

1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2016 01 07, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Gustav Kettil 0703-088304

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39(4), 40-50 (5)

1. Använd residykalkyl till att beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

(7p)

2. Låt

$$f(z) = \frac{z}{(\sin z)^2}.$$

- a. Vilken ordning har f :s pol i origo? (1p)

- b. Bestäm de första nollskilda termerna i f :s Laurentseriutveckling i $\{|z| < \pi\}$.

(2 termer: 4p, 3 termer 5p)

- c. Vad är residyn till f i origo? (1p)

3. Visa att ekvationen $z^4 - 5z^2 + 3 = e^{-z}$ inte har några lösningar på imaginära axeln (2p). Hur många lösningar har ekvationen i högra halvplanet? (5p)

4. Lös med hjälp av Laplacetransformering begynnelsevärdesproblemet

$$u'' + u' - 2u = f(t), t > 0,$$

där f är en funktion som uppfyller $|f(t)| \leq Ce^{At}$ för $t > 0$, och $u'(0) = 2, u(0) = -1$. (Svara med en faltning.)

(7p)

5. Avbilda konformt området $\{|z| > 1; 0 < \text{Arg}(z) < \pi/2\}$ på övre halvplanet.

(7p)

6. Formulera och bevisa Liouvilles sats.

(5p)

7. Visa Cauchys formel (för funktionen, inte för derivatan!)

(5p)

8. Låt $p(z)$ vara ett polynom av grad N , och antag att $|p(z)| = 1$ då $|z| = 1$. Visa att $p(z) = az^N$ där $|a| = 1$. (Ledning: Låt $q(z) = z^N \overline{p(1/\bar{z})}$. Visa att $q(z)$ är ett polynom. Visa sen att $p(z)q(z) = z^N$ då $|z| = 1$ och att q är konstant.)

(5p)

Lycka till!,

BB

1. LÖSNINGAR TILL MVE025/MVE295, 2016-01-07

1. Låt

$$J_R = \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 6z + 10} dz,$$

där Γ_R är en halvcirkel i övre halvplanet med bas intervallet $[-R, R]$ och $R \gg 0$. Nämnaren har nollställena $z_1 = -3 + i$ och $z_2 = -3 - i$; av dessa ligger endast z_1 innanför Γ_R . Residysatsen ger därför att

$$J_R = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z^2 + 6z + 10}, z_1\right) = 2\pi i \frac{e^{i(-3+i)}}{2(-3+i) + 6} = \pi e^{-1-3i}.$$

Skriv $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, där C_R är den öppna halvcirkeln. Då gäller

$$\left| \int_{C_R} \right| \leq \max_{z \in C_R} \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + 6z + 10|} \leq \max \frac{e^{-y}}{R^2 - 6R - 10} \rightarrow 0$$

då $R \rightarrow \infty$. Det följer att

$$\lim J_R = \lim \int_{[-R, R]} \frac{e^{ix}}{x^2 + 6x + 10} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

Alltså får vi att

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + 6x + 10} dx = \pi e^{-1-3i},$$

vilket ger

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + 6x + 10} dx = \operatorname{Im} \pi e^{-1-3i} = -\pi e^{-1} \sin 3.$$

2 a. Vi har att $\sin z = zh(z)$ där h är holomorf och $h(0) \neq 0$. Alltså har vi

$$f(z) = (1/z)(1/h(z)).$$

Eftersom $1/h$ är holomorf nära origo har f en pol av ordning 1 där.

b. Eftersom ordningen av polen är 1 och f är udda ansätter vi

$$f(z) = c_{-1}/z + c_1z + c_3z^3 + \dots$$

Detta ger (med användning av Taylorutveckling för sinusfunktionen) att

$$z = (z - z^3/3! + z^5/5! + O(z^7))^2 (c_{-1}/z + c_1z + c_3z^3 + \dots)$$

Nu är

$$(z - z^3/3! + z^5/5! + O(z^7))^2 = z^2 - 2z^4/3! + 2z^6/5! + z^6/(3!)^2 + O(z^8),$$

så identifiering av koefficienterna ger

$$c_1 = 1, 0 = c_1 - (1/3)c_{-1}, 0 = c_3 - (1/3)c_1 + ac_{-1},$$

där a är koefficienten för z^6 i $\sin^2 z$, dvs $a = 2/5! + (1/3!)^2 = 2/45$. Summa summarum

$$c_{-1} = 1, c_1 = 1/3, c_3 = 1/9 - a = 1/15.$$

c. Residyn till f är $c_{-1} = 1$.

3. Sätt $f(z) = z^4 - 5z^2 + 3 - e^{-z}$. På imaginäraxeln är $z = it$ (t reellt) och $f(it) = t^4 + 5t^2 + 3 - e^{-it}$. Eftersom $|\operatorname{Re} e^{-it}| = |\cos t| \leq 1$ är $\operatorname{Re} f(it) \geq 2$, så $f(it) \neq 0$.

Vi använder nu argumentprincipen och börjar med att beräkna argvar av $f(it)$ när t går från ∞ till $-\infty$. Om $t \gg 0$ är argumentet till $f(it)$ nästan 0, och samma sak gäller då $t \ll 0$. Eftersom realdelen av $f(it) > 0$ för all t måste argumentvariationen på imaginäraxeln vara nästan 0. Å andra sidan är argumentvariationen längs en stor halvcirkel i högra halvplanet nästan densamma som argumentvariationen av $z^4 - 5z^2 + 3$, dvs 4π , eftersom $|e^{-z}| \leq 1$ i högra halvplanet. Den totala argumentvariationen av f längs en sluten halvcirkel blir alltså nästan (och därför exakt) 4π , och antalet nollställen blir 2.

4. Laplace transformering ger att

$$L(u') = s\tilde{u} + 1, L(u'') = s^2\tilde{u} + s - 2$$

om u uppfyller begynnelsevillkoren. Laplacetransformering av ekvationen ger då att

$$(s^2 + s - 2)\tilde{u} = \tilde{f} + (1 - s).$$

Nu är $s^2 + s - 2 = (s - 1)(s + 2)$ så

$$\tilde{u} = -1/(s + 2) + \tilde{f}/(s - 1)(s + 2).$$

Partialbråksuppdelning ger

$$1/(s - 1)(s + 2) = (1/3)(1/(s - 1) - 1/(s + 2)).$$

Inverstranformering ger sedan att

$$u(t) = -e^{-2t} + f * (e^t - e^{-2t})/3.$$

5.

Låt först $f(z) = z^2$. Denna funktion avbildar området på $D = \{w, \operatorname{Im} w > 0, |w| > 1\}$. Vi avbildar sedan D med funktionen

$$g(w) = \frac{w - 1}{w + 1}.$$

Funktionen g avbildar reella axeln på sig själv och enhetscirkeln på en linje genom origo (eftersom $g(-1) = \infty$ och $g(1) = 0$). Dessutom är denna linje ortogonal mot Re-axeln, eftersom Möbiusavbildningar bevarar vinklar. Bilden av enhetscirkeln under g är alltså imaginäraxeln.

Bilden av D måste därför begränsas av Re-axeln och Im-axeln, så bilden är en av de fyra kvadranterna. Explicit räkning visar att $g(2i) = (3 + 4i)/5$, så bilden av D måste vara första kvadranten. En sista kvadrering $\zeta \rightarrow h(\zeta) = \zeta^2$ överför nu första kvadranten i övre halvplanet. Den slutliga avbildningen blir därför $z \rightarrow z^2 \rightarrow g(z^2) \rightarrow g(z^2)^2$, dvs

$$z \rightarrow \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^2.$$

8. Vi har om $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_Nz^N$ att

$$q(z) = z^N \overline{p(1/\bar{z})} = \bar{a}_0 z^N + \bar{a}_1 z^{N-1} + \dots + \bar{a}_N,$$

ett polynom. Om $|z| = 1$ så gäller $1/\bar{z} = z$ så

$$p(z)q(z) = z^N p(z)\overline{p(z)} = z^N$$

eftersom $|p(z)| = 1$. Eftersom båda sidorna är holomorfa funktioner måste samma identitet gälla överallt. Eftersom graden av pq är graden av p plus graden av q och graden av p är N , måste graden av q vara noll, dvs q är en konstant. Formeln ovan för q ger då att $q = \bar{a}_N$ och alla andra $a_0 = \dots = a_{N-1} = 0$. Alltså är $p(z) = a_N z^N$!