Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 10 31, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Malin Nilsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sådan att
$$u''(t) + 3u'(t) = \cos t$$
med begynnelsevärden $u(0) = 0$ och $u'(0) = 1$. (5p)

2. Finns det en holomorf funktion $f : D(0, 1) \to \mathbb{C}$ sådan att
$$\text{Re}(f(z)) = e^{-\text{Re}(z)\text{Im}(z)}?$$
Motivera ditt svar. (3p)

3. Låt M vara en Möbiusavbildning sådan att $M(-1) = 2, M(e^{\pi i/3}) = e^{\pi i/3}$ och $M(e^{-\pi i/3}) = e^{-\pi i/3}$. Bestäm $M(D(0, 1))$. (5p)

4. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av
$$f(x) := \frac{1}{(x^2 + 4x + 5)^2}.$$
(7p)

   (b) Använd resultatet i a) för att bestämma
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx.$$
(1p)

5. Hitta antalet nollställen till funktionen $z^3 - 2z + 3$ i området $\{z : |z - 4i| > 1, \text{Im}(z) > -1\}$. (7p)

6. Låt
$$f(z) := \frac{z}{(z + 3)(z^2 + 1)}.$$
   (a) Bestäm Laurentserieutvecklingen av $f(z)$ som är centrerad i 0 och konvergent i $\{z : |z| > 3\}$. (5p)

   (b) Bestäm $\text{Res}_0(g(z))$ där
$$g(z) := \frac{f(1/z)}{z^5}.$$
(2p)

7. Formulera och bevisa Residysatsen. (5p)

8. Formulera och bevisa Argumentprincipen. (5p)

9. Låt f vara en hel funktion sådan att $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$. Visa att f är ett polynom i z. (5p)

Lycka till!
David

Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2019 10 31, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Malin Nilsson, 031-7725325
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

---

1. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ sådan att

$$u''(t) + 3u'(t) = \cos t$$

med begynnelsevärden $u(0) = 0$ och $u'(0) = 1$. (5p)

Lösning: Vi tar Laplacetransformen av ekvationen vilket ger oss:

$$s^2\tilde{u} - su(0) - u'(0) + 3(s\tilde{u} - u(0)) = \frac{s}{s^2+1}.$$

Vi får då att

$$\tilde{u} = \frac{1}{(s+3)(s^2+1)} + \frac{1}{s(s+3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger att

$$\frac{1}{(s+3)(s^2+1)} = (1/10)\frac{1}{s+3} + (3/10)\frac{1}{s^2+1} - (1/10)\frac{s}{s^2+1},$$

samt

$$\frac{1}{s(s+3)} = (1/3)\frac{1}{s} - (1/3)\frac{1}{s+3}.$$

Vi får därför att

$$\tilde{u} = (1/3)\frac{1}{s} - (7/30)\frac{1}{s+3} + (3/10)\frac{1}{s^2+1} - (1/10)\frac{s}{s^2+1}.$$

Med hjälp av räkneregler/tabell ser vi att högerledet är transformen av

$$(1/3) - (7/30)e^{-3t} + (3/10)\sin t - (1/10)\cos t,$$

och Inversionsformeln ger oss då att

$$u(t) = (1/3) - (7/30)e^{-3t} + (3/10)\sin t - (1/10)\cos t.$$

Slutligen testar vi att begynnelsevärdena stämmer!

2. Finns det en holomorf funktion $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ sådan att

$$\mathrm{Re}(f(z)) = e^{-\mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z)}?$$

Motivera ditt svar. (3p)

Lösning: Enligt Sats är realdelen till en holomorf funktion harmonisk, dvs speciellt måste Laplacen vara noll. Men enkel räkning ger att

$$\frac{\partial^2 e^{-xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^{-xy}}{\partial y^2} = (x^2+y^2)e^{-xy} \neq 0,$$

vilket visar att e^{-xy} inte är harmonisk i $D(0,1)$, och därför ej kan vara realdelen till en holomorf funktion där.

3. Låt M vara en Möbiusavbildning sådan att $M(-1) = 2, M(e^{\pi i/3}) = e^{\pi i/3}$ och $M(e^{-\pi i/3}) = e^{-\pi i/3}$. Bestäm $M(D(0,1))$. (5p)

Lösning: Enligt Sats avbildar Möbiusavbildningar cirklar och linjer på cirklar eller linjer. $C(0,1)$ innehåller punkterna $-1, e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}$, så $M(C(0,1))$ måste vara en cirkel eller linje som innehåller genom punkterna $2, e^{\pi i/3}, e^{-\pi i/3}$. Man ser då från bild eller räkning att $M(C(0,1)) = C(1,1)$. Eftersom $D(0,1)$ begränsas av $C(0,1)$ följer det att $M(D(0,1))$ begränsas av $C(1,1)$, dvs vi får antingen $D(1,1)$ eller $\{z : |z-1| > 1\} \cup \{\infty\}$. I termer av enhetscirkelns positiva orientation kommer punkterna i ordning $e^{\pi i/3}, -1, e^{-\pi i/3}$, medan bilderna av dessa, $e^{\pi i/3}, 2, e^{-\pi i/3}$ endast kan komma i denna ordning från en negativ orientering av $C(1,1)$. Möbiusavbildningar är konforma, så$D(0,1)$ vilket ligger till vänster om den positivt orienterade $C(0,1)$ måste avbildas pådet som ligger till vänster om den negativt orienterade $C(1,1)$, dvs på $\{z : |z-1| > 1\} \cup \{\infty\}$. Vi får alltså att $M(D(0,1)) = \{z : |z-1| > 1\} \cup \{\infty\}$.

4. (a) Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}.$$

(7p)

Lösning:

Enligt definition har vi att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(x^2+4x+5)^2} dx.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{(z^2+4z+5)^2}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} g(z)dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}, s \in [0,\pi]$ samt $\sigma_R := [-R,R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} gdz \right| \leq \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{(z^2+4z+5)^2} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{(R^2-4R-5)^2} \longrightarrow 0$$

då $R \to \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|(z^2+4z+5)| \geq (|z|^2-4|z|-5)^2 = (R^2-4R-5)^2$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} gdz.$$

Kvadratkomplettering ger att $(z^2+4z+5)^2 = (z+2-i)^2(z+2+i)^2$ så $g(z)$ är holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter i $-2 \pm i$ där bara $-2+i$ ligger i det inre av σ_R för stora R. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_{-2+i}(g) = \left(\frac{e^{-itz}}{(z+2+i)^2} \right)'_{|z=-2+i} = ... = \frac{ie^t e^{2it}}{4}(-1+t).$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} gdz = 2\pi i Res_{-2+i}(g) = \frac{\pi e^t e^{2it}}{2}(1-t),$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^t e^{2it}}{2}(1-t).$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-t} e^{2it}}{2}(1+t).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-|t|} e^{2it}}{2}(1+|t|).$$

(b) Använd resultatet i a) för att bestämma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{(x^2+4x+5)^2} dx.$$

(1p)

Lösning: Eftersom f är reell får vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 4x}{(x^2+4x+5)^2} dx = \text{Im}(\hat{f}(-4)) = -\frac{5\pi e^{-4} \sin 8}{2}.$$

5. Hitta antalet nollställen till funktionen $z^3 - 2z + 3$ i området $\{z : |z - 4i| > 1, \text{Im}(z) > -1\}$. (7p)

Lösning:

Vi använder först Argumentprincipen för att hitta antalet nollställen till $p(z) := z^3 - 2z + 3$ i $A := \{z : \text{Im}(z) > -1\}$. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it} - i, t \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R - i, R - i] \cup \gamma_R$.

Vi beräknar först $argvar(p \circ \gamma_R)$: Notera att

$$p(\gamma_R(t)) = R^3 e^{3it} \left(1 - \frac{3ie^{-it}}{R} - \frac{5e^{-2it}}{R^2} + \frac{(3+3i)e^{-3it}}{R^3}\right),$$

så för R stort har vi att $arg(p(\gamma_R(t))) \approx 3t + 2\pi k$. Detta leder till att $argvar(p \circ \gamma_R) \cong 3\pi$ för stora R.

Vi beräknar sedan $argvar(p \circ [-R - i, R - i])$: Notera att $p(t - i) = t^3 - 5t + 3 + i(-3t^2 + 3)$. Vi ser att $arg(p(-R-i)) \cong \pi + 2\pi k_1$ samt att denna punkt ligger i det nedre halvplanet. Vi ser också att $arg(p(R-i)) \cong 0 + 2\pi k_1$ samt att denna punkt ligger i det nedre halvplanet. Rita bild! Vi ser om och i så fall var kurvan $p \circ [-R - i, R - i]$ korsar x-axeln. Detta sker när $\text{Im}(p(t - i)) = -3t^2 + 3 = 0$, vilket vi ser sker då $t = \pm 1$. När $t = -1$ korsar kurvan x-axeln i punkten 7 medan då $t = 1$ korsar kurvan x-axeln i punkten -1. Kurvan gör alltså en loop kring nollan i positiv riktning (se bild), och vi får att $argvar(p \circ [-R - i, R - i]) \approx 3\pi$ för stora R.

Sammantaget får vi att

$$\begin{aligned} W(p \circ \sigma_R) = (1/2\pi) argvar(p \circ \sigma_R) = \\ = (1/2\pi)(argvar(p \circ \gamma_R) + argvar(p \circ [-R - i, R - i]) \approx \\ \approx (1/2\pi)(3\pi + 3\pi) = 3 \end{aligned}$$

för stora R, och då $W(p \circ \sigma_R)$ är ett heltal får vi att $W(p \circ \sigma_R) = 3$ för stora R. Argumentprincipen ger oss då att $p(z)$ har 3 nollställen i A.

Nu använder vi Rouchés sats för att bestämma antalet nollställen i $D(4i, 1)$. Vi skriver $p = f + g$ där $f(z) := z^3$ och $g(z) := -2z + 3$. På $C(4i, 1)$ har vi att $3 \leq |z| \leq 5$ och vi får att $|f(z)| \geq 27$ på $C(4i, 1)$ medan $|g(z)| = |-2z+3| \leq 2|z| + 3 \leq 13$ på $C(4i, 1)$, där vi använde triangelolikheten. Detta betyder att $|f(z)| > |g(z)|$ på $C(4i, 1)$ och enligt Rouchés sats har då $p = f + g$ lika många nollställen i $D(4i, 1)$ som f, dvs inga. Vi noterar ocksåatt $|p| \geq |f| - |g| > 0$ på $C(4i, i)$ så p har inga nollställen på $C(4i, 1)$ heller.

Slutligen får vi att p har $3 - 0$ dvs 3 nollställen i

$$\{z : |z - 4i| > 1, \text{Im}(z) > -1\} = A \setminus (D(4i, 1) \cup C(4i, 1)).$$

6. Låt

$$f(z) := \frac{z}{(z+3)(z^2+1)}.$$

(a) Bestäm Laurentserieutvecklingen av $f(z)$ som är centrerad i 0 och konvergent i $\{z : |z| > 3\}$. (5p)

Lösning: Samma partialbråksuppdelning som i uppgift 1 ger:

$$\frac{1}{(z+3)(z^2+1)} = (1/10)\frac{1}{z+3} + (3/10)\frac{1}{z^2+1} - (1/10)\frac{z}{z^2+1}.$$

Vi har att för $|z| > 3$:

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(3/z)} = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(-3/z)^k = ... = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}z^k$$

samt

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-(1/z^2)} = \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{-2k} = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}z^{2k}.$$

Det får också att

$$\frac{z}{z^2+1} = \sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}z^{2k+1}.$$

Sätter vi ihop detta får vi att

$$\frac{1}{(z+3)(z^2+1)} = (1/10)\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^{k+1}}{3^{k+1}}z^k +$$

$$+(3/10)\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}z^{2k} - (1/10)\sum_{k=-\infty}^{-1}(-1)^{k+1}z^{2k+1}$$

och så

$$\frac{z}{(z+3)(z^2+1)} = (1/10)\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{3^k} z^k +$$

$$+(3/10)\sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k z^{2k-1} - (1/10)\sum_{k=-\infty}^{0} (-1)^k z^{2k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

där $c_k = 0$ för $k > 0$ medan för $k \leq 0$ är $c_{2k} = (1/10)(1/3^{2k} - (-1)^k)$ och $c_{2k-1} = (1/10)(-1/3^{2k-1} + 3(-1)^k)$.

(b) Bestäm $\mathrm{Res}_0(g(z))$ där

$$g(z) := \frac{f(1/z)}{z^5}.$$

(2p)

Lösning: Från a) ser vi att

$$g(z) = \frac{f(1/z)}{z^5} = \frac{1}{z^5}(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{-k}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k-5} z^k$$

är en Laurentserieutveckling av g som konvergerar i $D(0,1/3)^x$. Per definition är då residyn i noll koefficienten framför z^{-1}, så

$$\mathrm{Res}_0(g(z)) = c_{-4} = (1/10)(1/3^{-4} - 1) = 8.$$

7. Formulera och bevisa Residysatsen. (5p)

Lösning: Se bok eller föreläsningsanteckningar.

8. Formulera och bevisa Argumentprincipen. (5p)

Lösning: Se föreläsningsanteckningar.

9. Låt f vara en hel funktion sådan att $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$. Visa att f är ett polynom i z. (5p)

Lösning: Det finns antagligen många olika lösningar av denna uppgift, men här är mitt förslag. Enligt satsen om Taylorutveckling kan $f(z)$ skrivas som en konvergent potensserie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ i $\mathbb{C}$. Vi tittar på funktionen $g(z) := f(1/z)$, som ju är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dess LSU i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ blir då

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{0} c_{-k} z^k.$$

Att $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)| = \infty$ betyder att $\lim_{z\to 0}|g(z)| = \infty$, dvs att g har en pol i 0. Men enligt sats är detta ekvivalent med att $d_k = 0$ för alla $k < -m$ där m är polens ordning. Vi får alltså att $c_k = 0$ för $k > m$, och därför att

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m} c_k z^k,$$

dvs f är ett polynom i z.

Lycka till!
David