Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2020 01 09, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Carl-Joar Karlsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av
$$f(x) := \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$
(7p)

   (b) Använd resultatet i a) för att bestämma
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx.$$
(2p)

2. Hitta antalet nollställen till funktionen $z^3 - 11z + 10$ i området $\{z : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > 1\}$. (7p)

3. Bestäm bilden av området $\{z : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) > -1, \text{Re}(z) + \text{Im}(z) < 0\}$ under avbildningen
$$f(z) := \frac{1}{z+i}.$$
(6p)

4. Bestäm antalet nollställen (räknat med multiplicitet) till funktionen
$$g(z) := \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}$$
i $D(0, 1/2)$. (6p)

5. Låt
$$f(z) := \frac{1}{z^2 - z\text{Log}(1+z)}.$$
   (a) Vilken ordning har f:s pol i origo? (2p)

   (b) Beräkna
$$\int_{|z|=1/2} f(z) dz.$$
(5p)

6. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

7. Formulera och bevisa Identitetsprincipen för holomorfa funktioner. (5p)

8. Låt u och v vara två harmoniska funktioner på hela $\mathbb{C}$ sådana att
$$\lim_{|z|\to\infty} (u(z) - v(z)) = 0.$$
Visa att $u = v$. (5p)

Lycka till!
David

Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2020 01 09, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Carl-Joar Karlsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{x^4 + 4x^2 + 4}.$$

(7p)

Lösning:
Enligt definition har vi att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^4 + 4x^2 + 4} dt.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{z^4 + 4z^2 + 4}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}, s \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} gdz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{z^4 + 4z^2 + 4} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 4R^2 - 4} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|z^4+4z^2+4| \geq (|z|^4-|4z^2|-|4| = R^4 - 4R^2 - 4$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} gdz.$$

Vi noterar nu att $z^4 + 4z^2 + 4 = (z^2 + 2)^2 = (z + i\sqrt{2})^2(z - i\sqrt{2})^2$, så $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $\pm i\sqrt{2}$, varav

$i\sqrt{2}$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_{i\sqrt{2}} g = \left(\frac{e^{-itz}}{(z + i\sqrt{2})^2} \right)'_{|z=i} = \frac{ie^{\sqrt{2}t}}{16}(2t - \sqrt{2}).$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i Res_{i\sqrt{2}} g = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{8}(\sqrt{2} - 2t),$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{8}(\sqrt{2} - 2t).$$

Eftersom g är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{8}(\sqrt{2} + 2t).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{2}t}}{8}(\sqrt{2} + 2|t|).$$

(b) Använd resultatet i a) för att bestämma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx.$$

(2p)

Lösning: Vi har att

$$\frac{\cos 3x}{x^4 + 4x^2 + 4} = \text{Re} \left(\frac{e^{3ix}}{x^4 + 4x^2 + 4} \right)$$

och får att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^4 + 4x^2 + 4} dx = \text{Re} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{3ix}}{x^4 + 4x^2 + 4} dx \right) =$$

$$= \text{Re}(\hat{f}(-3)) = \frac{\pi e^{-3\sqrt{2}}}{8}(\sqrt{2} + 6).$$

2. Hitta antalet nollställen till funktionen $z^3 - 11z + 10$ i området $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 1\}$. (7p)

Lösning:

Vi använder Argumentprincipen. Låt $p(z) := z^3 - 11z + 10$, $\gamma_R(t) := Re^{it} + i, t \in [0, \pi/2]$ samt $\sigma_R := [(R+1)i, i] \cup [i, R+i] \cup \gamma_R$. Notera att $p(z+i) = z^3 + 3iz^2 - 14z + 10 - 12i$.

Vi beräknar först $argvar(p \circ \gamma_R)$: Notera att

$$p(\gamma_R(t)) = R^3 e^{3it}\left(1 + \frac{3ie^{-it}}{R} - \frac{14e^{-2it}}{R^2} + \frac{(10-12i)e^{-3it}}{R^3}\right),$$

så för R stort har vi att $arg(p(\gamma_R(t))) \cong 3t + 2\pi k$. Detta leder till att $argvar(p \circ \gamma_R) \cong 3\pi/2$ för stora R.

Vi beräknar sedan $argvar(p \circ [(R+1)i, i])$: Notera att $p(it) = 10 + i(-t^3 - 11t)$. Vi ser att $Arg(p((R+1)i)) \cong -\pi/2$. Vi ser också att $p(i) = 10 - 12i$. Låt $\theta := Arg(10 - 12i)$. Eftersom $p(it)$ har konstant realdel kommer inte kurvan snurra runt noll, så vi får att $argvar(p \circ [(R+1)i, i]) \cong \theta + \pi/2$ (rita figur!).

Vi beräknar nu $argvar(p \circ [i, R+i])$: Notera att $p(t+i) = t^3 - 14t + 10 + i(3t^2 - 12)$. Vi ser att för stora R gäller att $Arg(p(R+i)) \cong 0$, och att $p(R+i)$ befinner sig i övre halvplanet. Vi får att $argvar(p \circ [i, R+i]) \cong -\theta + 2\pi k$, där k beror på hur kurvan går runt noll. För att avgöra detta ser vi var kurvan skär y-axeln. Vi ser att detta sker endast då $t = 2$, dvs i punkten -10. Detta betyder att kurvan går runt noll i negativ riktning, så$argvar(p \circ [i, R+i]) \cong -\theta - 2\pi$ (rita figur!).

Sammantaget får vi att $W(p \circ \sigma_R) = (1/2\pi) argvar(p \circ \sigma_R) = (1/2\pi)(argvar(p \circ \gamma_R) + argvar(p \circ [(R+1)i, i]) + argvar(p \circ [i, R+i])) \cong (1/2\pi)(3\pi/2 + \theta + \pi/2 - \theta - 2\pi) = 0$ för stora R. Argumentprincipen ger oss då att $p(z)$ har inga nollställen i $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > 1\}$.

3. Bestäm bilden av området $\{z : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > -1, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) < 0\}$ under avbildningen

$$f(z) := \frac{1}{z+i}.$$

(6p)

Lösning: Låt $A := \{z : \mathrm{Re}(z) > 0, \mathrm{Im}(z) > -1, \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Im}(z) < 0\}$. Vi noterar att A är det inre av en triangel med hörn i punkterna $0, -i, 1-i$, och begränsas av imaginära axeln, linjen genom 0 och $1-i$ som vi betecknar L_1, samt linjen genom $-i$ och $1-i$ som vi betecknar L_2. Vi har också att $f(z)$ är en Möbiusavbildning, och avbildar därför enligt sats linjer och cirklar på linjer eller cirklar. Vi ser att $f(0) = -i, f(-i) = \infty, f(1-i) = 1, f(\infty) = 0$. Vi får därför att $f(i\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ är en linje genom 0 och

$-i$, dvs $f(i\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vi får också att $f(L_1)$ är en cirkel genom punkterna $0, 1, -i$, dvs $f(L_1) = C(1/2 - i/2, \sqrt{2}/2)$. Dessutom blir $f(L_3)$ en linje genom punkterna 0 och 1, dvs $f(L_3) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Vi får därför att $f(A)$ begränsas av den imaginära aeln, den reella axeln samt $C(1/2-i/2, \sqrt{2}/2)$. Vi tar nu en punkt i A, t ex $1/4-i/2$. Vi ser att $f(1/4-i/2) = 4/5 - 8i/5$. Denna punkt ligger i fjärde kvadranten. Dessutom ser man enkelt att den ligger utanför cirkeln $C(1/2 - i/2, \sqrt{2}/2)$. Det följer att $f(A) = \{z : \text{Re}(z) > 0, \text{Im}(z) < 0, |z - 1/2 + i/2| > \sqrt{2}/2\}$.

4. Bestäm antalet nollställen (räknat med multiplicitet) till funktionen

$$g(z) := \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}$$

i $D(0, 1/2)$. (6p)

Lösning: Vi noterar först att potensserien har konvergensradie 1, såenligt sats är $g(z)$ holomorf i $D(0, 1)$. Vi kommer använda Rouchés sats. Notera att vi kan skriva $g(z) = f(z) + h(z)$ där $f(z) := z^2/2$ samt

$$h(z) := \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}.$$

Funktionen f har två nollställen i $D(0, 1/2)$ räknat med multiplicitet. Vi har ocksåatt $|f(z)| = 1/8$ på $C(0, 1/2)$. Med hjälp av triangelolikheten fåt vi att

$$|h(z)| = \left| \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} \right| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{|z|^k}{k} =$$

$$= \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{(1/2)^k}{3} = (1/12) \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k = 1/12 < 1/8$$

på $C(0, 1/2)$. Vi har alltså att $|f(z)| > |h(z)|$ på $C(0, 1/2)$, så enligt Rouchés sats har g lika många nollställen som f i $D(0, 1/2)$, dvs två stycken.

5. Låt

$$f(z) := \frac{1}{z^2 - z\text{Log}(1 + z)}.$$

(a) Vilken ordning har f:s pol i origo? (2p)

Lösning: Vi börjar med att notera att $\text{Log}(1 + z)$ är holomorf i $D(0, 1)$ och har där en Taylorutveckling med samma koefficienter som den av $ln(1 + x)$ runt $x = 0$, dvs

$$\text{Log}(1 + z) = z - z^2/2 + z^3/3 - ... = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{z^k}{k}.$$

Det följer att

$$z^2 - z\mathrm{Log}(1+z) = z^3/2 - z^4/3 + z^5/4 - ... = z^3 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k+2} \right).$$

Vi noterar att

$$h(z) := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k+2}$$

är konvergent i $D(0,1)$, så h är en holomorf funktion i $D(0,1)$. Vi har också att $h(0) = 1/2$, så $1/h(z)$ är holomorf i en omgivning till 0, och $(1/h)(0) = 2 \neq 0$. Vi ser nu att

$$f(z) = \frac{1/h(z)}{z^3},$$

vilket ger oss att f:s pol i 0 har ordning 3.

(b) Beräkna

$$\int_{|z|=1/2} f(z) dz.$$

(5p)

Lösning: Först noterar vi att

$$z^2 - z\mathrm{Log}(1+z) = z^3/2 - z^4/3 + z^5/4 - ... = z \left(\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} \right).$$

I uppgift 4 såg vi att

$$g(z) := \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k}$$

endast är noll i punkten noll, så$f(z)$ är holomorf i $D(0,1)$ förutom en isolerad singularitet i 0, som ligger i det inre av kurvan $C(0,1/2)$ vi integrerar längs. Vi behöver räkna ut residyn i denna punkt.
Vi hittar början på f:s Laurentserieutveckling i $A(0,0,1)$:

$$f(z) = \frac{1}{z^3(1/2 - z/3 + z^2/4 + O(z^3))} =$$

$$= \frac{2}{z^3(1 - (2z/3 - z^2/2 + O(z^3)))} = \frac{2}{z^3} \sum_{k=0} (2z/3 - z^2/2 + O(z^3))^k =$$

$$= \frac{2}{z^3}(1 + 2z/3 - z^2/2 + 4z^2/9 + O(z^3)) =$$

$$2z^{-3} + (4/3)z^{-2} - (1/18)z^{-1} + O(1).$$

Vi får alltså enligt definition att $\mathrm{Res}_0 f = -1/18$. Enligt Residysatsen har vi då:

$$\int_{|z|=1/2} f(z) dz = 2\pi i \mathrm{Res}_0 f = -\frac{\pi i}{9}.$$

6. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

7. Formulera och bevisa Identitetsprincipen för holomorfa funktioner. (5p)

   Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

8. Låt u och v vara två harmoniska funktioner på hela $\mathbb{C}$ sådana att

$$\lim_{|z|\to\infty}(u(z)-v(z))=0.$$

   Visa att $u=v$. (5p)

   Lösning: Vi noterar att dåu och v är harmoniska är också $u-v$ en harmonisk funktion. Låt $\epsilon>0$ vara ett litet tal. Eftersom $\lim_{|z|\to\infty}(u(z)-v(z))=0$ finns det ett $R>>0$ sådant att $\max_{|z|\geq R}(u(z)-v(z))\leq\epsilon$. Men den svaga maximumprincipen säger också att om $\max_{|z|=R}(u(z)-v(z))\leq\epsilon$ så följer det att $\max_{|z|\leq R}(u(z)-v(z))\leq\epsilon$. Sammantaget får vi alltså att $u-v\leq\epsilon$ på hela $\mathbb{C}$. Men $\epsilon>0$ var ett godtyckligt positivt tal, så vi får att $u-v\leq 0$. Eftersom också$\lim_{|z|\to\infty}(v(z)-u(z))=0$ och $v-u$ är harmonisk får vi på samma sätt att $v-u\leq 0$, vilket betyder att $u=v$, vilket skulle bevisas.

Lycka till!
David