MVE025 och MVE295 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex (matematisk) analys F / Kf och TM
Datum: 2011-01-13, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Oskar Hamlet, tel. 070-3088304, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
===

1. Finn en analytisk funktion $f = f(z)$ som har realdel

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2 + y^2)}.$$

Kan man välja f så att $f(1) = 0$? (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2 + x + 1)^2}\, dx, \quad a < 0.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna $\hat{f}(\xi)$ för de ξ-värden som motsvarar a-värdena från deluppgift (a), där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Givet är polynomet $p(z) = z^5 + 2z^3 + z^2 + z + 4$. Bestäm antalet nollställen p har i det högra halvplanet. (4p) Visa att alla nollställen till p har belopp mindre än 2. (2p) Visa att det finns minst ett nollställe till p som har belopp större än 1. (2p)

4. Avbilda konformt på det övre halvplanet området $\{|z - i| < 1\} \cap \{|z - 1| > 1\}$. (6p)

5. Funktionen f är analytisk på den slutna enhetsskivan $\{z : |z| \leq 1\}$, samt uppfyller $f(0) = 0$. Visa att serien

$$f(z) + f(z^2) + \cdots + f(z^n) + \cdots$$

konvergerar i den öppna enhetsskivan $\{z : |z| < 1\}$. (6p)

6. Visa att en Möbiusavbildning avbildar realaxeln (i z-planet) på realaxeln (i w-planet) om och endast om den kan skrivas med reella koefficienter. (5p)

7. Formulera och bevisa satsen om en funktions Laurentutveckling. (5p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

/JM

MVE025, MVE295

Komplex (matematisk) analys F/Kf, TM

Lösningar 13/1 -2011

1. $x^2-y^2 = \operatorname{Re} z^2$

Sätt $u_1 = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$$(CR)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} = \dfrac{\partial v_1}{\partial y} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\[2ex] \dfrac{\partial u_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = \dfrac{\cancel{x^2}+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_1(x,y) = -2x\int \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\,dy + \varphi(x) =$$

$$= x\cdot(-1)\int \frac{d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \varphi(x) = \frac{x}{x^2+y^2} + \varphi(x)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\cancel{x^2}+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} + \varphi'(x) = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

$$\rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi \equiv \text{const } (\in \mathbb{R})$$

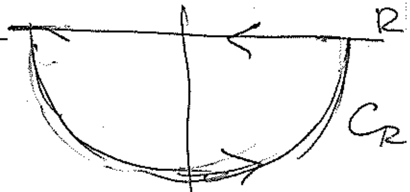
$$u_1 + iv_1 = iC + \frac{y+ix}{x^2+y^2} = iC + i\,\frac{x-iy}{x^2+y^2} = i\,\frac{1}{x+iy} + iC$$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 + i\,\frac{1}{z} + iC$$

$$f(1) = 1 + i + iC \neq 0 \quad \forall C$$

---

2. (a) $\underline{a<0}$



$\Gamma_R = [-R,R] \cup C_R$

$C_R: z = Re^{i\theta}$, $\pi \le \theta \le 2\pi$

$$f(z) = \frac{e^{iaz}}{(z^2+z+1)^2} \qquad z^2+z+1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0$$

$z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ dubbelpoler

endast $z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ innanför Γ_R $(R>1)$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_2} f =$$

$$= 2\pi i \left(\cancel{(z-z_2)^2} \frac{e^{iaz}}{(z-z_1)^2 \cancel{(z-z_2)^2}} \right)' \Bigg|_{z=z_2} =$$

$$= 2\pi i \frac{iae^{iaz}(z-z_1)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z-z_1)} e^{iaz}}{(z-z_1)^{\cancel{4}\, 3}} \Bigg|_{z=z_2} =$$

$$= 2\pi i \frac{iae^{-\frac{ia}{2}} e^{a\frac{\sqrt3}{2}}(-i\sqrt3) - 2e^{-\frac{ia}{2}} e^{a\frac{\sqrt3}{2}}}{(-i\sqrt3)^3} =$$

$$= 2\pi \cancel{i}\, e^{-i\frac{a}{2}} e^{a\frac{\sqrt3}{2}} \frac{a\sqrt3 - 2}{\cancel{i} \cdot 3\sqrt3}$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) = \int_R^{-R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iaz}}{(z^2+z+1)^2} dz \right| = \left| \int_\pi^{2\pi} \frac{\overset{|\cdot|=1}{e^{iaR\cos\theta}} e^{-aR\sin\theta} Rie^{i\theta}}{(R^2e^{2i\theta} + Re^{i\theta} + 1)^2} d\theta \right|$$

$$\le \int_\pi^{2\pi} \frac{1 \cdot e^{-aR\sin\theta} \cdot R \cdot 1 \cdot 1}{(R^2 - R - 1)^2} d\theta \le \frac{\pi R}{(R^2-R-1)^2} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

ty
$$\left.\begin{array}{l} a<0 \\ R>0 \\ \sin\theta \le 0 \text{ i } [\pi, 2\pi] \end{array}\right\} \Rightarrow e^{-\overset{\ge 0}{aR\sin\theta}} \le 1$$

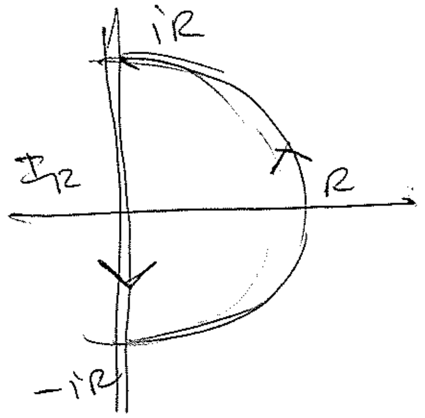
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iax}}{(x^2+x+1)^2} dx = -\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} f(z)\,dz =$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt3} e^{-\frac{ia}{2}} e^{a\frac{\sqrt3}{2}} (2 - a\sqrt3), \quad a<0$$

(b) $$\hat f(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ix\xi}}{(x^2+x+1)^2} dx$$

$\xi = -a$; $a<0$ i (a) $\Rightarrow$ vi får resultat for $\underline{\xi>0}$: $\hat f(\xi) = \frac{2\pi}{3\sqrt3} e^{i\frac{\xi}{2}} e^{-\xi\frac{\sqrt3}{2}} (2 + \xi\sqrt3)$

③



$$\Gamma_R = I_R \cup C_R$$

$$C_R : z = Re^{i\theta}, \ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$I_R : z = iy, \quad y \in \overleftarrow{[-R, R]}$$

R stort ($\to \infty$)

Avbilda Γ_R med p:

I_R: $z = iy$ $\quad p(iy) = iy^5 - 2iy^3 - y^2 + iy + 4$

$u = \mathrm{Re}\, p(iy) = -y^2 + 4 = -(y-2)(y+2)$

$v = \mathrm{Im}\, p(iy) = y^5 - 2y^3 + y =$

$= y(y^2-1)^2 = y(y+1)^2(y-1)^2$

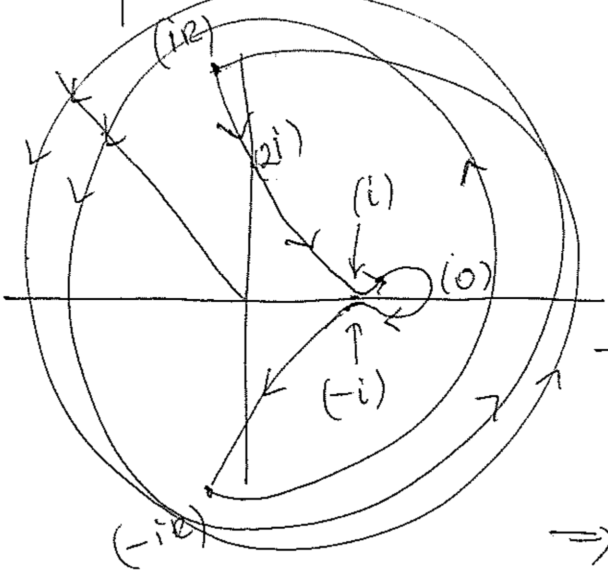
$|v| \gg |u|$ för $|y| = R$ stort

$\Rightarrow$ kurvan $p(I_R)$ börjar och slutar nära Im-axeln

$u = 0$ för $y = \pm 2$; $v = 0$ för $y = 0$, $y = \pm 1$

$\longleftarrow$

	−∞ −R	−2		−1		0		1		2	R +∞
u	−	0		3		4		3		0	−
v	−	−18	−	0	−	0	+	0	+	18	+



$p(C_R)$:

$$p(Re^{i\theta}) = R^5 e^{5i\theta}\left(1 + \frac{\cdots}{R}\right)$$

$\frac{\cdots}{R} \to 0$

$\Rightarrow \Delta_{C_R} \arg p(z) \approx 5 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$

$= 5\pi = 2\tfrac{1}{2}$ varv

$\Rightarrow$ p har två nollställen i hhp

$\gamma : |z| = 2$

$f(z) = z^5 \qquad g(z) = 2z^3 + z^2 + z + 4$

$|f|\Big|_\gamma = 2^5 = 32$

$|g|\Big|_\gamma \le |2z^3| + |z^2| + |z| + 4 \Big|_\gamma =$

$= 2|z|^3 + |z|^2 + |z| + 4 \Big|_\gamma = 16 + 4 + 2 + 4 = 26$

$|g| < |f|$ på γ

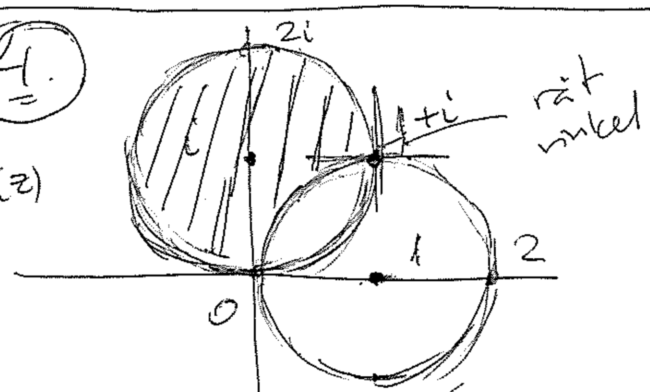
f, g analytiska på och innanför γ

$\Rightarrow f$ och $f + g = p$ har lika många nollställen innanför γ, enligt Rouché's sats $\Rightarrow p$ har 5 nollställen i $\{|z| < 2\}$, d.v.s. alla nollställen $\in \{|z| < 2\}$

$p(z) = (z - z_1) \dots (z - z_5) = z^5 + \dots + 4$

$\Rightarrow -z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 = 4 \Rightarrow$ minst ett av nollställena har belopp > 1.

4.



$1+i \to 0$

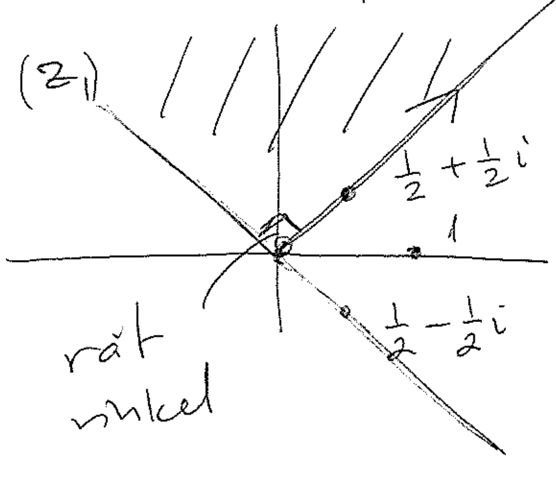
$0 \to \infty$

$$z_1 = \frac{z - (1+i)}{z}$$

$\infty \to 1$

$2i \to \dfrac{-1+i}{2i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$2 \to \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$

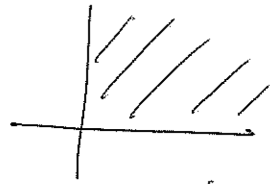


$(1+i, 2i, 0)$

$\to (0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \infty)$

området på vänster sida

$$z_2 = z_1 e^{-i\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-1}{\sqrt{2}} i\right) z_1$$



$$w = z_2^2 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_1^2 = -i\left(\frac{z-(1+i)}{z}\right)^2$$

---

5. Beteckna $M = \max_{\{|z| \le 1\}} |f|$.

Sätt $F = \dfrac{f}{M+1}$ (räcker egentligen med M)

F uppfyller villkoren i Schwarz lemma

$\Rightarrow |F(z)| \le |z| \quad \forall z : |z| < 1$

$\Rightarrow |F(z^k)| \le |z|^k \quad \forall z : |z| < 1$

$(|z| < 1 \Rightarrow |z^k| < 1)$

$\Rightarrow$ serien $F(z) + \ldots + F(z^n) + \ldots$

konvergent enligt jämförelsekriteriet i $\{|z|<1\}$

$F(z^k) = \dfrac{1}{M+1} f(z^k)$

ändrar inte konvergensen

$\Rightarrow f(z) + \ldots + f(z^n) + \ldots$

konvergent i $\{|z|<1\}$

---

6. Välj $(z_1, z_2, z_3) \xrightarrow{T} (w_1, w_2, w_3)$

alla z_k reella

Antag T: Re-axeln$_z \to$ Re-axeln$_w$

$\Rightarrow$ alla w_k reella

LES $a z_k + b = w_k z_k c + w_k d \qquad k = 1, 2, 3$

obekanta a, b, c, d; reella koefficienter

$\Rightarrow \exists$ reell lösning

Omvänt: uppenbart.