MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2007-01-16, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvakterna.
Telefonvakt: Kateryna Iushchenko, tel. 0762-721860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Ange en analytisk funktion $f = f(z)$, vars realdel är $u(x, y) = e^x(x \cos y - y \sin y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$. (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{(x^2+4)^2}\, dx.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (6p)

(b) Beräkna $\hat{f}(-1)$, där $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ är Fouriertransformen av funktionen

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+4)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2p)$$

3. Bestäm antalet nollställen till polynomet $P(z) = z^6 + 6z + 10$ i första kvadranten. (4p) Gör så mycket du kan för att ytterligare lokalisera nollställena (d.v.s. tala om vilka kvadranter, cirkelringar etc de ligger i; du får använda både reell och komplex analys). (max 4p)

4. Se nästa sida.

5. Funktionen f är analytisk i enhetsskivan och uppfyller $|f(z)| \leq 1 \ \forall z : |z| < 1$. Visa att $|f'(0)| \leq 1$. (7p)

6. Man kan härleda Laplacetransformen av e^{ct} på följande sätt: $f(t) = e^{ct}$ är den enda lösningen till begynnelsevärdesproblemet $f' - cf = 0$, $f(0) = 1$. Om vi Laplacetransformerar problemet får vi $sF(s) - f(0) - cF(s) = 0$, vilket ger $F(s) = \frac{1}{s-c}$. Imitera detta förfarande för att härleda Laplacetransformen av $\cos ct$. (5p)

7. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats. (5p)

MVE025 (F, “nya” kursen) 4. Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (6p)

TMA253 (Kf, “nya” kursen) 4. Funktionen f är analytisk i området D och sådan att $v \equiv u^2$ i D, där u, v är funktionens real- resp. imaginärdel. Visa att f är konstant i D. (6p)

TMA252 (F & Kf, “gamla” kursen) 4. Funktionen f är analytisk i området D och sådan att $v \equiv u^2$ i D, där u, v är funktionens real- resp. imaginärdel. Visa att f är konstant i D. (6p)

/JM