

Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 10 26, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{1}{x^2 + 7}. \quad (5p)$$

- b) Använd resultatet i a) för att bestämma Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{\cos x}{x^2 + 7}. \quad (2p)$$

2. Låt

$$f(z) := \frac{1 + e^z}{1 - e^z}$$

och $A := \{z : \operatorname{Re}(z) < 0, -\pi < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$. Bestäm bilden $f(A)$.

(Tips: använd att $f(z) = M(e^z)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$.) (7p)

3. a) Använd Laplacetransformen för att ge en lösningsformel för begynnelsevärdesproblemet:

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

där f är en given funktion sådan att $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ för några $A, B \in \mathbb{R}$. (5p)

- b) Bestäm lösningen u explicit (dvs inga integraler i uttrycket) när f ges av $f(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 2\pi$ medan $f(t) = 0$ för $t > 2\pi$. (2p)

4. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 4z + 1$ i området $G := \{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$. (7p)

5. Beräkna integralerna:

- a)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz, \quad (4p)$$

- b)

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz. \quad (3p)$$

6. Formulera satsen om klassifikation av nollställen. Bevisa satsen i specialfallet att funktionen är holomorf i enhetsskivan $D(0, 1)$ med nollställe i punkten 0. (5p)

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

8. Visa att $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierar en holomorf funktion i halvplanet $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ (kom ihåg att $n^z := e^{z \ln n}$). ($\zeta(z)$ är känd som Reimanns zeta-funktion.) (5p)

Lycka till!
David

Tenta i MVE025/MVE295, Komplex (matematisk) analys, F2 och TM2/Kf2

2017 10 26, 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson, 031-7725325

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39 (4), 40-50 (5)

1. a) Använd residykalkyl för att beräkna Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{1}{x^2 + 7}. \quad (5p)$$

b) Använd resultatet i a) för att bestämma Fouriertransformen av funktionen

$$\frac{\cos x}{x^2 + 7}. \quad (2p)$$

Lösning: a) Låt

$$f(x) := \frac{1}{x^2 + 7},$$

då har vi enligt definition att

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{x^2 + 7} dx.$$

Vi sätter

$$g(z) := \frac{e^{-itz}}{z^2 + 7}.$$

Vi vet då att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, R]} g(z) dz.$$

Vi antar först att $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(s) := Re^{is}$, $s \in [0, \pi]$ samt $\sigma_R := [-R, R] \cup \gamma_R$ som då är en sluten kurva. Vi har att

$$\left| \int_{\gamma_R} g dz \right| \leq \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{e^{-itz}}{z^2 + 7} \right| |\gamma_R| \leq \frac{\pi R}{R^2 - 7} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$. Här använde vi först triangelolikheten för integraler, sedan att $|e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1$ på γ_R samt att $|z^2 + 7| \geq |z|^2 - 7 = R^2 - 7$ på γ_R tack vare den omvända triangelolikheten. Detta implicerar att

$$\hat{f}(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_R} g dz.$$

Vi noterar nu att $z^2 + 7 = (z + i\sqrt{7})(z - i\sqrt{7})$ så $g(z)$ är holomorf i \mathbb{C} förutom isolerade singulariteter i $\pm i\sqrt{7}$, där bara $i\sqrt{7}$ ligger i det inre av σR , $R > \sqrt{7}$. Enligt räkneregler för residyer har vi att

$$\text{Res}_{i\sqrt{7}}g = \left(\frac{e^{-itz}}{z + i\sqrt{7}} \right)_{|z=i\sqrt{7}} = \frac{e^{\sqrt{7}t}}{2i\sqrt{7}}.$$

Residysatsen säger nu att

$$\int_{\sigma R} g dz = 2\pi i \text{Res}_{i\sqrt{7}}g = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}},$$

så sammantaget får vi att för $t \leq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}.$$

Eftersom f är reellvärd gäller räkneregeln

$$\hat{f}(t) = \overline{\hat{f}(-t)}$$

så vi får att för $t \geq 0$ är

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}t}}{\sqrt{7}}.$$

Sammantaget får vi därför att

$$\hat{f}(t) = \frac{\pi e^{-\sqrt{7}|t|}}{\sqrt{7}}.$$

b) Låt $h(x) := f(x) \cos x$. Eftersom

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

får vi att

$$\begin{aligned} \hat{h}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-itx} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(t-1)x} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(t+1)x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \hat{f}(t-1) + \frac{1}{2} \hat{f}(t+1) = \frac{\pi}{2\sqrt{7}} (e^{-\sqrt{7}|t-1|} + e^{-\sqrt{7}|t+1|}). \end{aligned}$$

2. Låt

$$f(z) := \frac{1 + e^z}{1 - e^z}$$

och $A := \{z : \text{Re}(z) < 0, -\pi < \text{Im}(z) < \pi\}$. Bestäm bilden $f(A)$.

(Tips: använd att $f(z) = M(e^z)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$.) (7p)

Lösning: Vi noterar att $|e^z| = e^x$ samt att $\text{Arg}(z) = y + 2\pi k$ där $k \in \mathbb{Z}$ är valt sådant att $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$. Det följer att bilden av A under avbildningen e^z blir

$$B := \{z : 0 < |z| < 1, -\pi < \text{Arg}(z) < \pi\} = D(0, 1) \setminus (-1, 0].$$

Vi har att $f(A) = M(B)$ där $M(z) := \frac{1+z}{1-z}$ är en Möbiusavbildning. Vi noterar att $M(-1) = 0$, $M(0) = 1$, $M(1) = \infty$. Enligt sats avbildar Möbiusavbildningar linjer och cirklar på linjer och cirklar. Vi får därför att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. $M((-1, 0])$ måste då vara en del av den reella axeln som förbinder punkterna 0 och 1. $M((-1, 0])$ innehåller inte oändlighetspunkten, så vi får att $M((-1, 0]) = (0, 1]$.

Dessutom avbildas enhetscirkeln på en cirkel eller linje som går genom 0 och ∞ , dvs en linje genom origo. Eftersom enhetscirkel skär den reella axeln i rät vinkel i punkten -1 och Möbiusavbildningar enligt sats är konforma måste $M(C(0, 1))$ skära den reella axeln i rät vinkel i origo, vilket implicerar att $M(C(0, 1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Då $M(0) = 1$ följer det att $M(D(0, 1)) = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Eftersom M är en bijektion får vi slutligen att

$$f(A) = M(B) = M(D(0, 1)) \setminus M((-1, 0]) = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\} \setminus (0, 1].$$

3. a) Använd Laplacetransformen för att ge en lösningsformel för begynnelsevärdesproblemet:

$$u''(t) + 2u'(t) + 2u(t) = f(t), \quad t \geq 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 0,$$

där f är en given funktion sådan att $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ för några $A, B \in \mathbb{R}$. (5p)

- b) Bestäm lösningen u explicit (dvs inga integraler i uttrycket) när f ges av $f(t) = 1$ för $0 \leq t \leq 2\pi$ medan $f(t) = 0$ för $t > 2\pi$. (2p)

Lösning: a) Laplacetransformen av ekvationen ger att

$$(s^2 + 2s + 2)\tilde{u} = \tilde{f} + s + 2,$$

vilket vi skriver om som

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1}.$$

Enligt räkneregler för LT har vi att

$$\mathcal{L}(e^{-t} \sin t) = \frac{1}{(s+1)^2 + 1}, \quad \mathcal{L}(e^{-t} \cos t) = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1},$$

samt

$$\mathcal{L}(e^{-t} \sin t * f) = \mathcal{L}(e^{-t} \sin t)\mathcal{L}(f) = \frac{\tilde{f}}{(s+1)^2 + 1}.$$

Vi får alltså att $\tilde{u} = \mathcal{L}(e^{-t} \sin t * f + e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t)$ och det följer då från inversionsformeln att

$$u = e^{-t} \sin t * f + e^{-t} \sin t + e^{-t} \cos t.$$

- b) Per definition är faltningen $e^{-t} \sin t * f$ givet av:

$$(e^{-t} \sin t * f)(t) := \int_0^t e^{-r} \sin r f(t-r) dr.$$

Då $0 \leq t \leq 2\pi$ får vi för vår givna funktion f att

$$\int_0^t e^{-r} \sin r f(t-r) dr = \int_0^t e^{-r} \sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r + \cos r) \right]_0^t = -\frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2},$$

där vi använde att $-(e^{-t}/2)(\sin t + \cos t)$ är en primitiv funktion till $e^{-t} \sin t$ (hittas mha partiell integration). Då $t \geq 2\pi$ får vi istället att

$$\int_0^t e^{-r} \sin r f(t-r) dr = \int_{t-2\pi}^t e^{-r} \sin r dr = \left[-\frac{e^{-r}}{2}(\sin r + \cos r) \right]_{t-2\pi}^t = \frac{e^{2\pi} - 1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t).$$

Sammansatt betyder detta att

$$u(t) = \frac{e^{-t}}{2}(\sin t + \cos t) + \frac{1}{2} \quad \text{då} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

medan

$$u(t) = \frac{e^{2\pi} + 1}{2} e^{-t} (\sin t + \cos t) \quad \text{då} \quad t \geq 2\pi.$$

4. Bestäm antalet nollställen till polynomet $p(z) = z^4 - 4z + 1$ i området $G := \{z : 0 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$. (7p)

Lösning: Vi hittar först antalet nollställen i högra halvplanet. Låt $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma_R := [iR, -iR] \cup \gamma_R$. Vi ser att

$$p(Re^{it}) = R^4 \left(e^{4it} - \frac{4i}{R^3} + \frac{1}{R^4} \right)$$

så $\arg(p(Re^{it})) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $\operatorname{argvar}(f(\gamma_R)) \approx 4\pi$ för stora R . Vi har också att

$$p(iy) = y^4 + 1 + i(-4y).$$

Speciellt får vi att

$$p(iR) = R^4 + 1 - 4iR$$

så $\arg(p(iR)) \approx 0 + 2\pi k_1$ och vi ser också att $p(iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(-iR) = R^4 + 1 + 4iR$$

så $\arg(p(-iR)) \approx 0 + 2\pi k_2$ och vi ser också att $p(-iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $\operatorname{Im}(p(iy)) = 0$ om $y = 0$ ser vi att kurvan $p([iR, -iR])$ endast passerar x-axeln i punkten 1. Detta betyder dels att $p \neq 0$ på den imaginära axeln, samt att kurvan $p([iR, -iR])$ ej kan gå runt 0 när den går från $p(iR)$ till $p(-iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $\operatorname{argvar}(p([iR, -iR])) \approx 0$. Vi får att

$$W(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{argvar}(p(\sigma_R)) = \frac{1}{2\pi} (\operatorname{argvar}(p(\gamma_R)) + \operatorname{argvar}(p([iR, -iR]))) \approx 2$$

för stora R . Men vindningstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma_R)) = 2.$$

Argumentprincipen säger då att p har 2 nollställen i $\operatorname{int}(\sigma_R)$ för stora R , dvs p har 2 nollställen i det öppna högra halvplanet.

Nu ska vi hitta antalet nollställen i $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq 1\}$. Låt $\gamma'_R(t) := Re^{it} + 1, t \in [-\pi/2, \pi/2]$ och $\sigma'_R := [1 + iR, 1 - iR] \cup \gamma_R$. Först noterar vi att

$$p(z + 1) = z^4 + 4z^3 + 6z^2 - 2.$$

Detta ger att

$$p(Re^{it} + 1) = R^4 \left(e^{4it} + \frac{4}{R} e^{3it} + \frac{6}{R^2} e^{2it} - \frac{2}{R^4} \right)$$

så $\arg(p(Re^{it} + 1)) \approx 4t + 2\pi k$ för stora R vilket implicerar att $\operatorname{argvar}(f(\gamma'_R)) \approx 4\pi$ för stora R . Vi har också att

$$p(1 + iy) = y^4 - 6y^2 - 2 + i(-4y^3).$$

Speciellt får vi att

$$p(1 + iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i(-4R^3)$$

så $\arg(p(1 + iR)) \approx 0 + 2\pi k_3$ och vi ser också att $p(1 + iR)$ ligger i nedre halvplanet. Vidare ser vi att

$$p(1 - iR) = R^4 - 6R^2 - 2 + i4R^3$$

så $\arg(p(1 - iR)) \approx 0 + 2\pi k_4$ och vi ser också att $p(1 - iR)$ ligger i övre halvplanet. Då $\operatorname{Im}(p(1 + iy)) = 0$ om $y = 0$ ser vi att kurvan $p([1 + iR, 1 - iR])$ endast passerar x-axeln i punkten -2 . Detta betyder dels att $p \neq 0$ på linjen $\{z : \operatorname{Re}(z) = 1\}$, samt att kurvan $p([1 + iR, 1 - iR])$ går runt 0 en gång i negativ riktning när den går från $p(1 + iR)$ till $p(1 - iR)$ (visas bäst med figur). Detta implicerar att $\operatorname{argvar}(p([1 + iR, 1 - iR])) \approx -2\pi$. Vi får att

$$W(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi} \operatorname{argvar}(p(\sigma'_R)) = \frac{1}{2\pi} (\operatorname{argvar}(p(\gamma'_R)) + \operatorname{argvar}(p([1 + iR, 1 - iR]))) \approx 1$$

för stora R . Men vindingstal är heltal så vi får att för stora R är

$$W(p(\sigma'_R)) = 1.$$

Argumentprincipen säger då att p har 1 nollställen i $\operatorname{int}(\sigma'_R)$ för stora R , dvs p har 1 nollställe i det öppna halvplanet $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$. Eftersom vi såg att p inte hade några nollställen på linjen $\{z : \operatorname{Re}(z) = 1\}$ får vi att antalet nollställen i G är lika med antalet nollställen i det öppna högra halvplanet minus antalet nollställen i det öppna halvplanet $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$, dvs p har ett nollställe i G .

5. Beräkna integralerna:

a)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz, \tag{4p}$$

b)

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz. \tag{3p}$$

Lösning: a) $f(z) := \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2}$ är holo i \mathbb{C} förutom isolerade singulariteter i punkterna 0 och 2. Av dessa ligger endast 0 i det inre av $C(0, 1)$. Notera att

$$\sin(1/z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!} \frac{1}{z^5} - \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1}$$

i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi utvecklar

$$\frac{1}{z-2} = - \sum_0^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} z^k$$

och därför

$$\frac{1}{(z-2)^2} = - \left(\frac{1}{z-2} \right)' = \sum_1^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k.$$

Sammantaget får vi

$$\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{-2m-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2^{k+2}} z^k \right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l z^l,$$

där (eftersom $z^{-2m-1} z^k = z^{-1}$ omm $k = 2m$)

$$c_{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} \frac{2m+1}{2^{2m+2}} = \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\frac{1}{2} \right)^{2m} = \frac{1}{4} \cos(1/2).$$

Alltså är

$$Res_0 \left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} \right) = \frac{1}{4} \cos(1/2)$$

och Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i Res_0 \left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} \right) = \frac{\pi i}{2} \cos(1/2).$$

b) Båda singulariteterna 0 och 2 ligger i $C(0, 3)$. Enligt räkneregeln för residyer har vi

$$Res_2 \left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} \right) = \sin(1/z)'|_{z=2} = - \left(\frac{\cos(1/z)}{z^2} \right)_{|z=2} = - \frac{1}{4} \cos(1/2).$$

Residysatser ger oss därför att

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz = 2\pi i \left(Res_0 \left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} \right) + Res_2 \left(\frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} \right) \right) = 0.$$

Alternativ lösning av b) är att notera att Cauchys sats ger att

$$\int_{|z|=R} \frac{\sin(1/z)}{(z-2)^2} dz$$

är oberoende av R då $R > 2$, samt att man kan visa att integralen går mot noll då $R \rightarrow \infty$ (mha triangelolikheten för integraler).

6. Formulera satsen om klassifikation av nollställen. Bevisa satsen i specialfallet att funktionen är holomorf i enhetsskivan $D(0, 1)$ med nollställe i punkten 0. (5p)

Lösning: Se bok eller föreläsningssanteckningar.

7. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

Lösning: Se bok eller föreläsningssanteckningar.

8. Visa att $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ definierar en holomorf funktion i halvplanet $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ (kom ihåg att $n^z := e^{z \ln n}$). ($\zeta(z)$ är känd som Reimanns zeta-funktion.) (5p)

Lösning: Vi noterar att $|\frac{1}{n^z}| = \frac{1}{n^x}$. Vi vet också (via t ex integralkriteriet) att $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^x}$ är konvergent för alla $x > 1$. Eftersom en absolutkonvergent serie är konvergent följer det att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ är konvergent i halvplanet $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$, och definierar därför en funktion $\zeta(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ där.

Låt $a > 1$. På $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$ får vi att

$$\left| \sum_1^N \frac{1}{n^z} - \zeta(z) \right| = \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \right| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(z)}} \leq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^a} \rightarrow 0$$

då $N \rightarrow \infty$, dvs serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt på $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$. Varje enskild term $1/n^z$ är kontinuerlig i z såenligt sats är $\zeta(z)$ kontinuerlig på $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$. Låt nu γ vara en styckvist glatt sluten kurva i $\{z : \operatorname{Re}(z) > a\}$. Eftersom $\sum_1^N \frac{1}{n^z}$ konvergerar likformigt mot $\zeta(z)$ på $\{z : \operatorname{Re}(z) \geq a\}$ kan vi enligt sats föra ut summationen från integralen:

$$\int_{\gamma} \zeta(z) dz = \sum_1^{\infty} \int_{\gamma} \frac{1}{n^z} dz.$$

Varje enskild term $1/n^z$ är holomorf i hela \mathbb{C} . Där γ är sluten är den automatiskt nollhomotop i \mathbb{C} , såfrån Cauchys sats följer det att

$$\int_{\gamma} \frac{1}{n^z} dz = 0.$$

Som en konsekvens blir alltså

$$\int_{\gamma} \zeta(z) dz = \sum_1^{\infty} \int_{\gamma} \frac{1}{n^z} dz = 0.$$

Eftersom ζ är kontinuerlig i området $\{z : \operatorname{Re}(z) > a\}$ samt kurvintegralen kring varje styckvist glatt sluten kurva i $\{z : \operatorname{Re}(z) > a\}$ blir noll säger Moreras sats att $\zeta(z)$ är holomorf i $\{z : \operatorname{Re}(z) > a\}$. Eftersom att vara holomorf är en lokal egenskap och ζ är holo i alla $\{z : \operatorname{Re}(z) > a\}$ för $a > 1$ följer att $\zeta(z)$ är holo i $\{z : \operatorname{Re}(z) > 1\}$.

Lycka till!
David