

# Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2020 08 28, 14:00-18:00

Kursansvarig: David Witt Nyström, 0767794288

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Låt

$$f(z) := \frac{e^{-z^2}}{z^2 \sin z}.$$

- (a) Om  $f(z) = \sum_k a_k z^k$  är Laurentseriutvecklingen av  $f$  giltig i  $\{z : 0 < |z| < 1\}$ , bestäm  $a_k$  för  $-4 \leq k \leq 1$ . (4p)
- (b) Vilken ordning har  $f$ 's pol i 0? (1p)
- (c) Bestäm  $\int_{|z|=1} f(z) dz$ . (1p)
- (d) Bestäm  $\int_{|z+1|=4} f(z) dz$ . (3p)

2. Bestäm bilden av  $A := \{z : |z+1| < 1, \operatorname{Re}(z) > -1, \operatorname{Im}(z) > 0\}$  under avbildningen

$$f(z) := \frac{1}{z^3 + 3z^2 + 3z + 1}.$$

(Tips! Skriv  $f$  som en sammansättning av enklare funktioner.) (7p)

3. Hitta en funktion  $g(z)$  som är holomorf på  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  och sådan att  $\int_{|z|=1/2} g(z) dz = 1$  och  $\int_{|z|=2} g(z) dz = -1$ . (5p)

4. Använd metoder från kursen för att bestämma antalet nollställen till  $e^{-z} + z^2 - 6z + 9$  i området  $\{z : |z - \pi| < 1\}$ . (7p)

5. Bestäm  $\int_{|z|=1} (f(z))^2 dz$  där  $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k e^{-k^2}$ . (7p)

6. Låt  $g(z) := \sum_{n=1}^N a_n x^n + \sum_{m=1}^M b_m y^m$  där  $z = x + iy$ . Om  $g$  är holomorf, vad kan du säga om koefficienterna  $a_n, b_m$ ? Motivera ditt svar. (5p)

7. Låt  $\alpha := (a_k)_{k=0}^{\infty}$  vara en följd av komplexa tal sådan att  $|a_k| \leq 1$  för alla  $k$ , och låt  $Z(\alpha)$  beteckna Z-transformen av  $\alpha$ . Visa att om  $Z(\alpha)(k) = 0$  för alla  $k \geq 2$  så måste  $a_k = 0$  för alla  $k$ . (5p)

8. Låt  $f$  vara en holomorf funktion i  $\{z : 0 < |z| < 1\}$ . Visa att om  $\operatorname{Re}(f) \leq M$  för någon konstant  $M$  så är  $f$ 's singularitet i 0 hävbar. (5p)

Lycka till!  
David

① a

Lösning: Vi har  $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7)$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z(1 - (\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(z^6)))} \underset{|z| \text{ litet}}{=} \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(z^6))^k = \dots =$$

$$= \frac{1}{z} (1 + \frac{z^2}{6} + \frac{7}{360} z^4 + O(z^6))$$

$$e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{z^4}{2} + O(z^6), \text{ vilket leder till:}$$

$$f(z) = \dots = \frac{1}{z^3} (1 - \frac{5}{6} z^2 + \frac{67}{360} z^4 + O(z^6)) = 1 \cdot z^{-3} - \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{67}{360} z + \dots$$

Vi ser därför att  $a_{-4}=0, a_{-3}=1, a_{-2}=0, a_{-1}=-\frac{5}{6}, a_0=0, a_1=\frac{67}{360}$ .

Svar:  $a_{-4}=0, a_{-3}=1, a_{-2}=0, a_{-1}=-\frac{5}{6}, a_0=0, a_1=\frac{67}{360}$ .

Lösning: Från räkningen ovan ser vi enligt Sats att polens ordning är 3. Svar: Ordning 3.

c

Lösning:  $f$  är holm i  $\mathbb{C}$  förutom isol. sing. i punkterna  $k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Av dessa ligger endast 0 inuti kurvan  $|z|=1$ . Vi ser också från a) att  $\text{Res}_0 f = a_{-1} = -\frac{5}{6}$ . Vi får att

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_0 f = -\frac{5\pi i}{3}. \quad \text{Svar: } \int_{|z|=1} f(z) dz = -\frac{5\pi i}{3}.$$

$\nwarrow$  Residu-sats

d

Lösning: Av  $f$ 's sing. ligger  $-\pi \leq 0$  inuti kurvan  $|z+1|=4$ .

$\sin z$  har enkelt nollställe i  $-\pi$ ,  $\frac{e^{-z^2}}{z}$  holm i omg. till  $-\pi$ , se

$$\text{Res}_{-\pi} f = \left( \frac{e^{-z^2}/z}{(\sin z)'} \right) \Big|_{z=-\pi} = \frac{e^{-\pi^2}/\pi^2}{-1} = -\frac{e^{-\pi^2}}{\pi^2}. \text{ Vi får att}$$

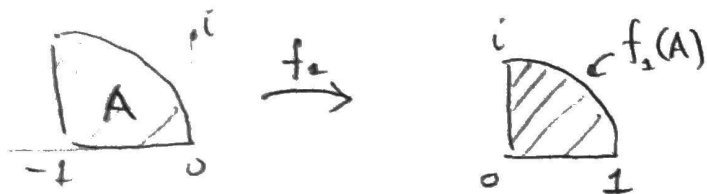
$$\int_{|z+1|=4} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}_0 f + \text{Res}_{-\pi} f) = \dots = \left( -\frac{5\pi}{3} - \frac{2e^{-\pi^2}}{\pi} \right) i.$$

$\nwarrow$  Res. sats

Svar:  $\int_{|z+1|=4} f(z) dz = \left( -\frac{5\pi}{3} - \frac{2e^{-\pi^2}}{\pi} \right) i.$

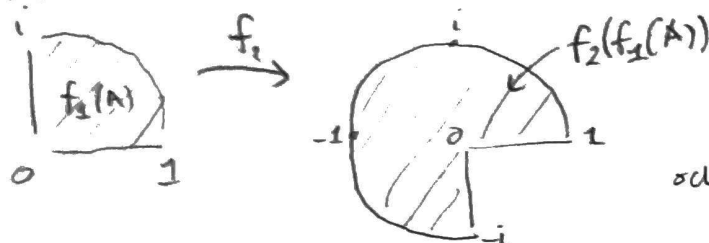
2. Lösning:  $\frac{1}{z^3 + 3z^2 + 3z + 1} = \frac{1}{(z+1)^3}$ . Vi har då att

$f(z) = f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$  där  $f_1(z) := z+1$ ,  $f_2(z) := z^3$ ,  $f_3(z) := \frac{1}{z}$ ,  
och därför att  $f(A) = f_3(f_2(f_1(A)))$ .



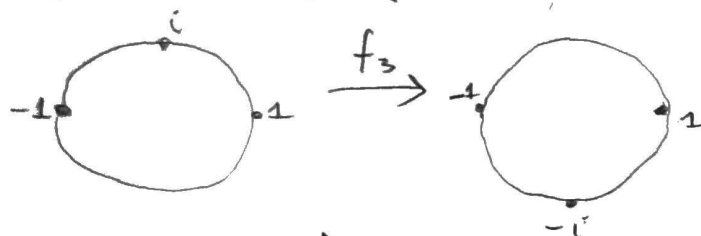
$f_1$  är en translation så vi får  $f_1(A)$  som i figur.

$f_2$  tredubblar vinkeln vi får som i figur:

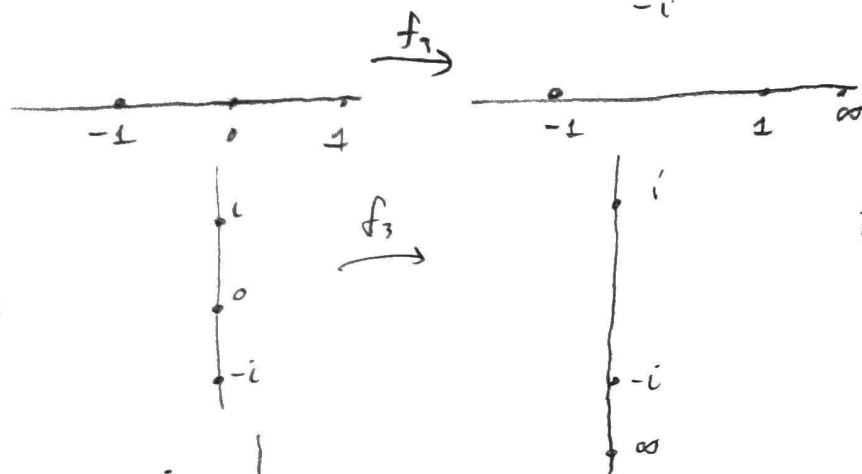


$f_3 = \frac{1}{z}$  är en Möbiustransformation och avbildar därför enhetscirkeln på sig själv

cirklar & linjer på cirklar el. linjer.

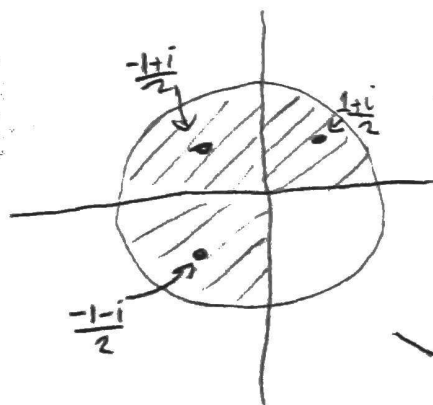


$1 \mapsto 1, -1 \mapsto -1, i \mapsto -i$  visar att  $f_3$  avbildar enhetscirkeln på sig själv



$-1 \mapsto -1, 0 \mapsto \infty, 1 \mapsto 1$  visar att  $f_3$  avbildar reella axeln på sig själv

$i \mapsto -i, 0 \mapsto \infty, -i \mapsto i$  visar att  $f_3$  avbildar imaginära axeln på sig själv.



$f_2(f_1(A))$  består av tre delar alla begränsade av enhetscirkeln, reella axeln och imaginära axeln, så detta kommer gälla för  $f_3(f_2(f_1(A)))$

Vi har att  $f_3(\frac{1+i}{2}) = \frac{2}{1+i} = 1-i$ ,  $f_3(\frac{-1+i}{2}) = \dots = -1-i$ ,  
 $f_3(\frac{-1-i}{2}) = \dots = -1+i$ . Detta visar att  $f(A)$  blir som i figuren, dvs

$$f(A) = \{z : |z| > 1, \text{Arg}(z) < 0 \text{ el. } \text{Arg}(z) > \pi/2\}$$

Svar:  $f(A) = \{z : |z| > 1, \text{Arg}(z) < 0 \text{ el. } > \pi/2\}$ .

3

Lösning: Enl. Residuetsatsen är  $\int_{|z|=1/2} g(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 g$  medan

$\int_{|z|=2} g(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}_0 g + \operatorname{Res}_1 g)$ , så vi behöver hitta en holo funkt

i  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  s.a.  $\operatorname{Res}_0 g = \frac{1}{2\pi i} = -\frac{i}{\pi}$  och  $\operatorname{Res}_1 g = \frac{1}{2\pi i} (-1-1) = \frac{i}{\pi}$ .

Notera att  $-\frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}$  är holo i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  med  $\operatorname{Res}_0 \left( -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{z} \right) = -\frac{i}{2\pi}$

och  $\operatorname{Res}_1 \left( -\frac{i}{2\pi} \frac{1}{z} \right) = 0$  då den är holo i omg. till 1. Pss

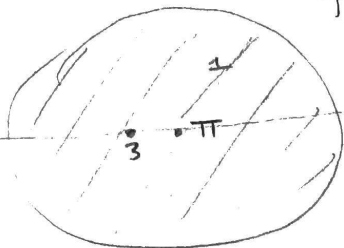
har vi att  $\frac{i}{\pi} \frac{1}{z-1}$  är holo i  $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\operatorname{Res}_1 \left( \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-1} \right) = \frac{i}{\pi}$ ,

$\operatorname{Res}_0 \left( \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-1} \right) = 0$ , och sammantaget har vi att  $-\frac{i}{2\pi} \frac{1}{z} + \frac{i}{\pi} \frac{1}{z-1} = \frac{i(z+1)}{2\pi z(z-1)}$

är holo i  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  och uppfyller kraven på integralerna.

Notera att detta är en av oändligt många möjliga lösningar!

4. Lösning: Låt  $f(z) := z^2 - 6z + 9 = (z-3)^2$  och  $g(z) := e^{-z}$ .  
 $f$  har 2 st nollst. i området (räknat med mult.).



Om vi kan visa att  $|f(z)| > |g(z)|$  på randen  $\{ |z-\pi| = 1 \}$  följer det av Rouché's sats att  $f+g = e^{-z} + z^2 - 6z + 9$  också har 2 nollst.

i området. Vi har

$$|z-3| = |(z-\pi) + (\pi-3)| \geq |z-\pi| - |\pi-3| \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{på randen}$$

$$\Rightarrow |f(z)| = |z-3|^2 \geq \frac{9}{16} \quad \text{på randen}$$

$$\operatorname{Re} z \geq \pi - 1 > 2 \quad \text{på randen}$$

$$\Rightarrow |g(z)| = |e^{-z}| = e^{-\operatorname{Re} z} \leq e^{-2} < \frac{1}{4} \quad \text{på randen}$$

$$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \text{på randen} \Rightarrow \text{Rouché} \quad f+g \text{ har 2 nollst. i området.}$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad e^{-z} + z^2 - 6z + 9 \text{ har 2 nollst. i } \{ z : |z-\pi| < 1 \}.$$

3

Lösning: Mha rotkriteriet ser vi att  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k e^{-k^2}$  konvergerar i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  och definierar därmed enl. sats en holm fnn där.

$(f(z))^2$  är då också holm och dess Laurentserieutveckling blir

$$\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k e^{-k^2} \right) \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m e^{-m^2} \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l z^l \quad \text{där}$$

$$a_l = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2} e^{-(l-k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2k^2 - l^2 + 2kl}. \quad \text{Enligt Residuetsatsen}$$

$$\text{får vi då: } \int_{|z|=1} (f(z))^2 dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0 f^2 = 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2k^2 - 2k - 1}.$$

$$\underline{\text{Svar:}} \quad \int_{|z|=1} (f(z))^2 dz = 2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2k^2 - 2k - 1}.$$

6.

Lösning: Om  $g$  är holomorf löser den enl. sats

Cauchy-Riemanns ekvationer:  $\frac{\partial g}{\partial x} = -i \frac{\partial g}{\partial y} *$

Vi har att  $\frac{\partial g}{\partial x} = \sum_{n=1}^N n a_n x^{n-1}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = \sum_{m=1}^m m b_m y^{m-1}$ .

Vi ser att  $\frac{\partial g}{\partial x}$  är ober. av  $y$  medan  $\frac{\partial g}{\partial y}$  är ober. av  $x$ ,  
så CRs ekvationer leder till att  $\frac{\partial g}{\partial x}$  och  $\frac{\partial g}{\partial y}$  är konstanter,  
dvs  $a_n = 0 \forall n \geq 2$ ,  $b_m = 0 \forall m \geq 2$ . Vi får alltså att

$\frac{\partial g}{\partial x} = a_1$ ,  $\frac{\partial g}{\partial y} = b_1$  och enligt CR måste  $a_1 = -ib_1$ , el.  
ekvivalent  $b_1 = ia_1$ . Vi får då att  $g = a_1 x + ia_1 y = a_1 z$ .

Svar: Om  $g$  är holo så måste  $a_n = 0 \forall n \geq 2$ ,  $b_m = 0 \forall m \geq 2$   
och  $a_1 = -ib_1$ .

7.

Lösning:  $Z(\alpha)(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$ ,  $|a_k| \leq 1 \Rightarrow Z(\alpha)$  holm i  $\{z: |z| > 1\}$ .

Låt  $f(z) := Z(\alpha)(\frac{1}{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ,  $|a_k| \leq 1 \Rightarrow f(z)$  holm i  $D(0,1)$ .

Enl. antagande är  $f(\frac{1}{k}) = Z(\alpha)(k) = 0 \quad \forall k \geq 2$ .

$\frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \in D(0,1)$  så identitetsprincipen siger att  $f \equiv 0$  i  $D(0,1)$ .

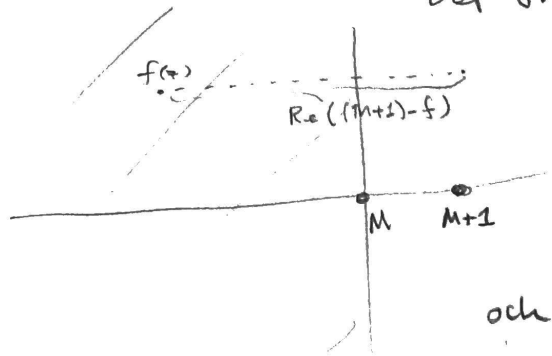
Men enligt satz är  $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = 0$  (ty  $f \equiv 0$ ), så  
vi får att  $a_k = 0 \quad \forall k$ .



8.

Lösning: Vi antar alltså att  $\operatorname{Re} f \leq M$ .

$$\text{Det följer att } |f - (m+1)| \geq \operatorname{Re}((m+1) - f) \geq M+1 - \operatorname{Re} f \geq M+1 - M = 1.$$



Funktionen  $\frac{1}{f - (m+1)}$  är då holm i  $D(0,1)^*$

$$\text{och } \left| \frac{1}{f - (m+1)} \right| \leq 1. \text{ Vi får att.}$$

$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{f - (m+1)} = 0$  och enligt Satz har då  $\frac{1}{f - (m+1)}$  en

härbar sing. i 0. Vi kan alltså skriva  $\frac{1}{f - (m+1)} = g$  där

$g$  holm i  $D(0,1)$ . Enl. Klass. av nollställen kan vi vidare

skriva  $g(z) = z^m h(z)$  där  $h$  är holm i  $D(0,1)$  och  $h \neq 0$  i omgivning till 0, så  $1/h$  holm i omg. till 0.

Vi får:  $f(z) = \frac{1}{z^m} h(z) + m+1$ . Om  $m=0$  så har alltså  $f$  en härbar sing. i 0, medan om  $m > 0$  så har  $f$  en pol i 0.

Vi behöver alltså visa att  $m=0$ .

Vi antar att  $m \geq 1$  och försöker härleda en motsägelse!

Skriv  $h(0) = r e^{i\theta}$ , låt  $t \in (0,1)$  vara litet positivt tal.

$$\text{Vi får att } f(t e^{-i\frac{\theta}{m}}) = \frac{1}{t^m e^{-i\theta}} h(t e^{-i\frac{\theta}{m}}) + m+1 \approx \frac{1}{t^m e^{-i\theta}} h(0) + m+1 =$$

$$= \frac{1}{t^m} + m+1 \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty \text{ vilket visar att } \operatorname{Re}(f(t e^{-i\frac{\theta}{m}})) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \infty$$

vilket är en motsägelse då  $\operatorname{Re} f \leq M$ !

Vi får att  $m=0$  och ser då att  $f$ 's sing. i 0 är härbar.