res}}{\text{Res}}_{e^{\pi i/3}} \left(\frac{1}{1+z^3} \right) = \left(\frac{1}{3z^2} \right) \Big|_{z=e^{\pi i/3}} =$

$= \left(\frac{1}{3z^2} \right) \Big|_{z=e^{\pi i/3}} = \frac{e^{-2\pi i/3}}{3}$, $a_3 = \underset{\text{Res}}{\text{Res}}_{e^{-\pi i/3}} \left(\frac{1}{1+z^3} \right) = \left(\frac{1}{3z^2} \right) \Big|_{z=e^{-\pi i/3}} = \frac{e^{2\pi i/3}}{3}$

Vi får att $F(z) := \frac{1}{3} \left(\text{Log}(z+1) + e^{-2\pi i/3} \text{Log}(z-e^{\pi i/3}) + e^{2\pi i/3} \text{Log}(z-e^{-\pi i/3}) \right)$

är en primitiv till $\frac{1}{1+z^3}$ där F är höjd, dvs speciellt

$\{z: \text{Re}(z) > -1, -\frac{1}{2} < \text{Im}(z) < \frac{1}{2}\}$



Vi har nu att $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \int_{[0,1]} \frac{1}{1+z^3} dz = F(1) - F(0)$

Notera: $1-e^{\pi i/3} = e^{-\pi i/3}$, $1-e^{-\pi i/3} = e^{\pi i/3}$, $-e^{\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$, $-e^{-\pi i/3} = e^{2\pi i/3}$

$\Rightarrow \text{Log}(1-e^{\pi i/3}) = -\pi i/3$, $\text{Log}(1-e^{-\pi i/3}) = \pi i/3$, $\text{Log}(-e^{\pi i/3}) = -2\pi i/3$, $\text{Log}(-e^{-\pi i/3}) = 2\pi i/3$

Vi får: $F(1) - F(0) = \frac{1}{3} \left(\text{Log} 2 + e^{-2\pi i/3} \text{Log}(1-e^{\pi i/3}) + e^{2\pi i/3} \text{Log}(1-e^{-\pi i/3}) - \right.$

$\left. - \text{Log} 1 - e^{-2\pi i/3} \text{Log}(-e^{\pi i/3}) - e^{2\pi i/3} \text{Log}(-e^{-\pi i/3}) \right) = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + e^{-2\pi i/3} (-\pi i/3) + 2\pi i/3 + \right.$

$\left. + e^{2\pi i/3} (\pi i/3 - 2\pi i/3) \right) = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\pi i}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\frac{\pi i}{3}\right) \right) =$

$= \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

Svar: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{\ln 2}{3} + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

6. Lösning: Låt $f(z) = \sum_0^{\infty} c_n (z-a)^n$ vara f 's TU.

Om d betecknar avståndet mellan a och den närmaste polen betyder det att f är holm i $D(a, d)$. Enligt sats är då TU konvergent i $D(a, d)$, dvs konvergensradien R är större eller lika med d , $R \geq d$.

Vi vill nu visa att $R \leq d$.

Antag istället att $d < R$. Låt b vara en pol till f s. a. $|a-b|=d$.

Enligt sats är $g(z) := \sum_0^{\infty} c_n (z-a)^n$ holm i $D(a, R)$, speciellt är g kont. i punkten b , så $\lim_{z \rightarrow b} |g(z)| = |g(b)| < \infty$.

Men $f(z) = g(z)$ då $z \in D(a, d)$ och $\lim_{z \rightarrow b} |f(z)| = \infty$ eftersom b är en pol, vilket är en motsägelse. Detta visar att antagandet $d < R$ är falskt, dvs $R \leq d$.

Tillsammans leder detta till att $R = d$, vilket skulle visas.

7. Lösning: Vi vill visa att $\frac{g(h) - g(0)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^1 t f(t) dt$.

Man vill visa $\left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - \int_0^1 t f(t) dt \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Notera:

$$\frac{g(h) - g(0)}{h} - \int_0^1 t f(t) dt = \frac{\int_0^1 f(t) e^{ht} dt - \int_0^1 f(t) dt}{h} - \int_0^1 t f(t) dt =$$

$$= \int_0^1 f(t) \left(\frac{e^{ht} - 1}{h} - t \right) dt.$$

$$\frac{e^{ht} - 1}{h} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ht)^k}{k!} = 1 + ht + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^k t^k}{k!} \Rightarrow \frac{e^{ht} - 1}{h} - t = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-1} t^k}{k!} = h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2} t^k}{k!}$$

$$\Rightarrow \left| \frac{e^{ht} - 1}{h} - t \right| = \left| h \sum_{k=2}^{\infty} \frac{h^{k-2} t^k}{k!} \right| \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|h|^{k-2} |t|^k}{k!} \leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \leq |h| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e|h|$$

$|t| \leq 1$
 $|h| \leq 1$

$$\text{Vi får att } \left| \frac{g(h) - g(0)}{h} - \int_0^1 t f(t) dt \right| = \left| \int_0^1 f(t) \left(\frac{e^{ht} - 1}{h} - t \right) dt \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \int_0^1 \left| \frac{e^{ht} - 1}{h} - t \right| dt$$

$\Delta \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\leq e|h| \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

Detta visar att g är komplext deriverbar i 0 och att

$$g'(0) = \int_0^1 t f(t) dt.$$

8. Lösning: Eftersom $\mathbb{C}$ är enkelt sammanhängande finns enligt sats en hel fkn f s.a. $u = \operatorname{Re} f$. Låt $g(z) := if(z)$.

Vi får då att $\operatorname{Im} g(z) = \operatorname{Re} f(z) = u(z)$, så g är reellvärd på $[-1, 1]$.

Enligt CR: $g' = \frac{\partial g}{\partial x}$, och mer allmänt $g^{(k)} = \frac{\partial^k g}{\partial x^k}$.

Eftersom g är reellvärd på $[-1, 1]$ följer att $\frac{\partial^k g}{\partial x^k}$ alla är reellvärda på $[-1, 1]$, och speciellt att $g^{(k)}(0) \in \mathbb{R} \quad \forall k \geq 0$.

Enligt satsen om Taylorutveckling kan g skrivas

$$g(z) = \sum_0^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} z^k, \text{ och detta gäller i hela } \mathbb{C}.$$

Om $x \in \mathbb{R}$: $g(x) = \sum_0^{\infty} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k \in \mathbb{R}$ eftersom

$\frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ och x^k alla är reella.

Det följer att $u(x) = \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Im} g(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vilket skulle visas.