1 Tenta i komplex analys, F/ Kf och TM, MVE 025 och MVE 295

2015 10 29, 08.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad som delas ut av tentamensvakterna
Telefonvakt: Mattias Lennartsson 0703-088304

Betygsgränser: 1-19 (U), 20-29 (3), 30-39(4), 40-50 (5)

---

1. a. Använd residykalkyl till att beräkna Fouriertransformen av

$$f(t) = \frac{1}{t^2 - 4t + 13}.$$

(5p)

b. Använd resultatet i (a) till att beräkna Fouriertransformen av

$$g(t) = \frac{t-2}{(t^2 - 4t + 13)^2}$$

(2p)

2. a. Hur många nollställen räknade med multiplicitet har polynomet $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$ i området $1 < |z| < 2$? (4p)

b. Hur många nollställen har samma polynom i vänstra halvplanet? (3p)

3. Bestäm de fyra första termerna i Laurentserieutvecklingen av

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2+1)}$$

i området $0 < |z| < 1$. Använd resultatet till att beräkna

$$\int_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^3} dz$$

(7p)

4. Vad är bilden av området $\{z; \Re z > 0, |z-1| > 1\}$ under avbildningen $f(z) = (2-z)/z$? ($\Re z$ är realdelen av z.)

(7p)

5. *Laguerrepolynomet av ordning* k definieras som

$$p_k(t) = \frac{1}{k!} e^t \frac{d^k}{dt^k}(t^k e^{-t}).$$

Beräkna Laplacetransformen $\mathcal{L}(p_k)(s)$.

(7p)

6. Visa att om $f(z) = h(z)/g(z)$ där $g(0) = 0$ men $g'(0) \neq 0$ så är residyn av f i 0 lika med $f(0)/g'(0)$. (5p)

7. Visa att en funktion f som är holomorf i området $\{z; |z| < R\}$ (där $R > 0$) kan utvecklas i potensserie där.

(5p)

8. Visa att om $p(z)$ är ett polynom av grad $n > 1$ med endast enkla nollställen $z_1, z_2, ...z_n$, så är

$$\sum_1^n \frac{1}{p'(z_j)} = 0.$$

(5p)

Lycka till!,
BB

1. LÖSNINGAR TILL MVE025/MVE295, 2015-10-27

1. (a)

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{t^2 - 4t + 13} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixt}}{t^2 - 4t + 13} dt.$$

Låt C_R vara den vanliga halvcirkeln i övre halvplanet med radie R (och 0 i mitten av diametern). Låt

$$h(w) = \frac{e^{-ixw}}{w^2 - 4w + 13}.$$

Då har h en singulär punkt $w_0 = 2 + 3i$ innanför C_R. Residysatsen ger att

$$\int_{C_R} h(w)dw = 2\pi i Res(h, w_0) = 2\pi i \frac{e^{-ixw_0}}{2w_0 - 4} = (\pi/3)e^{-2ix+3x}.$$

Om $x \leq 0$ och $\Gamma_R = \{w \in C_R; \operatorname{Im} w > 0\}$ är

$$|\int_{\Gamma_R} h(w)dw| \leq \pi R \max_{\Gamma_R} |h| \leq \max \frac{e^{x\operatorname{Im} w}}{R^2 - 4R - 13} \to 0$$

då $R \to \infty$. (Här används att $x \leq 0$ och $\operatorname{Im} w \geq 0$.) Det följer att

$$\hat{f}(x) = \lim_{R\to\infty} h(t)dt == (\pi/3)e^{-2ix+3x}.$$

Detta gäller om $x \leq 0$. Om $x > 0$ använder vi att

$$\hat{f}(x) = \overline{\hat{f}(-x)} = \overline{(\pi/3)e^{2ix-3x}} = (\pi/3)e^{-2ix-3x}.$$

Sammantaget är alltså $\hat{f}(x) = (\pi/3)e^{-2ix-3|x|}$ för alla x.

(b) Vi observerar att $g(t) = (-1/2)f'(t)$. Det följer att

$$\hat{g}(x) = (-1/2)\hat{f'} = (-ix/2)\hat{f}(x).$$

2.(a) Vi beräknar först antalet nollställen i $|z| < 2$. Skriv $p(z) = f(z) + g(z)$ där $f(z) = 2z^5$ och $g(z) = -6z^2 + z + 1$. När $|z| = 2$ gäller $|f(z)| = 2|z|^5 = 64$ och $|g(z)| \leq 6|z|^2 + |z| + 1 = 24 + 2 + 1 = 27$. Vi ser alltså att $|f| > |g|$ då $|z| = 2$. Rouchés sats ger då att p och f har lika många nollställen i $|z| < 2$, dvs 5 stycken.

Därefter beräknar vi antalet nollställen för $|z| < 1$. Skriv nu istället $p = f + g$ där $f(z) = -6z^2$ och $g(z) = 2z^5 + z + 1$. En snarlik räkning visar att

$$|f(z)| = 6 > 4 \geq |g(z)|$$

då $|z| = 1$. Igen har alltså enligt Rouché f och p lika många nollställen, dvs 2 stycken, i $|z| < 1$. Antalet nollställen till p i cirkelringen är därför 5-2=3.

(b) Låt C_R vara en halvcirkel i vänstra halvplanet med radie $R >> 0$, så att $C_R = \Gamma_R \cup I_R$ där

$$\Gamma_R = \{z; |z| = R, \mathrm{Re}\, z < 0\}, \quad I_R = [-iR, iR].$$

Vi beräknar argumentvariationen av p på Γ_R och I_R. Argumentvariationen på Γ_R är nästan lika med Argvar av $2z^5$ om R är stort, dvs nästan lika med 5π.

För att beräkna variationen på I_R skriver vi $z = it$, där $-R \leq t \leq R$. Då är $p(z) = p(it) = i(t^5 + t) + 6t^2 + 1$. Kurvan $p(it)$ ligger alltså hela tiden i högra halvplanet. Dessutom är argumentet av $p(iR)$ nästan lika med $\pi/2$ och argumentet av $p(-iR)$ är nästan lika med $-\pi/2$, eftersom $t^5 >> t^2$. Argumentet av $p(it)$ ökar alltså med ungefär π när t går från $-R$ till R, så argumentvariationen på I_R är ungefär π. Sammantaget blir argumentvariationen på C_R exakt lika med 6π eftersom den totala variationen längs en sluten kurva alltid är en hel multipel av 2π. Antalet nollställen innaför Γ_R är alltså $6\pi/2\pi = 3$ och eftersom detta gäller för alla stora R är detta också antalet nollställen i vänstra halvplanet.

3. e^z är inte 0 i 0, och $z(z^2 + 1)$ har ett enkelt nollställe i origo. f har därför en enkel pol i origo, och därför en Laurentserieutveckling

$$f(z) = c_{-1}/z + c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$$

Dessutom är $z(z^2 + 1)f(z) = e^z = 1 + z + z^2/2 + z^3/6 + ...$ Därför ger identifikation av koefficienterna att $c_{-1} = 1, c_0 = 1, c_1 + c_{-1} = 1/2, c_2 + c_0 = 1/6$, så $c_{-1} = 1, c_0 = 1, c_1 = -1/2, c_2 = -5/6$.

Det följer att Laurentserieutvecklingen av $f(z)/z^3$ är

$$f(z)/z^3 = \frac{c_{-1}}{z^4} + \frac{c_0}{z^3} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z} + ...$$

Alltså är Residyn av f/z^3 i origo lika med $c_2 = -5/6$. Residysatsen ger att integralen blir $2\pi i(-5/6) = -5\pi i/3$.

4. Området begränsas av Im-axeln och cirkeln $|z - 1| = 1$. Eftersom $f(0) = \infty$ och $f(\infty) = -1$ avbildas Im-axeln på en linje genom punkten -1. Dessutom är det klart att Re-axeln avbildas på sig själv eftersom f bara har reella koefficienter. Bilden av Im-axeln måste därför skära Re-axeln under rät vinkel, så bilden är linjen $\mathrm{Re}\, z = -1$. Eftersom $f(1) = 1$ avbildas högra halvplanet på området till höger om den linjen.

Vi tittar sen på bilden av cirkeln. Eftersom $f(0) = \infty$ och $f(2) = 0$ måste cirkeln avbildas på en linje genom origo. Eftersom cirkeln skär Re-axeln under rät vinkel måste bilden också göra det, så bilden av cirkeln är Im-axeln. Eftersom igen $f(1) = 1$ avbildas området innaför cirkeln på högra halvplanet och området utanför cirkeln på vänstra halvplanet. Området i uppgiften avbildas därför på snittet av vänstra halvplanet och området till höger om linjen $\mathrm{Re}\, z = -1$, dvs på $\{z; -1 < \mathrm{Re}\, z < 0\}$.

5. Vi använder räknereglerna för Laplacetransformen. Först

$$L(e^{-t})(s) = 1/(s + 1).$$

Sen

$$L(t^k e^{-t})(s) = (-d/ds)^k L(e^{-t})(s) = k!/(s + 1)^{k+1}.$$

Sen

$$L((d/dt)^k t^k e^{-t}) = s^k L(t^k e^{-t})(s) = (k!s^k)/(s + 1)^{k+1},$$

eftersom $u(t) = t^k e^{-t}$ uppfyller $u(0) = u'(0) = ...u^{(k-1)}(0) = 0$. Därför blir

$$L(p_k(t))(s) = (1/k!)L((d/dt)^k t^k e^{-t})(s-1) = \frac{(s-1)^k}{s^{k+1}}.$$

8. Tag R så stort att alla z_j uppfyller $|z_j| < R$. Då ger Residysatsen att

$$\int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)} dz = 2\pi i \sum_1^n Res(1/p, z_j) = 2\pi i \sum 1/p'(z_j).$$

Sedan ger en uppskattning med triangelolikheten (som i beviset för algebrans fundamentalsats) att $|p(z)| \geq C|z|^n = CR^n$ om $|z| = R >> 0$. Det följer att

$$|\int_{|z|=R} \frac{1}{p(z)} dz| \leq 2\pi R/(CR^n) \to 0$$

när $R \to \infty$ om $n > 1$. Därför är

$$\sum 1/p'(z_j) = 0.$$