

# Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 11 01, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Jimmy Johansson, 031-7725325

Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

**Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)**

---

1. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)}.$$

(7p)

2. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sådan att

$$u'''(t) + 4u'(t) = 1$$

med begynnelsevärden  $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = 0$  och  $u''(0) = 0$ .

(7p)

3. Bestäm bilden av området  $A := \{z : |z - 3/2| > 1/2, |z - 2| < 1\}$  under avbildningen

$$f(z) := e^{\frac{1}{z-1}}.$$

(Tips: använd att  $f(z) = e^z \circ M(z)$  där  $M(z) = \frac{1}{z-1}$ .)

(7p)

4. Bestäm antalet nollställen till funktionen  $z^5 - 5z + \sin z$  i annulusen  $\{z : 1 < |z| < 2\}$ .

(7p)

5. Beräkna

$$\int_{|z|=5} \frac{z}{(z + \pi) \sin z} dz.$$

(7p)

6. Visa att om  $f(z)$  har kontinuerliga partiella derivator som uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i ett område  $G$ , då är  $f$  holomorf i  $G$ .

(5p)

7. Formulera och bevisa Cauchys sats.

(5p)

8. Antag att  $f$  är holomorf i  $\{z : 0 < |z| < 1\}$  samt att  $|f(z) - 1| \geq 1$ . Visa att singulariteten i 0 inte kan vara väsentlig.

(5p)

Lycka till!

David

# Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 11 01, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna  
Telefonvakt: Jimmy Johansson, 031-7725325  
Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

**Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)**

---

1. Beräkna med hjälp av residykalkyl Fouriertransformen av

$$f(x) := \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)}. \quad (7p)$$

Lösning: a) Enligt definition har vi att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(x^2 + 1)(x^2 + 25)} dx.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 25)}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} g(z) dz.$$

Vi antar först att  $t \leq 0$ . Låt  $\gamma_R(s) := Re^{is}$ ,  $s \in [0, \pi]$  samt  $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$  som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} g dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 25)} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{(R^2 - 1)(R^2 - 25)} \rightarrow 0$$

då  $R \rightarrow \infty$ . Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att  $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$  på  $\gamma_R$  samt att  $|(z^2 + 1)(z^2 + 25)| \geq (|z|^2 - 1)(|z|^2 - 25) = (R^2 - 1)(R^2 - 25)$  på  $\gamma_R$  tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} g dz.$$

Vi noterar nu att  $g(z)$  är holomorf i  $\mathbb{C}$  förutom isolerade singulariteter i  $\pm i$  och  $\pm 5i$ , varav  $i$  och  $5i$  ligger i det inre av  $\sigma_R$  för stora  $R$ . Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$Res_i g = \left( \frac{e^{-itz}}{(z + i)(z^2 + 25)} \right)_{|z=i} = \frac{e^t}{48i},$$

samt

$$Res_{5i} g = \left( \frac{e^{-itz}}{(z^2 + 1)(z + 5i)} \right)_{|z=5i} = -\frac{e^{5t}}{240i}.$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma_R} g dz = 2\pi i (\operatorname{Res}_i g + \operatorname{Res}_{5i} g) = \frac{\pi}{24} (e^t - \frac{1}{5} e^{5t}),$$

så sammantaget får vi att för  $t \leq 0$  är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24} (e^t - \frac{1}{5} e^{5t}).$$

Eftersom  $f$  är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för  $t \geq 0$  är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24} (e^{-t} - \frac{1}{5} e^{-5t}).$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi}{24} (e^{-|t|} - \frac{1}{5} e^{-5|t|}).$$

2. Hitta med hjälp av Laplacetransformen en funktion  $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sådan att

$$u'''(t) + 4u'(t) = 1$$

med begynnelsevärden  $u(0) = 1$ ,  $u'(0) = 0$  och  $u''(0) = 0$ .

(7p)

Lösning:

Vi tar Laplacetransformen av ekvationen och får

$$s^3 \tilde{u} - s^2 + 4(s\tilde{u} - 1) = \frac{1}{s}$$

vilket ger oss att

$$\tilde{u} = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)} + \frac{1}{s}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 4)} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 4} \right).$$

Vi får alltså att

$$\tilde{u} = \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2 + 4} + \frac{1}{s}.$$

Från tabell har vi

$$\frac{1}{s} = \tilde{1},$$
$$\frac{1}{s^2} = \tilde{t}$$

och

$$\frac{2}{s^2 + 4} = \widetilde{\sin 2t}$$

så vi får att

$$\tilde{u} = \mathcal{L}\left(1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t\right).$$

Enligt inversionsformlen får vi därför att

$$u = 1 + \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t.$$

3. Bestäm bilden av området  $A := \{z : |z - 3/2| > 1/2, |z - 2| < 1\}$  under avbildningen

$$f(z) := e^{\frac{1}{z-1}}.$$

(Tips: använd att  $f(z) = e^z \circ M(z)$  där  $M(z) = \frac{1}{z-1}$ .) (7p)

Lösning: Vi hittar först  $M(A)$ . Vi noterar att  $M(z)$  är en Möbiusavbildning, och att  $M(1) = \infty$ ,  $M(2) = 1$ ,  $M(3) = 1/2$ . Eftersom Mavb avbildar cirklar och linjer på cirklar eller linjer får vi att  $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Och eftersom Mavb är konforma får vi att  $M(C(3/2, 1/2))$  är en linje som skär den reella axeln i punkten 1 i rät vinkel, dvs  $M(C(3/2, 1/2)) = \{z : \operatorname{Re}(z) = 1\} \cup \{\infty\}$ . På samma sätt får vi att  $M(C(2, 1)) = \{z : \operatorname{Re}(z) = 1/2\} \cup \{\infty\}$ . Det följer att  $M(A)$  är begränsat av dessa två linjer. Då  $M(5/2) = 2/3$  får vi att  $B := M(A) = \{z : 1/2 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$ . Det återstår att bestämma bilden  $B$  under exponentialavbildningen. Men vi vet att  $|e^z| = e^x$  och  $\operatorname{arg}(e^z) = y + 2\pi k$  så bilden av  $B$  blir precis  $\{z : e^{1/2} < |z| < e\}$ . Vi får tillslut att  $f(A) = \exp(M(A)) = \{z : e^{1/2} < |z| < e\}$ .

4. Bestäm antalet nollställen till funktionen  $z^5 - 5z + \sin z$  i annulusen  $\{z : 1 < |z| < 2\}$ . (7p)

Lösning: Vi använder Rouchés sats, först på  $D(0, 2)$  och sen på  $D(0, 1)$ .

Låt  $f(z) := z^5$  och  $g(z) := -5z + \sin z$ . Vi har att

$$|f(z)| = |z|^5 = 32$$

på  $C(0, 2)$ . Notera att

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \leq e^{|y|} \leq e^2$$

på  $C(0, 2)$ . Vi har därför att

$$|g(z)| = |-5z + \sin z| \leq 5|z| + |\sin z| \leq 10 + e^2 < 19$$

på  $C(0, 2)$ . Vi har alltså att  $|f| > |g|$  på  $C(0, 2)$ . Det följer nu från Rouchés sats att  $f + g$  har lika många nollställen som  $f$  i  $D(0, 2)$ , dvs 5 st.

Låt nu istället  $f(z) := -5z$  och  $g(z) := z^5 + \sin z$ . Vi har att

$$|f(z)| = |-5z| = 5|z| = 5$$

på  $C(0, 1)$ . Notera att

$$|\sin z| = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right| \leq \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) \leq e^{|y|} \leq e$$

på  $C(0, 1)$ . Vi har därför att

$$|g(z)| = |z^5 + \sin z| \leq |z|^5 + |\sin z| \leq 1 + e < 4$$

på  $C(0, 1)$ . Vi har alltså att  $|f| > |g|$  på  $C(0, 1)$ . Det följer nu från Rouchés sats att  $f + g$  har lika många nollställen som  $f$  i  $D(0, 2)$ , dvs 1 st.

Det följer att  $z^5 - 5z + \sin z$  har  $5 - 1 = 4$  nollställen i  $D(0, 2) \setminus D(0, 1)$ . Och eftersom enligt omvända triangelolikheten  $|f + g| \geq |f| - |g| > 0$  på  $C(0, 1)$  har  $z^5 - 5z + \sin z$  inga nollställen på  $C(0, 1)$ , så  $z^5 - 5z + \sin z$  måste ha 4 nollställen i  $\{z : 1 < |z| < 2\}$ .

5. Beräkna

$$\int_{|z|=5} \frac{z}{(z + \pi) \sin z} dz. \tag{7p}$$

Lösning: Låt  $f(z) := \frac{z}{(z + \pi) \sin z}$ . Vi noterar att  $f$  är holomorf i  $\mathbb{C}$  förutom i punkterna  $k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Av dessa ligger 0 och  $\pm\pi$  i det inre av  $C(0, 5)$ .  $\sin z$  har enkla nollställen i  $k\pi$ , och eftersom  $z$  har ett nollställe i 0 följer det från Klassifikation av isolerade sing. att 0 är en hävbar singularitet. Enligt sats är därför  $Res_0 f = 0$ . Vi har också enligt räkneregeln för residyer att

$$Res_{\pi} f = \left( \frac{z}{(z + \pi) \cos z} \right)_{|z=\pi} = -1/2.$$

$-\pi$  har  $f$  en pol av ordning 2, så för att hitta residyn tittar vi på början av  $f$ 's Laurentserieutveckling centrerad i  $-\pi$ , giltig i  $A(-\pi, \pi)$ . Vi noterar att  $\sin z = -\sin(z + \pi)$ , så

$$\sin z = -(z + \pi) + \frac{(z + \pi)^3}{6} + O((z + \pi)^5) = -(z + \pi) \left( 1 - \frac{(z + \pi)^2}{6} + O((z + \pi)^4) \right).$$

Det följer att början på LSU av  $1/\sin z$  blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} &= -\frac{1}{(z + \pi) \left( 1 - \frac{(z + \pi)^2}{6} + O((z + \pi)^4) \right)} = -\frac{1}{(z + \pi)} \sum_0^{\infty} \left( \frac{(z + \pi)^2}{6} + O((z + \pi)^4) \right)^k = \\ &= -\frac{1}{(z + \pi)} \left( 1 + \frac{(z + \pi)^2}{6} + O((z + \pi)^4) \right). \end{aligned}$$

Vi skriver också  $z = -\pi + (z + \pi)$  och får

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z + \pi) \sin z} &= -(-\pi + (z + \pi)) \frac{1}{(z + \pi)^2} \left( 1 + \frac{(z + \pi)^2}{6} + O((z + \pi)^4) \right) = \\ &= \frac{\pi}{(z + \pi)^2} - \frac{1}{z + \pi} + \frac{\pi}{6} + O(z + \pi), \end{aligned}$$

vilket ger oss att  $Res_{-\pi} f = -1$ .

Enligt Residysatsen har vi att

$$\int_{|z|=5} f dz = 2\pi i (Res_0 f + Res_{\pi} f + Res_{-\pi} f) = -3\pi i.$$

6. Visa att om  $f(z)$  har kontinuerliga partiella derivator som uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer i ett område  $G$ , då är  $f$  holomorf i  $G$ . (5p)

Lösning: Se bok eller föreläsningssanteckningar.

7. Formulera och bevisa Cauchys sats. (5p)

Lösning: Se bok eller föreläsningssanteckningar.

8. Antag att  $f$  är holomorf i  $\{z : 0 < |z| < 1\}$  samt att  $|f(z) - 1| \geq 1$ . Visa att singulariteten i 0 inte kan vara väsentlig. (5p)

Lösning: Att  $|f(z) - 1| \geq 1$  betyder speciellt att  $f(z) \neq 1$ , så det följer att  $g(z) := \frac{1}{f(z)-1}$  är holomorf i  $A(0, 0, 1)$ .  $g$  har alltså också en isolerad singularitet i 0. Vi har nu att

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - 1|} \leq 1.$$

Det följer då från räkneregler för gränsvärden att

$$\lim_{z \rightarrow 0} zg(z) = 0.$$

Enligt Klassifikation av isolerade singulariteter har därför  $g$  en hävbar singularitet i 0, dvs  $g$  kan utvidgas till en holomorf funktion i  $D(0, 1)$ . Vi noterar också att då  $g(z) = \frac{1}{f(z)-1}$  att  $g \neq 0$  i  $A(0, 0, 1)$ . Vi kan därför skriva  $1/g(z) = f(z) - 1$ , dvs  $f(z) = 1/g(z) + 1$ . Om  $g(0) \neq 0$  betyder det att  $1/g(z)$  är holomorf i en omgivning till 0, och vi ser att i detta fall har  $f$  en hävbar singularitet i 0. Om  $g(0) = 0$  så gäller att  $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$  ( $g$  är holo och därför kontinuerlig), så enligt räkneregler för gränsvärden har vi att

$$\lim_{z \rightarrow 0} |f(z)| = \frac{\lim_{z \rightarrow 0} |1 + g(z)|}{\lim_{z \rightarrow 0} |g(z)|} = 1/0 = \infty.$$

Detta betyder alltså att  $f$  har en pol i 0, dvs i ingetdera fall är singulariteten väsentlig.

Lycka till!  
David