MVE025 / TMA253 (samt "gamla kursen" TMA252)
Matematik CTH
Tentamensskrivning i Komplex matematisk analys F / Kf

Datum: 2006-01-10, kl. 14.00 - 18.00.
Hjälpmedel: Endast formelblad som delas ut av tentamensvak terna.
Telefonvakt: Johan Jansson / Peter Lindroth, tel. 0762-721 860, besöker salen ca 15.00 och 17.00.
OBS! Linje, inskrivningsår och personnummer skall anges på skrivningsomslaget.

==

1. Finn en funktion $f = f(z)$ som är analytisk i det övre halvplanet och vars imaginärdel är $v(x,y) = \ln((x-1)^2 + y^2)$. (6p)

2.(a) Beräkna med hjälp av residykalkyl

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Utför de nödvändiga uppskattningarna. (7p)

(b) Beräkna Fouriertransformen $\hat{f} = \hat{f}(\xi)$ av funktionen

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{(2p)}$$

3. Ange två Laurentutvecklingar kring $z_0 = -2i$ för funktionen

$$f(z) = \frac{z}{z^2+4}\,.$$

Redogör noga för var de gäller. (7p)

4. Se nästa sida.

5. Betrakta funktionen

$$f_\alpha(z) = \alpha \begin{vmatrix} e^{\alpha\overline{\alpha}} & e^{\alpha\overline{z}} \\ e^{\overline{\alpha}z} & e^{z\overline{z}} \end{vmatrix}.$$

Avgör för vilka $\alpha \in \mathbb{C}$ funktionen f_α är analytisk i $\mathbb{C}$. Motivera! (6p)

6. Härled formler 14 och 15 i Laplacetransformtabellen (Lapla cetransformen av sin och cos). Du får inte använda formler i tabellen vid härle dningen, utan måste använda definitionen. (5p)

7. Formulera och bevisa Moreras sats. (5p)

8. Formulera och bevisa Rouchés sats. (5p)

MVE025 (F, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på enhetsskivan området i övre halvplanet mellan realaxeln och den cirkel som går genom pun kterna -2 och 2, har sin medelpunkt i det nedre halvplanet och bildar vinkel $\frac{\pi}{6}$ med realaxeln. (6p)

TMA253 (Kf, "nya" kursen) 4. Avbilda konformt på enhetsskivan området i övre halvplanet mellan realaxeln och den cirkel som går geno m punkterna -2 och 2, har sin medelpunkt i det nedre halvplanet och bildar vinkel $\frac{\pi}{6}$ med realaxeln. (6p)

TMA252 (F & Kf, "gamla" kursen) 4. Beräkna integralen

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^5 + 3z + 5}\,, \qquad \gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

(Kurvan γ genomlöps ett varv moturs.). (6p)

/JM

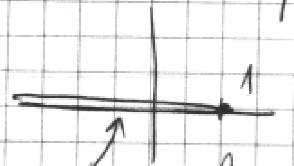
Komplex matematisk analys F/Kf
(MVE025, TMA253, TMA252)
Lösningar 10/1 – 06

1. $\ln\left((x-1)^2+y^2\right) = \ln|z-1|^2 =$

$= 2\ln|z-1|$

$\mathrm{Log}\,(z-1) = \ln|z-1| + i\,\mathrm{Arg}\,(z-1)$

$2i\,\mathrm{Log}(z-1) = -2\,\mathrm{Arg}(z-1) + 2i\ln|z-1|$



snitt för $\mathrm{Log}(z-1)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\mathrm{Log}\,(z-1) \text{ analytisk i öhp} \\ \mathrm{Im}\,\mathrm{Log}\,(z-1) = v(x,y) = \\ = \ln\left((x-1)^2+y^2\right)\end{array}}$$

m.h.a. (CR): $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

$u(x,y) = \displaystyle\int \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \varphi(y) =$

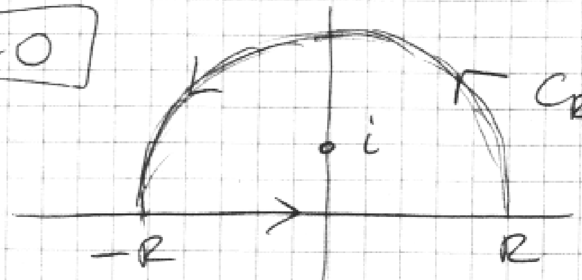
$= \dfrac{2}{y}\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{y}\right)^2+1} + \varphi(y) = \underbrace{-2\,\mathrm{arccot}\,\frac{x-1}{y}}_{=-2\,\mathrm{Arg}\,(z-1)} + \varphi(y)$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \ldots$ (φ bestäms)

OBS! arccot, ty <u>öhp</u>

2.(a) Betrakta $f(z) = \dfrac{z e^{iaz}}{(z^2+1)^2}$ $\triangle 2$

$\boxed{a \geq 0}$



$\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$

$R > 1$

$C_R: z = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$

dubbelpol i i; inga andra singulariteter

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f =$$

$$= 2\pi i \left(\cancel{(z-i)^2} \frac{z e^{iaz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2} \right)' \Bigg|_{z=i} =$$

$$= 2\pi i \frac{(e^{iaz} + z i a e^{iaz})(z+i)^2 - 2(z+i) z e^{iaz}}{(z+i)^4} \Bigg|_{z=i} =$$

$$= \cancel{2}\pi i \frac{(\cancel{e^{-a}} - a e^{-a})(-\cancel{4}) + \cancel{4 e^{-a}}}{\cancel{16}\ 2} = \frac{\pi a e^{-a}}{2} i$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz = i \int_{-R}^{R} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz$$

$$\left(\text{ty } \int_{-R}^{R} \underbrace{\frac{x \cos ax}{(x^2+1)^2}}_{\text{udda}}\,dx = 0 \right)$$

≤ 1 ty $a \geq 0$, $R > 0$, $\sin\theta \geq 0$ i $[0, \pi]$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^{\pi} \frac{Re^{i\theta} e^{iaR\cos\theta} e^{-aR\sin\theta}}{(R^2 e^{2i\theta} + 1)^2} Rie^{i\theta}\,d\theta \right|$$

$$\leq \frac{R}{(R^2-1)^2} \cdot R \cdot \pi \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi a e^{-a}}{2} \quad \text{för } a \geq 0$$

$\boxed{a \le 0}$ antingen motsvarande kalkyl i nhp, eller

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(-a)x}{(x^2+1)^2}\,dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin|a|x}{(x^2+1)^2}\,dx = -\frac{\pi|a|e^{-|a|}}{2}$$

$-|a| = a$ för $a \le 0$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin ax}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi a e^{-|a|}}{2} \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

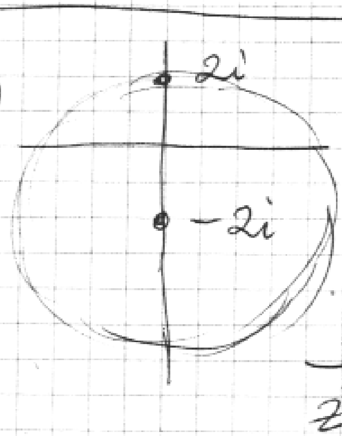
(b) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2}$

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2+1)^2} e^{-ix\xi}\,dx = i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(-\xi)x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

= integralen från (a) med $a = -\xi$ och faktor i

$$\Rightarrow \hat{f}(\xi) = -\frac{\pi i \xi e^{-|\xi|}}{2}$$

3.



en Laurentutveckling i $0 < |z+2i| < 4$ och en i $|z+2i| > 4$

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{A}{z-2i} + \frac{B}{z+2i}$$

4

$$z = A(z+2i) + B(z-2i)$$

$z = 2i$: $\quad 2i = A \cdot 4i \quad A = \frac{1}{2}$

$z = -2i$: $\quad -2i = B \cdot (-4i) \quad B = \frac{1}{2}$

$0 < |z+2i| < 4$ (i potenser av $z+2i$)

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} =$$

klart

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z+2i)-4i} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)}{4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z+2i}{4i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z+2i} + \frac{i}{8}\left(1 + \frac{1}{4i}(z+2i) - \frac{1}{16}(z+2i)^2 + \right.$$

$$\left. + \ldots\right) \quad ; \quad \text{konvergens} : \left|\frac{z+2i}{4i}\right| < 1$$

ok

$|z+2i| > 4$

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z+2i)-4i} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2(z+2i)}\cdot\frac{1}{1-\frac{4i}{z+2i}} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+2i}\left(1 + \frac{4i}{z+2i} - \frac{16}{(z+2i)^2} + \ldots\right)$$

konvergens : $\left|\frac{4i}{z+2i}\right| < 1$ ok

5. $f_0(z) \equiv 0$ uppenbarligen analytisk $\forall z \in \mathbb{C}$

$\alpha \neq 0$: f_α analytisk $\Longleftrightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ analytisk

$$\frac{1}{\alpha} f_\alpha(z) = \begin{vmatrix} e^{\alpha\bar{\alpha}} & e^{\alpha\bar{z}} \\ e^{\bar{\alpha}z} & e^{z\bar{z}} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{|\alpha|^2} \cdot e^{|z|^2} - e^{\alpha\bar{z}} \cdot e^{\bar{\alpha}z} = e^{|\alpha|^2+|z|^2} -$$

$$- e^{\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z} = e^{|\alpha|^2+|z|^2} - e^{2\operatorname{Re}(\alpha\bar{z})} \in \mathbb{R}$$

$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \alpha$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ analytisk omm konstant

Men: $\frac{1}{\alpha} f_\alpha(\alpha) = e^{2|\alpha|^2} - e^{2\operatorname{Re}|\alpha|^2} = 0$

$\frac{1}{\alpha} f_\alpha(0) = e^{|\alpha|^2} - 1 \neq 0$ ty $\alpha \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\alpha} f_\alpha$ ej konstant

$\Rightarrow f_\alpha$ analytisk (i $\mathbb{C}$) endast för $\alpha = 0$

$\boxed{4 \text{ ("gammal")}}$ Betrakta $z^5 + 3z + 5 = 0$

Sätt $f(z) = 5$; $g(z) = z^5 + 3z$

På $|z| = 1$:

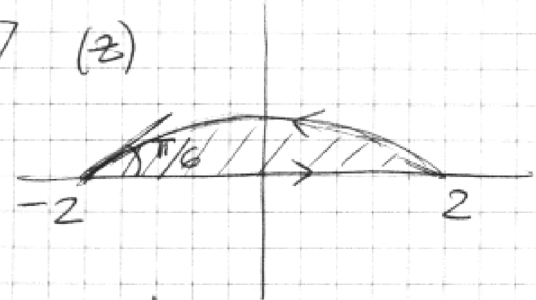
$|f(z)| = 5$; $|g(z)| \leq |z^5| + 3|z| = 4 < 5$

$\Rightarrow f$ och $f+g$ har (enligt Rouchés sats) lika många nollställen innanför $|z| = 1$, d.v.s. 0 st.; inga på $|z| = 1$

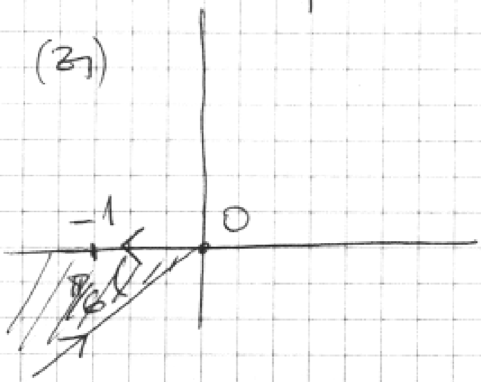
$\Rightarrow \dfrac{1}{z^5+3z+5}$ analytisk på och innanför γ

$\Rightarrow \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^5+3z+5} = 0$ enligt Cauchys sats.

$\boxed{4. \text{"ny"}}$ (6)



$$z_1 = \frac{z+2}{z-2}$$



$-2 \to 0$

$2 \to \infty$

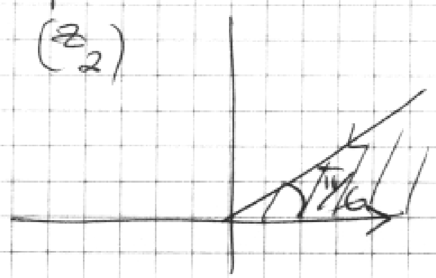
$\mathrm{Re} \to \mathrm{Re}$

$0 \to -1$

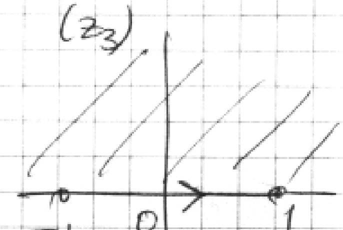
$\{-2, 0, 2\} \to \{0, -1, \infty\}$.

"vänsterregeln" & konformitet ger vinkeln

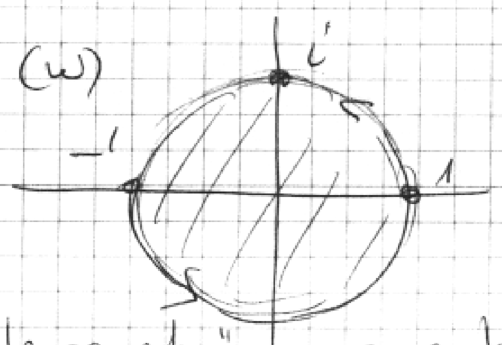
$z_2 = -z_1$



$z_3 = z_2^6$



$$w = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}, \text{ där}$$



$-1 \to 1$

$0 \to i$

$1 \to -1$

"vänsterregeln" ger enhetsskivan

$-a + b = -c + d$

$b = id$

$a + b = -c - d$

välj $c = 1 \Rightarrow b = -1,\ d = i,$

$a = -i$

$$w = \frac{-iz_3 - 1}{z_3 + i}$$