

# Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 08 31, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Gustav Kettil, 031-7726792

Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

**Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)**

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen  $e^{z^2}$  är holomorf i  $\mathbb{C}$ . (4p)

2. Låt

$$f(z) := \frac{e^{\sin z} - 1}{z^3}.$$

a) Svara på om  $f$  har en pol i punkten 0 och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

b) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

betäknar Laurentseriutvecklingen av  $f$  giltig i området  $\{z : 0 < |z| < 2\}$ , bestäm koefficienterna  $a_{-3}$ ,  $a_{-2}$ ,  $a_{-1}$  och  $a_0$ . (4p)

c) Bestäm integralen

$$\int_{|z|=1} f(z) dz.$$

(1p)

d) Svara på om  $f$  har en pol i punkten  $3i$  och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

e) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - 3i)^n$$

betäknar Laurentseriutvecklingen av  $f$  giltig i området  $\{z : 0 < |z - 3i| < 2\}$ , bestäm koefficienterna  $b_{-1}$  och  $b_0$ . (2p)

f) Bestäm integralen

$$\int_{|z-3i|=4} f(z) dz.$$

(1p)

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 12} dx.$$

(7p)

4. Bestäm bilden av området  $A := \{z : |z| > 0, 0 < \text{Arg}(z) < \pi/3\}$  under avbildningen

$$f(z) := \frac{z^3}{z^3 + i}.$$

(Tips: använd att  $f(z) = M(z^3)$  där  $M(z) = \frac{z}{z+i}$ .) (7p)

Obs! Tesen fortsätter på nästa sida.

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet  $p(z) := z^4 + 4iz + 3 + i$  i området  $G := \{z : \text{Im}(z) > 1\}$ .  
(7p)
6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)
7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)
8. Visa att om  $f$  är en hel funktion (dvs holomorf i hela  $\mathbb{C}$ ) och dessutom

$$|f(z)| \leq |\sin z|$$

för alla  $z \in \mathbb{C}$  så finns en konstant  $A \in \mathbb{C}$  sådan att  $f(z) = A \sin z$ . (5p)

Lycka till!

David

# Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2018 08 31, 14.00-18.00

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna

Telefonvakt: Gustav Kettil, 031-7726792

Kursansvarig: David Witt Nyström, 031-7721068

**Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)**

---

1. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att funktionen  $e^{z^2}$  är holomorf i  $\mathbb{C}$ . (4p)

Lösning:

Vi observerar att

$$u(x, y) := \operatorname{Re}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2} \cos(2xy)$$

medan

$$v(x, y) := \operatorname{Im}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2} \sin(2xy).$$

En enkel uträkning ger därför att

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2-y^2} (2x \cos(2xy) - 2y \sin(2xy)),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{x^2-y^2} (-2y \cos(2xy) - 2x \sin(2xy)),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{x^2-y^2} (2y \cos(2xy) + 2x \sin(2xy))$$

samt

$$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{x^2-y^2} (2x \cos(2xy) - 2y \sin(2xy)).$$

Vi ser då att Cauchy-Riemanns ekvationer är uppfyllda, dvs

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

samt

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vi noterar också att alla dessa partiella derivator är kontinuerliga, dvs funktionen  $e^{z^2}$  är  $C^1$ . Enligt satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer är därför  $e^{z^2}$  holomorf i  $\mathbb{C}$ .

2. Låt

$$f(z) := \frac{e^{\sin z} - 1}{z^3}.$$

- a) Svara på om  $f$  har en pol i punkten 0 och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

Lösning: Inspektion ger att  $f$  är holomorf i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . En standardräkning ger att  $f$ 's Laurentseriutveckling börjar såhär:

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z} + O(z).$$

Detta betyder att 0 är en pol av ordning 2.

- b) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

betäcknar Laurentseriutvecklingen av  $f$  giltig i området  $\{z : 0 < |z| < 2\}$ , bestäm koefficienterna  $a_{-3}$ ,  $a_{-2}$ ,  $a_{-1}$  och  $a_0$ . (4p)

Lösning: Från ovan ser vi att  $a_{-3} = 0$ ,  $a_{-2} = 1$ ,  $a_{-1} = 1/2$  samt  $a_0 = 0$ .

- c) Bestäm integralen

$$\int_{|z|=1} f(z) dz.$$

(1p)

Lösning: Eftersom  $f$  är holomorf i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  och residyn i 0 enligt ovan är  $1/2$  följer det från Cauchys formel att

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(f) = \pi i.$$

- d) Svara på om  $f$  har en pol i punkten  $3i$  och bestäm i så fall polens ordning. (1p)

Lösning: Vi noterar att  $f$  är holomorf i en omgivning till punkten  $3i$  så det är inte en pol.

- e) Om

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - 3i)^n$$

betäcknar Laurentseriutvecklingen av  $f$  giltig i området  $\{z : 0 < |z - 3i| < 2\}$ , bestäm koefficienterna  $b_{-1}$  och  $b_0$ . (2p)

Lösning: Eftersom  $f$  är holomorf i en omgivning till punkten  $3i$  så sammanfaller dess Laurentserie i  $\{z : 0 < |z - 3i| < 2\}$  med dess Taylorserie i  $\{z : |z - 3i| < 2\}$ . Vi ser därför att  $b_{-1} = 0$  samt att  $b_0 = f(3i) = -\frac{e^{\sin(3i)} - 1}{27i} = i \frac{1 - e^{i \arcsin(3)}}{27}$ .

- f) Bestäm integralen

$$\int_{|z-3i|=4} f(z) dz.$$

(1p)

Lösning:

Eftersom  $f$  är holomorf i  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  och kurvan  $\gamma(3i, 4)$  i detta område är homotop med  $\gamma(0, 1)$  följer från Cauchys sats och ovan att

$$\int_{|z-3i|=4} f(z) dz = \int_{|z|=1} f(z) dz = \pi i.$$

3. Använd residykalkyl för att beräkna integralen

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 12} dx. \tag{7p}$$

Lösning: Låt  $I$  beteckna den sökta integralen medan

$$I' := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 12} dx.$$

Då funktionen är jämn ser vi att  $I' = 2I$ . Låt

$$f(z) := \frac{e^{3iz}}{z^2 + 12}.$$

Vi har då att

$$I' = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} \operatorname{Re} f(z) dz = \operatorname{Re} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} f(z) dz \right).$$

Låt  $\gamma_R(t) := Re^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$  och  $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ . Vi ser att  $|e^{3iz}| \leq 1$  på övre halvplanet. Omvända triangelolikheten ger att

$$|z^2 + 12| \geq |z^2| - 12 \geq |z^2|/2$$

för tillräckligt stora  $|z|$ , vilket betyder att  $|f(z)| \leq 2/R^2$  för stora  $R$ . Tillsammans med triangelolikheten för integraler leder detta till att

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) dz \right| \leq 2\pi/R$$

och därför

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} f(z) dz = 0.$$

Alltså har vi

$$I' = \operatorname{Re} \left( \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} f(z) dz \right).$$

Vi noterar också att

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - i2\sqrt{3}}$$

där

$$g(z) := \frac{e^{3iz}}{z + i2\sqrt{3}}$$

är holomorf i övre halvplanet. Dvs  $f$  har endast en singularitet i övre halvplanet, i punkten  $i2\sqrt{3}$ , och enligt sats är

$$\operatorname{Res}_{i2\sqrt{3}} f = g(i2\sqrt{3}).$$

En enkel räkning visar att

$$g(i2\sqrt{3}) = -i \frac{e^{-6\sqrt{3}}}{4\sqrt{3}}.$$

Vi får enligt residysatsen att för  $R > 2\sqrt{3}$ ,

$$\int_{\sigma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{i2\sqrt{3}} f = \frac{e^{-6\sqrt{3}\pi}}{2\sqrt{3}}.$$

Detta betyder att

$$I' = \frac{e^{-6\sqrt{3}\pi}}{2\sqrt{3}}$$

och så tillslut

$$I = I'/2 = \frac{e^{-6\sqrt{3}\pi}}{4\sqrt{3}}.$$

4. Bestäm bilden av området  $A := \{z : |z| > 0, 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi/3\}$  under avbildningen

$$f(z) := \frac{z^3}{z^3 + i}.$$

(Tips: använd att  $f(z) = M(z^3)$  där  $M(z) = \frac{z}{z+i}$ .) (7p)

Lösning: Låt  $g(z) := z^3$ , då ser vi att  $f = M \circ g$ . Vi bestämmer först bilden  $B := g(A)$ . Vi noterar att  $g(re^{i\theta}) = r^3 e^{i3\theta}$ , dvs vinkeln tredubblas, vilket betyder att

$$B = g(A) = \{z : |z| > 0, 0 < \operatorname{Arg}(z) < \pi\},$$

eller med andra ord är  $B$  det övre halvplanet. Eftersom  $f(A) = M(g(A)) = M(B)$  återstår nu att bestämma  $M(B)$ . Vi noterar att  $M$  är en Möbiusavbildning och enligt sats avbildar den därför linjer och cirklar på linjer eller cirklar. Det övre halvplanet avgränsas av den reella linjen  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , och det följer att  $M(B)$  kommer avgränsas av  $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ , vilket alltså enligt sats kommer vara en linje eller cirkel. Eftersom  $-1, 0, 1$  alla ligger på den reella linjen kommer  $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  vara den unika linje eller cirkel som innehåller de tre punkterna  $M(-1)$ ,  $M(0)$  och  $M(1)$ . Vi noterar att  $M(-1) = (1+i)/2$ ,  $M(0) = 0$  samt  $M(1) = (1-i)/2$ . Vi får därför att  $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$  är cirkeln med centrum i  $1/2$  med radie  $1/2$ . Det följer att  $f(A)$  antingen är det som ligger innanför eller det som ligger utanför denna cirkel. Punkten  $i$  ligger i övre halvplanet och  $M(i) = 1/2$ , vilket ligger inuti cirkeln, så vi får att  $f(A) = \{z : |z - 1/2| < 1/2\}$ .

5. Bestäm antalet nollställen till polynomet  $p(z) := z^4 + 4iz + 3 + i$  i området  $G := \{z : \operatorname{Im}(z) > 1\}$ . (7p)

Lösning: b) Vi använder argumentprincipen. Låt  $\gamma_R^1(t) := Re^{it} + i$ ,  $t \in [0, \pi]$  och  $\gamma_R^2(t) := t + i$ ,  $t \in [-R, R]$ , och  $\sigma_R := \gamma_R^1 \cup \gamma_R^2$ . Vi har att för  $R \gg 0$

$$\arg(p(Re^{it} + i)) \approx (Re^{it})^4 = 4t$$

så

$$\operatorname{argvar}_{\gamma_R^1}(p(z)) \approx 4\pi.$$

Vi har att

$$p(t + i) = t^4 - 6t^2 + i(4t^3 + 1).$$

För  $R \gg 0$  har vi

$$\arg(p(-R + i)) \approx 0$$

samt

$$\arg(p(R + i)) \approx 0.$$

Vi noterar att realdelen av  $p(t + i)$ , dvs  $t^4 - 6t^2$ , är positiv då  $t < -\sqrt{6}$ , ickepositiv för  $-\sqrt{6} \leq t \leq \sqrt{6}$  samt igen positiv för  $t > \sqrt{6}$ . Vi ser också att imaginärdelen av  $p(-\sqrt{6} + i)$  är negativ medan imaginärdelen av  $p(\sqrt{6} + i)$  är positiv. Man ser nu enklast med figur att detta betyder att

$$\operatorname{argvar}_{\gamma_R^2}(p(z)) \approx -2\pi.$$

Den totala argumentvariationen längs  $\sigma_R$  blir därför  $2\pi$ , vilket enligt argumentprincipen betyder att  $p$  har ett nollställe i det inre av  $\sigma_R$ . Låter vi  $R \rightarrow \infty$  får vi att  $p$  har ett nollställe i  $G$ .

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats. (5p)

Lösning: Se boken eller föreläsningssanteckningar.

7. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling av holomorfa funktioner. (5p)

Lösning: Se boken eller föreläsningssanteckningar.

8. Visa att om  $f$  är en hel funktion (dvs holomorf i hela  $\mathbb{C}$ ) och dessutom

$$|f(z)| \leq |\sin z|$$

för alla  $z \in \mathbb{C}$  så finns en konstant  $A \in \mathbb{C}$  sådan att  $f(z) = A \sin z$ . (5p)

Lösning: Vi noterar att  $\sin z$  är en hel funktion, och att den är nollskild förutom i punkterna  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Det följer då att

$$g(z) := \frac{f(z)}{\sin z}$$

är en holomorf funktion i  $\mathbb{C} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ , så  $g$  har isolerade singulariteter i punkterna  $\pi k$ . Enligt antagandet har vi att

$$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|\sin z|} \leq 1.$$

Enligt sats betyder detta att de isolerade singulariteterna är hävbara, dvs vi kan utvidga  $g$  till en holomorf funktion i hela  $\mathbb{C}$ .  $g$  är nu en hel funktion, men vi såg ovan att den dessutom är begränsad, så enligt Liouvilles sats är  $g$  konstant, säg  $g(z) = A$ ,  $A \in \mathbb{C}$ . Men vi har ju att  $f(z) = g(z) \sin(z)$  så vi får att  $f(z) = A \sin z$ , vilket skulle bevisas.

Lycka till!

David