MVE025 (samt TMA252, TMA253)
Matematik Chalmers
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2008-08-20, kl. 8.30 - 12.30.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Marcus Warfheimer, tel. 0762-721860, besöker salen ca 9.30 och 11.30.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Bestäm alla Laurentutvecklingar funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$$

har kring $z_0 = 2$. Precisera var de enskilda utvecklingarna gäller. (Du behöver inte ange en eventuell Taylorutveckling kring punkten.) (5p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos ax}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (8p)

(b) Beräkna $\hat{f}$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 5x^2 + 4}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Betrakta ekvationen $z^7 + 2z + 1 = 0$.
(a) Bestäm antalet rötter i högra halvplanet. (3p)
(b) Bestäm antalet reella rötter och lokalisera dem. (2p)
(c) Bestäm en cirkelring som innehåller exakt sex av ekvationens rötter. (3p)

4. Se nästa sida.

5. Kan man välja $a, b \in \mathbb{C}$ (ej båda lika med 0) så att polynomet $P(z)$ uppfyller $|P(z)| \le 1$ för $|z| = 1$, om
(a) $P(z) = 2z^3 + az + b$;
(b) $P(z) = \frac{1}{2}z^3 + az + b$?
Om ja, ange möjliga a och b; om nej, förklara varför. (6p)

6. Ange ett obegränsat område D i det komplexa talplanet sådant att funktionen $\sin z$ är begränsad i D. Motivera! (5p)

7. Formulera Cauchy-Goursats sats. Bevisa Cauchys integralsats. (5p)

8. Formulera och bevisa satsen om en analytisk funktions Taylorutveckling (= potensserieutveckling) kring en punkt z_0 (du kan ta för givet att man får derivera / integrera potensserier termvis). (5p)

MVE025, TMA253: 4. Avbilda konformt det övre halvplanet på området $\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{|z - i| > 1\}$. (6p)

TMA252: 4. Använd z-transformen för att bestämma den (reella) allmänna lösningen till differensekvationen

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 5y_n = n^2 + 1, \quad n \geq 0. \qquad \text{(6p)}$$

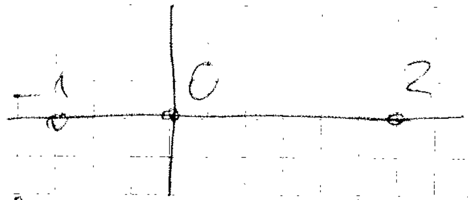
/JM

Komplex matematisk analys F/Kf

TMA252, TMA253, MVE025

Lösningar 20/8-08

(1) Singulära pkter (enkelpoler) i $z_1 = -1$ och $z_2 = 0$



$\Rightarrow$ f har Taylorutveckling kring 2 med konvergensradie 2 (i $|z-2|<2$), samt Laurentutvecklingar i

D_1 : $2 < |z-2| < 3$

och D_2 : $|z-2| > 3$

D_1 : $$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} =$$

$$= \frac{1}{2+(z-2)} + \frac{-1}{3+(z-2)} =$$

$$= \frac{1}{z-2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{z-2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{z-2}\left(1 - \frac{2}{z-2} + \frac{4}{(z-2)^2} - \dots + \frac{(-2)^n}{(z-2)^n} + \dots\right) -$$

$$- \frac{1}{3}\left(1 - \frac{z-2}{3} + \frac{(z-2)^2}{9} - \dots + (-1)^n \frac{(z-2)^n}{3^n} + \dots\right)$$

$$\left(\left|\frac{2}{z-2}\right| < 1 , \quad \left|\frac{z-2}{3}\right| < 1 \right)$$

D_2 : $|z-2| > 3$

$$f(z) = \frac{1}{z-2}\left(1 - \frac{2}{z-2} + \dots + \frac{(-2)^n}{(z-2)^n} + \dots\right)$$

$$- \frac{1}{z-2}\left(1 - \frac{3}{z-2} + \dots + \frac{(-3)^n}{(z-2)^n} + \dots\right)$$

$$\left(\left|\frac{2}{z-2}\right| < 1 \,,\ \left|\frac{3}{z-2}\right| < 1 \right)$$

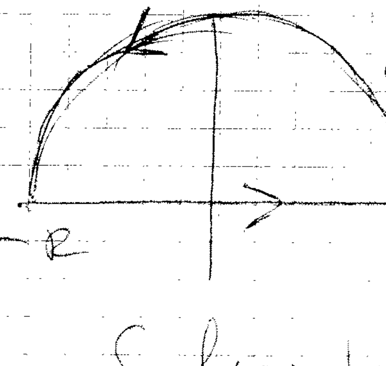
---

2 (a) cos jämn $\Rightarrow$ $\cos ax = \cos|a|x$

$\Rightarrow$ vi kan räkna med $|a| \geq 0$ istället för a

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{x^2\cos ax}{x^4+5x^2+4}}_{\text{jämn integrand}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos ax}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

Sätt $f(z) = \dfrac{z^2 e^{i|a|z}}{z^4+5z^2+4}$



C_R $\quad \Gamma_R = C_R \cup [-R, R]$

(R tillräckligt stort)

$R > 2$ - se nästa sida

$$\underbrace{\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz}\ = 2\pi i \sum_{\text{öhp}} \operatorname{Res} f$$

$$= \int_{-R}^{R} \frac{x^2\cos|a|x}{x^4+5x^2+4}\,dx + \underbrace{i\int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{x^2\sin|a|x}{x^4+5x^2+4}}_{\text{udda}}\,dx}_{=0} +$$

$$+ \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{R^2 e^{2i\theta} e^{i|a|Re^{i\theta}}}{R^4e^{4i\theta}+5R^2e^{2i\theta}+4} R i e^{i\theta}\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{R^3}{R^4-5R^2-4}\left|\int_0^{\pi} \underbrace{e^{i|a|R\cos\theta}}_{|\ |=1} \cdot \underbrace{e^{-|a|R\sin\theta}}_{|\ |\leq 1} d\theta\right|$$

ty $|a| \geq 0$
$R \geq 0$
$\sin\theta \geq 0$ i $[0,\pi]$

$$\leq \frac{\pi R^3}{R^4-5R^2-4} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

f:s singulära pkter: $z^4+5z^2+4=0$

$$z^4+5z^2+4 = (z^2+1)(z^2+4) =$$
$$= (z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)$$

$\Rightarrow$ f har enkelpoler i $\underline{i}$ och $\underline{2i}$
(vi behöver bara singulariteterna i öhp)

$$\operatorname*{Res}_{i} f = \left.\frac{z^{\cancel{2}} e^{i|a|z}}{4z^{\cancel{3}2}+10\cancel{z}}\right|_{z=i} = \frac{i e^{-|a|}}{-4+10}$$

$$\operatorname*{Res}_{2i} f = \left.\frac{z^{\cancel{2}} e^{i|a|z}}{4z^{\cancel{3}2}+10\cancel{z}}\right|_{z=2i} = \frac{2i e^{-2|a|}}{-16+10}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\cos|a|x}{x^4+5x^2+4}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x) =$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{ie^{-|a|}}{6} + \frac{2ie^{-2|a|}}{-6}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(2e^{-2|a|} - e^{-|a|}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos ax}{x^4+5x^2+4}\,dx = \frac{\pi}{6}\left(2e^{-2|a|} - e^{-|a|}\right)$$ 4

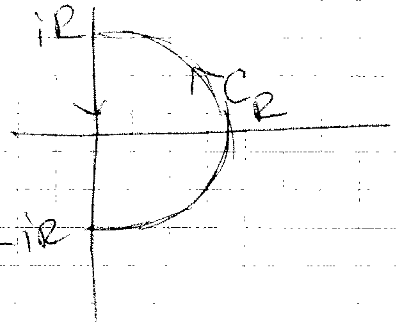
(b) $$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^{-ix\xi}}{x^4+5x^2+4}\,dx$$

Sätt $a = -\xi$ och använd (a):

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\pi}{3}\left(2e^{-2|\xi|} - e^{-|\xi|}\right)$$

---

3. (a)



$f(z) = z^7 + 2z + 1$

f(sträckan på Im-axeln):

$$z = iy, \quad -R \le y \le R$$

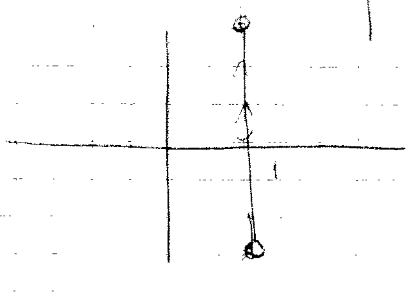
$$f(iy) = -iy^7 + 2iy + 1 =$$
$$= iy(2 - y^6) + 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} f(iy) = 1 \quad \forall y$$

$$\operatorname*{Im}_{y=R} f(iy) = -R^7 + 2R \ll 0$$

$$\operatorname*{Im}_{y=-R} f(iy) = R^7 - 2R \gg 0$$

$\Rightarrow$ börjar på linjen $x=1$ långt ner i IV kv., rör sig på linjen, slutar högt upp i I kv.



5

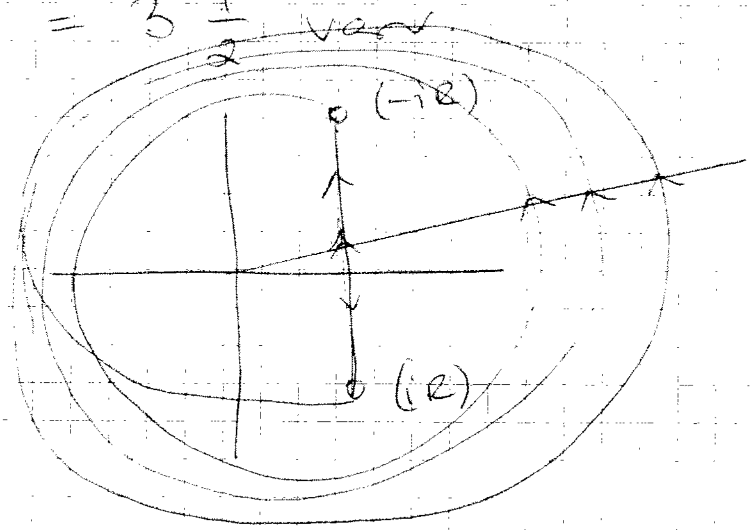
$C_R: \ z = Re^{i\theta} \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$f(Re^{i\theta}) = R^7 e^{7i\theta} \Big(1 + \underbrace{\frac{\dots}{R^6}}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ R\to\infty}} \Big)$$

$\Rightarrow$ uttrycket inom parentes bidrar inte till ändringen i arg för stora R

den första faktorn: en ökning π i θ resulterar i ökning 7π

$7\pi = 3\frac{1}{2}$ varv



$\Rightarrow$ 4 rötter i hhp

(b) udda gradtal $\Rightarrow$ $\exists$ minst en reell rot

$f(-\infty) < 0, \quad f(0) > 0 \Rightarrow \exists$ negativ —"—

$f(-1) = -1 - 2 + 1 < 0 \Rightarrow \exists$ rot i $(-1, 0)$

$f(-\frac{1}{2}) = -\ \dots - 1 + 1 < 0 \Rightarrow \exists$ rot i $(-\frac{1}{2}, 0)$

$f'(x) = 7x^6 + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ strängt växande i $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ har endast ett reellt nollställe och det ligger i $(-\frac{1}{2}, 0)$

6

(c) Rouchés sats

$|z| = 2 \quad : \quad F(z) = z^7$

$G(z) = 2z+1$

$|G(z)| = |2z+1| \leq 2|z|+1 = 5 < 2^7 = |F(z)|$

$\Rightarrow$ alla 7 rötterna ligger i $\{|z|<2\}$

$|z| = \frac{3}{4} \qquad F(z) = 2z \qquad |F| = \frac{3}{2}$

$G(z) = z^7+1$

$|G(z)| = |z^7+1| \leq |z|^7+1 = \left(\frac{3}{4}\right)^7 + 1 <$

$< \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1 = \frac{27}{64} + 1 < \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = |F(z)|$

$\Rightarrow$ exakt en rot ligger i $\{|z| < \frac{3}{4}\}$

inga rötter på de två cirklarna

$\Rightarrow$ exakt 6 rötter ligger i $\{\frac{3}{4} < |z| < 2\}$

---

5. (a) nej (b) ja

(b) tag $a = b = \frac{1}{4}$

på $|z| = 1$:

$|P(z)| \leq \frac{1}{2} \underbrace{|z|^3}_{=1} + \frac{1}{4} \underbrace{|z|}_{=1} + \frac{1}{4} = 1$

(a) P sammanfaller med sin egen Taylorutveckling kring 0. Antag $|P|\Big|_{|z|=1} \leq 1$

$a_3 \,(\stackrel{?}{=} 2) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} \frac{P(z)}{z^4}\, dz$

$|a_3| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{1} \cdot 2\pi = 1 \Rightarrow a_3$ kan ej vara 2

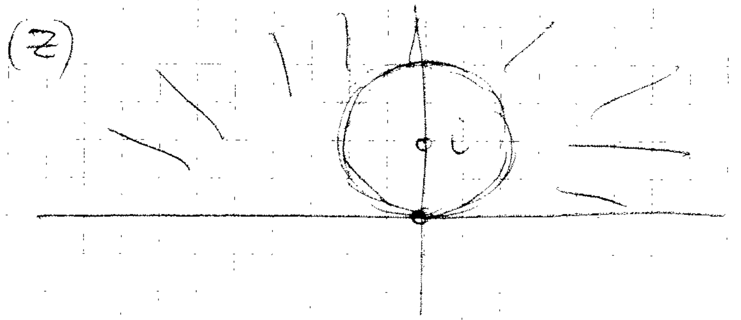
(6) $|\sin z| = \left|\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right| =$

$$= \left|\frac{e^{ix-y}-e^{ix+y}}{2i}\right| \le \frac{1\cdot e^{-y}+1\cdot e^{y}}{2} =$$

$$= \cosh y$$

$\Rightarrow$ $\sin z$ begränsad i $\{z=x+iy : |y|\le 1, x\in\mathbb{R}\}$
(exempelvis)

(4')



(omvänt först)

$z_1 = \dfrac{1}{z}$ $\quad 0 \to \infty$

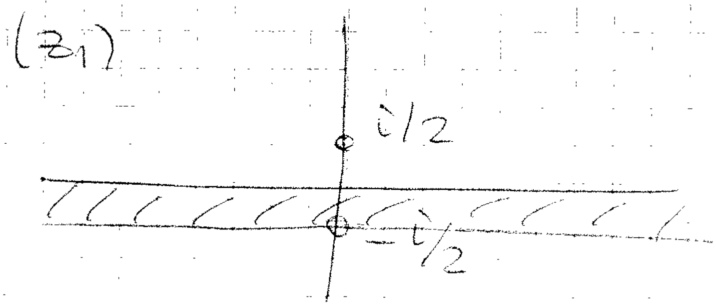
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

$|z-i|=1 \to$ rät linje $\parallel$ Re-axeln genom

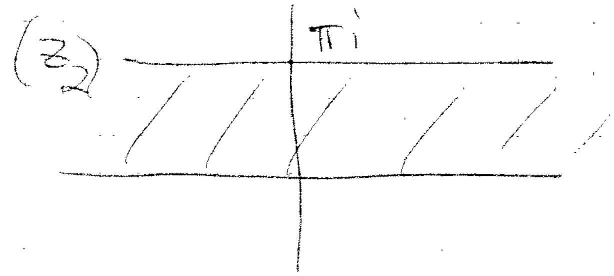
$2i \to \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$

$\left(-2i \to \dfrac{i}{2}\right) \notin$ området

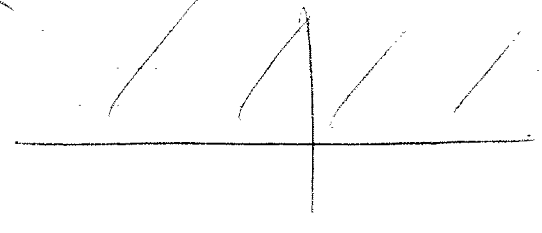
$\Rightarrow$



$z_2 = -2\pi z_1$



$w = e^{z_2}$



Omvändningen:

$$z_1 = \operatorname{Log} z$$

$$z_2 = -\frac{z_1}{2\pi}$$

$$w = \frac{1}{z_2}$$

4" ekvationen $\Rightarrow z^2 Y - z^2 y_0 - z y_1 -$

$$- 4zY + zy_0 + 5Y =$$

$$= \frac{(z+1)z}{(z-1)^3} + \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + \frac{z}{z-1} + z^2 y_0 - z y_0 + z y_1}{\underbrace{z^2 - 4z + 5}_{=(z-2)^2+1}}$$

y_0, y_1 : godtyckliga reella konstanter

Återstår partialbråksuppdelning och transformation tillbaka via Laurentutveckling eller tabell.