Komplex Analys

Föreläsning 3/8

f <u>holomorf</u> om $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z)$ $\forall z$

Ex: $z^3 - iz + 3$, e^z, $\sin z$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$, ... ej x, y

Integraler:

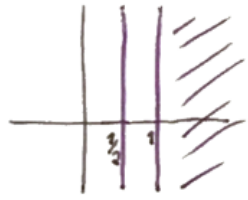
- om f holomorf: $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$
- om f singulär i enstaka punkter $\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$ kan $\int_\gamma f(z)dz$ beräknas mha residykalkyl

Låter oss även beräkna reella integraler, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx$, som i sin tur dyker upp i Fourieranalys.

Tillämpningar: röntgenkristallografi (DNA), kvantmekanik, ...

Riemannhypotesen: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ kan vara noll på linjen

bygger på identitetsprincipen.



Komplexa tal

$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$, i nytt tal: $i^2 = -1$

$(x+iy) + (a+ib) = (x+a) + i(y+b) \in \mathbb{C}$

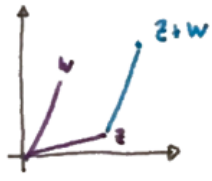
$(x+iy)(a+ib) = (xa - yb) + i(xb + ya) \in \mathbb{C}$

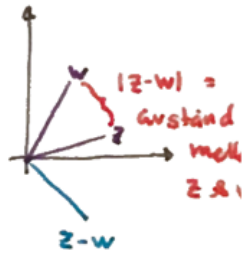
Vanliga räkneregler gäller (Prop 1.

Komplexa talplanet

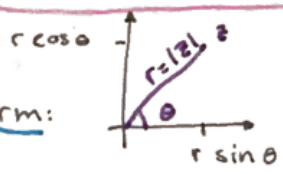
$x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (absolutbelopp)





Polär form:



$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$\arg z = \theta$ endast bestämt upp till multipel av 2π

→

$$w = s(\cos t + i \sin t)$$

$$zw = rs(\cos\theta\cos t - \sin\theta\sin t + i(\cos\theta\sin t + \sin\theta\cos t)) =$$

$$= rs(\cos(\theta + t) + i\sin(\theta + t))$$

$$\Rightarrow \quad |zw| = |z||w|$$

$$\arg(zw) = \arg z + \arg w$$

<u>Definition:</u> $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ får $e^{i\theta}e^{it} = e^{i(\theta+t)}$

<u>De Moivre:</u> $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

<u>Bevis:</u> $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ $\square$

$z = re^{i\theta}$, $r = |z|$, $\theta = \arg z$ Kallas polär form

<u>Exempel:</u> Skriv $2-2i$ på polär form

<u>Lösning:</u> $|2-2i| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(2-2i) = \arctan\left(\frac{-2}{2}\right) = -\pi/4$

$$\Rightarrow \quad 2-2i = 2\sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

Komplexa konjugatet

$z = x+iy = re^{i\theta}$, $\bar{z} = x-iy = re^{-i\theta}$

<u>Prop 1.5:</u>

a) $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

b) $\overline{zw} = \bar{z}\cdot\bar{w}$

c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

d) $\bar{\bar{z}} = z$

e) $|\bar{z}| = |z|$

f) $|z|^2 = z\cdot\bar{z}$

g) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

h) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

<u>visar h):</u> $\frac{1}{2i}(z-\bar{z}) = \frac{1}{2i}(x+iy-(x-iy)) = \frac{1}{2i}(2iy) = y = \operatorname{Im} z$ $\square$

<u>Notera:</u> $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Olikheter:

Obs!! $z < w$ meningslöst för $z, w \in \mathbb{C}$

däremot $|z| < |w|$ har mening

Notera: $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z| \quad (|x| \leq \sqrt{x^2+y^2})$

$|\mathrm{Im}\, z| \leq |z| \quad (|y| \leq \sqrt{x^2+y^2})$

Triangelolikheten: (Prop 1.6)

$|z+w| \leq |z| + |w|$ obs: $|zw| = |z||w|$

Bevis: $VL^2 = (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} =$

$= |z|^2 + |w|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\bar{w}) \leq$

$\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2 =$

$= HL^2 \quad \square$

obs !! $|z-w| \leq |z| + |-w| = |z| + |w|$

Omvända triangelolikheten (Kor. 1.7b)

$|z \pm w| \geq |z| - |w|$

Bevis: övning 1.25

Topologi i planet:

$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\} \quad a \in \mathbb{C},\ r \in \mathbb{R}$

Låt nu $G \subseteq \mathbb{C}$ mängd

- a inre punkt i G om $\exists r > 0$ s.a. $D(a,r) \subseteq G$
- b yttre punkt om $\exists r > 0$ s.a. $D(b,r) \subseteq G^c$ $(G^c = \mathbb{C} \setminus G)$
- om c är varken inre eller yttre så är c en randpunkt,

  $c \in \partial G$ ← rand till G

- G öppen om alla punkter $a \in G$ är inre punkter

→

- G sluten om alla punkter $b \in G^c$ är yttre punkter.
- G kompakt om sluten och begränsad dvs $\exists R > 0 : G \subseteq D(0,R)$

Exempel: $D(a,r)$ öppen

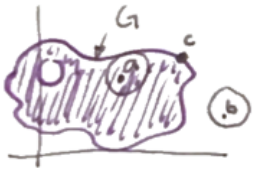
$\bar{D}(a,r) = \{ z \cdot |z-a| \leq r \}$ (sluten & kompakt)

Föreläsning 4/9

Repetition:

Topologi i planet

$G \subseteq \mathbb{C}$



- a inre punkt i G om $\exists r > 0$ s.a. $D(a,r) \subseteq G$
- b yttre punkt till G om $\exists r > 0$ s.a. $D(b,r) \subseteq G^c$
- c randpunkt till G om varken inre eller yttre, $c \in \partial G$
- G öppen om $\forall a \in G$ är inre
- G sluten om $\forall b \in G^c$ är yttre
- G kompakt om sluten och begränsad dvs. $\exists R > 0$ s.a. $G \subseteq D(0,R)$

Exempel:
- $D(a,r)$ öppen
- $\bar{D}(a,r)$ $(\subseteq D(0,R))$ sluten, kompakt
- $C(a,r) = \{ z : |z-a| = r \}$ kompakt

- reella axeln, sluten, ej kompakt
- $A = \{ p + iq \,,\, p,q \in \mathbb{Q} \}$ varken öppen eller sluten $\partial A = \mathbb{C}$

Definition: En (parametriserad) kurva i G är en kontinuerlig funktion

$\gamma : [\alpha, \beta] \longrightarrow G \,,\; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Exempel: $\gamma(t) = a + re^{it} \,,\; t \in [0, 2\pi]$

dvs kurvan som parametriserar cirkeln $C(a,r)$.

Definition: En öppen mängd G är <u>sammanhängande</u> om för alla $z, w \in G$ det finns en kurva i G som förbinder dem.

G kallas då domän.

Exempel:  tex. $D(a,r)$ är sammanhängande

← ej sammanhängande

Sats: (25 PB, ej i Adams)

Om G är en domän och $f: G \to \mathbb{R}$ funktion s.a. $\nabla f = 0$, då är f konstant.

Bevis: Tag två punkter $z, w \in G$

Eftersom G är sammanhängande finns kurvan $\gamma: [0,1] \to G$ s.a. $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$. Kan välja γ glatt (antal gånger du kan derivera i detta fallet till vi att den är en gång deriverbar). Får $f \circ \gamma: [0,1] \to \mathbb{R}$,

$(f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0 \implies f \circ \gamma$ konstant,

dvs $f(z) = f \circ \gamma(0) = f \circ \gamma(1) = f(w) \implies f$ konstant $\square$

Komplexa funktioner

Definition: Låt $G \subseteq \mathbb{C}$. En komplex funktion är en funktion $f: G \to \mathbb{C}$.

Exempel:
- $f(z) = z^2$, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
- $g(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, $g: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$
- $h(z) = \operatorname{Re} z - 7i \cdot \operatorname{Im} z$, $h: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

Gränsvärden:

Definition: $\lim_{z \to z_0} f(z) = w$ om $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : 0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w| < \varepsilon$

Exempel: Existerar gränsvärdet $\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$? **svar: nej** $1 \neq -1$

Låt $z = x$ reellt, $\bar{z} = \bar{x} = x$ så $\lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \underline{1}$

Låt nu istället $z = iy$, dvs rent imaginärt $\bar{z} = \overline{iy} = -iy$, $\lim_{iy \to 0} \frac{-iy}{iy} = \underline{-1}$

Räkneregler för gränsvärden:

a) $\lim_{z \to z_0} (f(z) + c g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) + c \lim_{z \to z_0} g(z) \quad c \in \mathbb{C}$

b) $\lim_{z \to z_0} (f(z) g(z)) = \lim_{z \to z_0} f(z) \lim_{z \to z_0} g(z)$

c) $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)}$, om $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$

Kontinuitet:

Definition: $f: G \to \mathbb{C}$ är kontinuerlig i $z_0 \in G$ om $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Exempel: z^3, $\bar{z}$, $\operatorname{Re} z$, ...

Komplex deriverbarhet:

Definition: $f: G \to \mathbb{C}$ är komplext deriverbar i $z_0 \in G$ om

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \text{ existerar (obs! } h \in \mathbb{C})$$

Om G är öppen och f är komplext deriverbar i hela G, då sägs f vara holomorf i G.

Exempel: Låt $f(z) = z^n$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$. Visa att $f(z) = n z^{n-1}$

Lösning: $\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \frac{z^n + n z^{n-1} h + \ldots + h^n - z^n}{h} =$

$= n z + O(h) \to n z^{n-1}$

Exempel: $g(z) = \bar{z}$, är den holomorf?

Lösning: $\frac{g(z+h) + g(z)}{h} = \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$ har ej gränsvärde då $h \to 0$!

$\Rightarrow$ $\bar{z}$ ej komplext deriverbar någonstans, inte holomorf.

Cauchy-Riemanns ekvationer:

Sats (2.13):

Låt $G \subseteq \mathbb{C}$ öppen, $f: G \to \mathbb{C}$, $u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$

$(f = u + iv)$

a) Om f holomorf i G så uppfyller u,v Cauchy-Riemanns ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\[2ex] \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases} \quad \text{alt.} \quad \frac{df}{dx} = -i\frac{df}{dy}$$

b) Om $f \in C^1$ (har kont. partiella derivator) och u,v uppfyller CRs (Cauchy-Riemanns) ekvationer, då är f holomorf.

$\boxed{\text{Bevis: a)}}$ f holomorf i G enligt antagandet, så $f'(z_0)$ existerar

$$\forall z_0 \in G.\quad f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) + f(z_0)}{h} = \left[\text{låt } h = t + i0,\ z_0 = x_0 + iy_0\right] =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{df}{dx}(x_0,y_0) + i\frac{dv}{dx}(x_0,y_0) =$$

$$= \left[\text{Låt nu } h = 0 + is,\ z_0 = x_0 + iy_0\right] = \lim_{is \to 0} \frac{f(x_0, y_0+s) - f(x_0,y_0)}{is} \overset{\frac{1}{i} = -i}{=} -i\frac{df}{dy}(x_0,y_0)$$

$$= -i\left(\frac{du}{dy}(x_0,y_0) + i\frac{dv}{dy}(x_0,y_0)\right) = \frac{dv}{dy}(x_0,y_0) - i\frac{du}{dy}(x_0,y_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \left(= \operatorname{Re} f'\right) \\[2ex] \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \left(= -\operatorname{Im} f'\right) \end{cases} \quad \square$$

Exempel: $g(z) = \bar{z} = x - iy$, $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dx} = 1$, $\dfrac{dv}{dy} = -1$ $\Rightarrow$ u,v uppfyller ej CRs ekvationer $\overset{CR}{\Rightarrow}$ $\bar{z}$ ej holomorf

Föreläsning 5/9

Cauchy-Riemanns ekvation (Sats 2.13)

Låt $G \subseteq \mathbb{C}$, $f: G \to \mathbb{C}$, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

a) Om f hade holomorf i G så löser u, v CRs ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases} \quad \text{alt. } \frac{df}{dx} = -i\frac{df}{dy} \quad (= f')$$

b) Om $f \in C'$ (har kontinuerliga partiella derivator) och u, v löser CRs ekvationer, då är f holomorf i G.

Geometriskt:

Finns en youtube video på kurshemsidan som förklarar hur holomorf funkar.

Exempel: Antag att f är holomorf i $\mathbb{C}$ och $\operatorname{Re} f = x^2 - y^2$. Bestäm $\operatorname{Im} f$.

Lösning: Enligt CRs ekv. löser $u = \operatorname{Re} f$ och $v = \operatorname{Im} f$ ekv.

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases}$$

får $\dfrac{dv}{dy} = 2x$ $\quad \dfrac{dv}{dx} = 2y$ $\quad v = 2xy + g(x)$, $\dfrac{dv}{dx} = 2y$

$\Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow v = 2xy + c \quad (f(z) = z^2 + ic)$

Sats (2.3 PB, 12.64 Ad)

Om $f \in C'$, då är f differentierbar, dvs $f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0, y_0) =$

$$= \frac{df}{dx}(x,y)t + \frac{df}{dy}(x_0, y_0)s + O(\sqrt{t^2+s^2}).$$

$\longrightarrow$

$\boxed{\text{Bevis av CR del b):}}$ Finns på kursboken, behöver inte skriva detta bevis

Kommer visa att $\lim_{t+is \to 0} \frac{f(z_0+t+is)-f(z_0)}{t+is} = \frac{df}{dx}(z_0)$

Enligt antagandet är $f \in C'$, så speciellt differentierbar, dvs

$$f(z_0+t+is)-f(z_0) = \frac{df}{dx}(z_0)t + \frac{df}{dy}(z_0)s + o(|t+is|) = \left[\text{enligt ant. } \frac{df}{dy} = i\frac{df}{dx}\right]$$

$$= \frac{df}{dx}t + i\frac{df}{dx}s + o(|t+is|) = \frac{df}{dx}(t+is) + o(|t+is|)$$

$$\Rightarrow \frac{f(z_0+t+is)-f(z_0)}{t+is} = \frac{df}{dx}(z_0) + \frac{o(|t+is|)}{t+is} \xrightarrow[t+is\to 0]{} \frac{df}{dx}(z_0) \quad \square$$

Exempel: Visa att $e^z = e^x e^{iy}$ är holomorf i $\mathbb{C}$

Lösning: $\frac{d}{dx}e^z = e^x e^{iy} = e^z$ $\quad \frac{d}{dy}e^z = e^x \frac{d}{dy}(\cos y + i\sin y) = e^x(-\sin y + i\cos y)$

$$= ie^z = i\frac{d}{dx}e^z \quad ((e^z)' = e^z)$$

$\Rightarrow e^z \in C'$ och uppfyller CRs ekv. $\overset{\text{Sats}}{\Rightarrow}$ e^z holomorf

---

Sats 2.17 $\qquad \nabla u \equiv 0 \Leftrightarrow \nabla u = 0$

Om f holomorf i område (= domän, öppen sammanhängande)

och $f' \equiv 0$ då är f konstant.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Vi vet att $f' = \frac{df}{dx} = -i\frac{df}{dy}$ enligt CR

$\overset{\text{enl. ant.}}{\Rightarrow}$ $\frac{df}{dx} \equiv 0$ $\quad \frac{df}{dy} \equiv 0$, $\quad \Rightarrow \nabla u \equiv 0$, $\nabla v \equiv 0$

$\xRightarrow[\text{tidigare sats}]{\text{G område}}$ u, v konstanta, f konstant $\square$

Exempel: Antag att f holomorf i $\mathbb{C}$ och $\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} f$. Visa att f är konstant

Lösning: Låt $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$. har enligt antagandet $u = v$

CRs ekv. $\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{du}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dx} \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{du}{dx} = 0 = \frac{du}{dy}$ $\Rightarrow \nabla u = 0$ $\underset{\mathbb{C}\text{ område}}{\Rightarrow}$ u konstant

$\Rightarrow v$ konstant, f konstant.

Exempel på holomorfa funktioner:

- Polynom i z: $a_n z^n + \dots + a_0$, $a_i \in \mathbb{C}$
- Rationella funktioner: $\frac{p(z)}{q(z)}$ holomorf där $q \neq 0$
- $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad-bc \neq 0$ kallas Möbiusavbildningar
- Exponentialfunktioner: $e^z = e^x e^{iy}$
- Trigonometriska funktioner $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

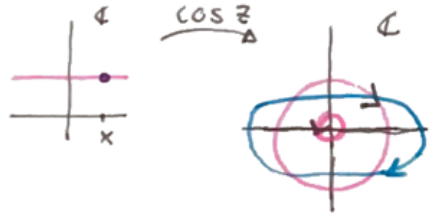
  Konsistent med $\sin x, \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{2i} = \operatorname{Im} e^{ix} = \sin x$

  (motsvarande med $\cos x$)

★ Många egenskaper samma som reella versioner (prop 3.17)

Exempel: $(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)' = \frac{\cancel{i}e^{iz} + \cancel{i}e^{iz}}{2\cancel{i}} = \cos z$

Exempel: Visa hur $\cos z$ avbildar linjen $\{\operatorname{Im} z = c\}$ i $\mathbb{C}$



$\cos(x+ic) = \frac{e^{i(x+ic)} + e^{-i(x+ic)}}{2} = \frac{e^{-c}}{2} e^{ix} + \frac{e^{c}}{2} e^{-ix}$

lilla och stora cirkeln ihop

$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

har $\sinh(iz) = i \sin z$, $\cosh(iz) = \cos z$

Komplexa logaritmen

Finns det en funktion $\log z$ som är invers till e^z, $e^{\log z} = z = \log e^z$?

Notera: $e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$

Kan ej definiera en riktig invers på hela $\mathbb{C}$.

Skriv $\log z = u + iv$, om nu $e^{\log z} = z$ så måste $e^{\log z} = e^{u+iv} =$

$= e^u e^{iv} = z \Rightarrow u = \ln|z|$, $v = \arg z$

Definition: Givet område $G \subseteq \mathbb{C}$ så säys varje kontinuerlig funktion $\operatorname{Log} z : G \to \mathbb{C}$ som uppfyller $e^{\operatorname{Log} z} = z$ vara en gren av den komplexa logaritmen $\log z$.

Den principella grenen definieras som $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$,

där $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$

$$e^{\ln|z| + i\operatorname{Arg} z} = e^{\ln|z|} e^{i\operatorname{Arg} z} = |z| e^{i\operatorname{Arg} z}$$

obs. $\operatorname{Log} z$ är diskontinuerlig längs $\mathbb{R}_{\leq 0}$

Storgruppsövning 7/9

$\boxed{1.2e}$ Bestäm real- och imaginärdel till $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Lösning: $z = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ $\quad |z| = \sqrt{\frac{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2}{2}} = 1$

$\theta = \operatorname{Arg} z \quad \cos\theta = -\frac{1}{2} \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = e^{i2\pi/3} \Rightarrow \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = z^3 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^3 = e^{2\pi i} = 1$

Svar: Realdel $= 1$, imaginärdel $= 0$

$\boxed{1.9}$ Hitta alla lösningar till ekvationen: $z^2 + 2z + (1-i) = 0$

Lösning: $z^2 + 2z + 1 - i = (z+1)^2 - i$

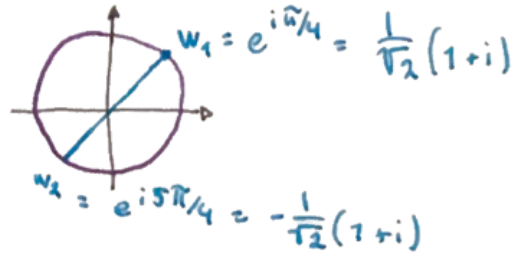
Låt $w = (z+1)^2$, lös $w^2 = i$, $w = re^{i\theta}$, får vi att

$w^2 = r^2 e^{i2\theta} = e^{i\pi/2}$

$\Rightarrow r = 1, \; 2\theta = \pi/2 + 2\pi k, \; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \theta_1 = \pi/4 \quad \theta_2 = 5\pi/4$

dvs.



Svar: $z = w - i = -1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$\boxed{1.10}$ Låt $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$. Visa att $|z|^2 + \mathrm{Re}(az) + b = 0$ är lösbar om.m $|a^2| \geq 4b$ och ekv. i säfall beskriver en cirkel.

Lösning: Ansats: ekv för cirkel med radie r centrerad i w ges av $|z-w|^2 = r^2$

Får $r^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 - z\bar{w} - \underbrace{\bar{z}w}_{= \overline{z\bar{w}}} =$

$= |z^2| + |w|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) = |z|^2 + |w|^2 + \mathrm{Re}(z(-2\bar{w}))$

$\Leftrightarrow |z|^2 + \mathrm{Re}(z\underbrace{(-2\bar{w})}_{a}) + \underbrace{|w|^2 - r^2}_{b} = 0$ $\quad r^2 \geq 0 \Leftrightarrow r^2 = |w|^2 - b = \underbrace{\frac{|a|^2}{4} - b}_{\geq 0}$

$\Rightarrow$ Samma som i antagandet. ($|a|^2 \geq 4b$)

(Blir då en cirkel med radie $\sqrt{\frac{|a^2|}{4} - b}$, centrerad i punkten $w = -\frac{\bar{a}}{2}$

De är omm för att man kan alltid gå från z, a, b till z, w, r och tillbaka.

$\boxed{1.27e}$ Beskriv mängden $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| + |z+1| < 3\}$

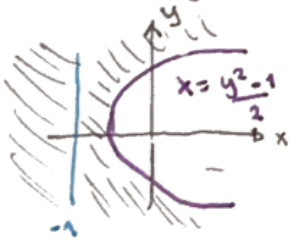
Lösning:

$|z-1| + |z+1| = 3$, beskriver ellips.

Får att A är det inre av en ellips med brännpunkter i ± 1.

$\boxed{1.27f}$ Beskriv mängden $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \mathrm{Re}\, z + 1\}$

Lösning: $z = x + iy$, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $|z| \geq \mathrm{Re}\, z + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq x+1$



Fall 1: $x \leq -1$ olikhet uppfylld

Fall 2: $x > -1$ Både VL och HL ≥ 0, så $\sqrt{x^2+y^2} \geq x+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow y^2 \geq 2x+1$

Likhet gäller då $x = \frac{y^2-1}{2}$ $\quad$ Svar: allt till vänster om grafen $x = \frac{y^2-1}{2}$ + grafen

$\boxed{2.19}$ Visa att om f holomorf i område G och $v = \operatorname{Im} f \equiv 0$ då är f konstant.

Lösning: Låt $u = \operatorname{Re} f$. Enligt sats så uppfyller u, v CRs ekvationer:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = \dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{du}{dy} = -\dfrac{dv}{dx} \end{cases}$$

Enligt antagandet $v \equiv 0 \Rightarrow \nabla v \equiv 0 \overset{+CR}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \nabla u \equiv 0 \underset{\text{sats } G \text{ område}}{\Rightarrow} u$ konstant och då f konstant

---

$\boxed{2.23}$ Visa att CRs ekvationer i polära koordinater r, φ $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

blir $\begin{cases} \dfrac{du}{dr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{d\varphi} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\varphi} = \dfrac{dv}{dr} \end{cases}$

Lösning: $\dfrac{dx}{dr} = \cos\varphi$, $\dfrac{dx}{d\varphi} = -r\sin\varphi$, $\dfrac{dy}{dr} = \sin\varphi$, $\dfrac{dy}{d\varphi} = r\cos\varphi$

Får $\dfrac{du}{dr} = \dfrac{du}{dx}\dfrac{dx}{dr} + \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dr} = \dfrac{dv}{dy}\cos\varphi - \dfrac{dv}{dy}\sin\varphi$

kedjeregeln

$$\frac{1}{r}\frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dx}\frac{dx}{d\varphi} + \frac{dv}{dy}\frac{dy}{d\varphi}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{dv}{dx}(-r\sin\varphi) + \frac{dv}{dy}r\cos\varphi\right) = \frac{du}{dr}$$

andra ekv p.s.s.

$\boxed{\text{Övning:}}$ Visa att om f är holomorf i $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ och $f(z) = f(|z|)$, då är f konstant

Lösning: Använd CRs ekvationer i polära koordinater. $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$

Har enligt tidigare uppgift att $\begin{cases} \dfrac{du}{dr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{dv}{dy} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\varphi} = -\dfrac{dv}{dr} \end{cases}$

Men enligt antagandet:

$$\left.\begin{aligned} u(r,\varphi) &= u(r) \\ v(r,\varphi) &= v(r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = \frac{dv}{d\varphi} = 0$$

$$\underset{+CR}{\Rightarrow} \nabla u = \nabla v = 0$$

$\mathbb{C}^*$ område $\Rightarrow u, v, f$ konstanta

Föreläsning 10/9

Komplexa logaritmer

Definition: Givet område G så sägs varje kontinuerlig funktion $\operatorname{Log} z : G \to \mathbb{C}$ som uppfyller $e^{\operatorname{Log} z} = z$ vara en gren av logaritmen $\log z$. $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ $(-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi)$ kallas den principala grenen.

Exempel: $\operatorname{Log}(3i) = \ln 3 + i\pi/2$

$\operatorname{Log}(-7) = \ln 7 + i\pi$ (fick ej ta $-\pi$ så da tar vi π istället)

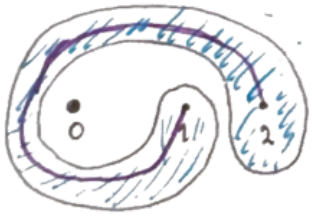
Obs! $\operatorname{Log} z$ är diskontinuerlig längs $\mathbb{R} \leq 0$, så $\operatorname{Log} z$ är inte en gren av $\log z$ på $\{\operatorname{Re} z < 0\}$

Obs! Ibland $\operatorname{Log} z^2 \neq 2 \operatorname{Log} z$

e.g. $\operatorname{Log}((-7)^2) = \ln 49 = 2 \ln 7$

$2 \operatorname{Log}(-7) = 2 \ln 7 + 2\pi i$

Exempel:



Om $\operatorname{Log} z$ är en gren av $\log z$ på G, och $\operatorname{Log} 1 = 0$, vad blir $\operatorname{Log} 2$?

Svar: $\ln 2 - i2\pi$

$\operatorname{Log} z$ ← principella

$\operatorname{Log} z$ ← godtycklig

$\log z$ ← någon gren

Proposition 3.19

Om $\operatorname{Log} z$ är en gren av $\log z$ på G, då är $\operatorname{Log} z$ holomorf i G och $\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{z}$.

Bevis: Räkneregler för komplex derivata (prop 2.12) säger att om f holomorf, $f' \neq 0$, g kontinuerlig funktion s.a. $f(g(z)) = z$, då g holomorf och $g'(z) = \frac{1}{f'(g(z))}$

I vårt fall: $f(z) = e^z$, $g(z) = \log z$

$\Rightarrow$ $\operatorname{Log} z$ är holomorf och $\operatorname{Log}'(z) = \frac{1}{e^{\operatorname{Log} z}} = \frac{1}{z}$ $\square$

Definition: $a^b = e^{b \operatorname{Log} a}$ $(a, b \in \mathbb{C})$

Övning 3.50: Visa att z^c, $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, är holomorf i $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ och att $(z^c)' = c z^{c-1}$

Konforma avbildningar

Definition: En funktion $f: G \to \mathbb{C}$ är konform om den bevarar vinkeln mellan glatta kurvor i G.

Proposition 2.11.

Om f holomorf, $f' \neq 0$ då är f konform.

Lemma: Om f holomorf och γ glatt kurva, då är

$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$

Bevis av Lemma $\longrightarrow$

Bevis av Lemma:

Enligt kedjeregeln från flervariabeln

$$(f\circ\gamma)'(t) = \frac{df}{dx}(\gamma(t))(\gamma'(t))_x + \frac{df}{dy}(\gamma(t))(\gamma'(t))_y =$$

$$= \frac{df}{dx}(\gamma(t))\,\mathrm{Re}(\gamma'(t)) + i\,\frac{df}{dx}(\gamma(t))\,\mathrm{Im}(\gamma'(t)) =$$

$$= f'(\gamma(t))\cdot\gamma'(t).$$

svarar mot h reellt i def.

obs! om f holomorf, $f' = \frac{df}{dx}$ $\square$

Bevis av Proposition 2.11:

Låt $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ vara glatta kurvor som möts i $a = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, vi antar också $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$. Vinkeln mellan $\gamma_1\gamma_2$ ges då av $\varphi = \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(\gamma_1'(0))$ medan vinkeln mellan $f\circ\gamma_1$, $f\circ\gamma_2$ blir $\psi = \arg((f\circ\gamma_2)'(0)) - \arg((f\circ\gamma_1)'(0))$

Men enligt lemmat är $(f\circ\gamma_i)'(0) = f'(a)\cdot\gamma_i'(0)$, $i = 1,2$

$$\Rightarrow \psi = \arg(f'(a)\gamma_2'(0)) - \arg(f'(a)\gamma_1'(0)) =$$

$$= \arg(f'(a)) + \arg(\gamma_2'(0)) - \arg(f'(a)) - \arg(\gamma_1'(0)) = \varphi \quad \square$$

obs! Om γ_1, γ_2 skär varandra i vinkeln φ i 0, $f = z^2$, vad händer med vinkeln mellan $f\circ\gamma_1$, $f\circ\gamma_2$?

Möbiusavbildningar

$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ kallas Möbiusavbildning (Mavb) om $ad-bc \neq 0$

$M'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$ (övning 2.14) så M konform.

Exempel:

$$\left.\begin{array}{ll} az & \text{skalning} \\ z+b & \text{translation} \\ \frac{1}{z} & \text{inverson} \end{array}\right\} \text{elementära Mavb}$$

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{bc-ad}{c^2}\cdot\frac{1}{z+\frac{d}{z}} + \frac{a}{c} \quad \Rightarrow$$

Varje Mavb fås genom komposition av elementära Mavb.

(alt $\frac{a}{d}z + \frac{b}{a}$ om $c = 0$)

Exempel: Hitta Mavb $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ s.a. $M(0) = 1$, $M(1) = 0$
$M(i) = \frac{1-i}{2}$

Lösning: $M(0) = 1 \Rightarrow \frac{b}{d} = 1 \Rightarrow b = d$, sätt $b = d = 1$

$M(1) = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

$M(z) = \frac{-z+1}{cz+1}$ $\qquad M(i) = \frac{-i+1}{ci+1} = \frac{1-i}{2} \Rightarrow c = -i$

$\Rightarrow M(z) = \frac{-z+1}{-iz+1} = \frac{z-1}{iz-1}$.

Obs:
$\frac{az+b}{cz+d}$ ej def i $z = -\frac{d}{c}$. Låt $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. $\frac{az+b}{cz+d} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$,

$-\frac{d}{c} \mapsto \infty$, $\infty \mapsto \frac{a}{c}$ (om $c = 0$, $\infty \mapsto \infty$)

Exempel:

Hitta Mavb M s.a $0 \mapsto \infty$, $\infty \mapsto 1$, $i \mapsto 2$

Lösning: $0 \mapsto \infty \Rightarrow d = 0$

$\infty \mapsto 1 \Rightarrow a = c = 1$

$\left(M(z) = \frac{z+b}{z}\right)$ $\qquad i \mapsto 2 \Rightarrow \frac{i+b}{i} = 2 \Rightarrow b = i$

$\Rightarrow M(z) = \frac{z+i}{z}$

Proposition 3.1

a) Komposition av två Mavb ger ny Mavb.

b) $\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{-1} = \frac{dz-b}{-cz+a}$

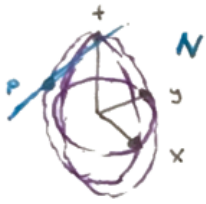
Bevis: a) Varje Mavb är uppbyggd av elementära Mavb.
Räcker således att visa att $E \circ \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ ny Mavb då E elementär.
Visar fallet $E = z + e$. $(z+e) \circ \left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{az+b}{cz+d} + e = \frac{az+b+e(cz+d)}{cz+d} =$
$= \frac{(a+ec)z + (ed+b)}{cz+d}$ $\qquad$ Kollar determinant: $(a+ec)d - (b+ed)c = ad - bc \neq 0$

(liknande för resterande regler) $\square$

Föreläsning 11/9

Utriktning: Stereografiska projektionen

sfären $S^2 = \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+t^2 = 1\}$



$N = (0,0,1)$ Givet $p \in S^2 \setminus \{N\}$. Låt L_p vara linjära genom N och p, $\varphi(p)$ = skärning med xy-planet $\cong \mathbb{C}$

Definiera också $\varphi(N) = \infty$ får bijektionen $\varphi : S^2 \to \hat{\mathbb{C}}$

Kallas den stereografiska projektionen

$\hat{\mathbb{C}}$ kallas ofta för Riemannsfären.

Fortsättning Mavb

Kor 3.13: Om (z_1, z_2, z_3), (w_1, w_2, w_3) två triplar av distinkta punkter i $\hat{\mathbb{C}}$, då $\exists!$ Mavb så att $z_1 \mapsto w_1$, $z_2 \mapsto w_2$, $z_3 \mapsto w_3$

Bevis:

Notera $\dfrac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$ avbildar $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$, $z_3 \mapsto \infty$

Får $\left(\dfrac{(z-w_1)(w_2-w_3)}{(z-w_3)(w_2-w_1)}\right)^{-1} \circ \left(\dfrac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}\right)$ $\quad z_1 \mapsto w_1,\ z_2 \mapsto w_1,\ z_3 \mapsto w_3$ $\square$

Att den är unik lämnas som övning

Sats 3.4

Mavb avbildar cirklar och linjer på cirklar eller linjer (cirkel kan gå på cirkel eller linje och tvärtom)

Bevis: $M = E_k \circ \ldots \circ E_1$ elementära Mavb

Räcker därför visa påståendet för elementära Mavb.

Satsen gäller definitivt för skalningar och translationer, återstår fallet $E = \frac{1}{z}$. Låt $C = C(a,r) = \{|z-a|\}$. Vill visa $E(C)$ cirkel eller linje. fall med linje analogt

$$E(C) = \{|\underbrace{\tfrac{1}{z}}_{E^{-1}(z)} - a| = r\}$$

$\longrightarrow$

Fall 1: $a = 0 \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = r \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{r}$ dvs. får en cirkel

Fall 2: $a \neq 0$, $r^2 = \left|\frac{1}{z} - a\right|^2 = \frac{|1-az|^2}{|z|^2}$ $\left(|1-az|^2 = 1 - \mathrm{Re}(az) + |z|^2\right.$

$\Leftrightarrow (r^2 - |a|^2)|z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(az) - 1 = 0$

Om $r \neq |a|$ (Jamför övning 3.10) blir ekvationen för en cirkel

Om $r = |a|$ för linje $\square$

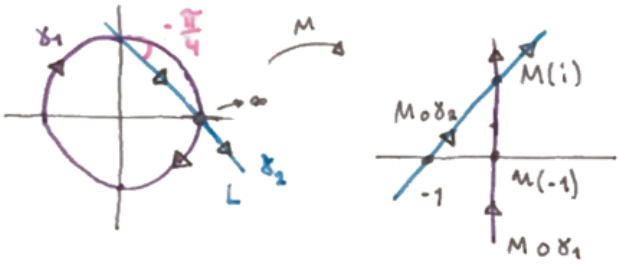
Exempel: Visa att $M(z) = \frac{1+z}{1-z}$ avbildning $c(0,1)$ på $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Lösning: Enligt sats så avbildas $c(0,1)$ på cirkel eller linje.

$M(1) = \infty$, $M(i) = \frac{1+i}{1-i} = i$, $M(-1) = 0 \Rightarrow M(c(0,1))$ är en linje genom 0 och i, dvs. $M(c(0,1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Exempel: För samma $M = \frac{1+z}{1-z}$, bestäm bilden av linjen genom 1 och i

Lösning:



$M(i) = i$, $M(1) = \infty$

$\Rightarrow M(L)$ linje genom i

γ_1 och γ_2 skär i vinkeln $-\frac{\pi}{4}$

(Konform = vinkeln mellan två kurvor bevaras)

M konform $\Rightarrow M \circ \gamma_1$, $M \circ \gamma_2$ skär i vinkeln $-\pi/4$

$\Rightarrow M(L)$ = linje genom i och -1.

Exempel: För samma M, bestäm bilden av $D(0,1)$. ← enhetsskivan

$c(0,1)$ = enhetscirkeln

Lösning:

$D(0,1)$ avgränsas av $c(0,1)$

$\Rightarrow M(D(0,1))$ avgränsas av $M(c(0,1)) = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

dvs. $M(D(0,1))$ är vänstra eller högra halvplane

$M(0) = 1$, 1 ligger i högra halvplanet $\Rightarrow M(D(0,1)) = \mathrm{HHP}$ ← högra halvplane

---

Integraler

1. $g : [a,b] \to \mathbb{C}$, kontinuerlig ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$)

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re} g(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} g(t)\,dt$$

2. $f : G \to \mathbb{C}$ kontinuerlig ($G \subseteq \mathbb{C}$ område)

$\gamma : [a,b] \to G$ glatt kurva (dvs. $\gamma'(t)$ kontinuerlig)

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt \qquad (dz = dx + i\,dy)$$

3.

γ styckvist glatt på delintervall

$[a_0, a_1], \ldots, [a_{n-1}, a_n]$

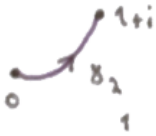
$$\int_\gamma f\,dz = \int_{a_0}^{a_1} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Exempel: $\gamma_1(t) = t + it$, $0 \leq t \leq 1$

$f = \bar{z}$

$$\int_{\gamma_1} \bar{z}\,dz = \int_0^1 \overline{(t+it)}(1+i)\,dt = \int_0^1 2t\,dt = \left[t^2\right]_0^1 = \underline{\underline{1}}$$

$\gamma_2(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$



$f = \bar{z}$

$$\int_{\gamma_2} \bar{z}\,dz = \int_0^1 (t - it^2)(1 + 2it)\,dt = \int_0^1 (t + it^2 + 2t^3)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} + i\frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{3} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{i}{3}$$

Proposition 4.2

Om γ_2 reparametrisering av γ_1 då $\int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_2} f\,dz$.

Definition: Om $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kurva

$-\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ kurva, $(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t)$

Definition: Om $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Konkatenation

Definition: $|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$ längden av γ

Egenskaper (Prop 4.6)

ⓐ $\int_\gamma (f + cg)\,dz = \int_\gamma f\,dz + c\int_\gamma g\,dz$

ⓑ $\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_\gamma f\,dz$

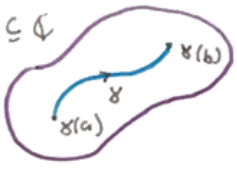
ⓒ $\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{\gamma_2} f\,dz$

ⓓ Triangelolikhet för integraler

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|$$

Fortsättning Integraler: $\boxed{\text{Föreläsning 12/9}}$

$G \subseteq \mathbb{C}$



$f : G \to \mathbb{C}$ kontinuerlig

$$\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

Egenskaper (Prop 4.6)

Se ovan a-d ↑

Bevis av d) Skriv $\int_\gamma f\,dz = re^{i\theta}$

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| = r = re^{i\theta}\cdot e^{-i\theta} = \int_\gamma f\,dz \cdot e^{-i\theta} =$$

$$= \int_\gamma e^{-i\theta} f\,dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)dt$$

tyreellt

$$= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta} f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\right|dt \leq$$

$$\leq \left(|e^{-i\theta}| = 1,\ |f(\gamma(t))| \leq \max_{z\in\gamma}|f(z)| \leq \max_{z\in\gamma}|f(z)| \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt\right) \quad |\gamma| \qquad \square$$

Obs! $\sup_{z\in\gamma} |f(z)| = \max_{z\in\gamma} |f(z)| < \infty$ pga följande resultat:

Sats A.1 Om K är kompakt och $u: K \to \mathbb{R}$ kontinuerlig, då antar u min och max på K, speciellt u begränsad

Superviktigt exempel:

Beräkna $\int_{|z|=1} z^k dz$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = \gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

Lösning: $\gamma'(t) = ie^{it} \Rightarrow \int_\gamma z^k dz = \int_0^{2\pi} e^{ikt} \cdot ie^{it} dt =$

$$= i \int_0^{2\pi} (\cos((k+1)t) + i\sin((k+1)t))\, dt = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases}$$

Vad blir $\int_{|z-w|=r} \frac{1}{z-w} dz$?

Homotopi mellan slutna kurvor:

Definition: Kurvan $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ är sluten om $\gamma(a) = \gamma(b)$

Låt γ_0, γ_1 vara två slutna kurvor i område G.

Definition: γ_0 och γ_1 är homotopa i G, skrivs $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$, om $\exists$ kontinuerliga funktioner $\gamma(t,s): [a,b] \times [0,1] \to G$ s.a

i) $\gamma(t,0) = \gamma_0(t)$

ii) $\gamma(t,1) = \gamma_1(t)$

iii) $\gamma(a,s) = \gamma(b,s) \quad \forall s \in [0,1]$

dvs. kurvorna $\gamma_s(t) = \gamma(t,s)$ är alla slutna. Funktionen $\gamma(t,s)$ kallas homotopi mellan γ_0 och γ_1

Intuitivt: $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ om γ_0 kan kontinuerligt deformeras till γ_1 inne i G

Exempel: $\gamma_0(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $\gamma_1(t) = 2e^{it}$

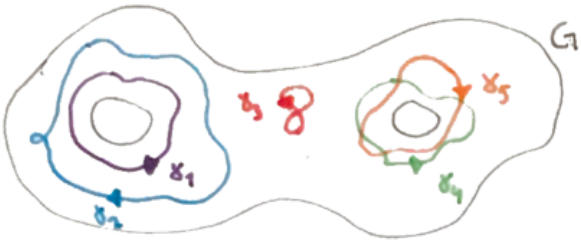
$\gamma(t,s) = (1+s)e^{it}$

γ_0 och γ_1 homotopa i $\mathbb{C}$ och $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, men ej i $\mathbb{C} \setminus \{3i/2\}$

Definition: Om γ G-homotop med punkt $p \in G$ (dvs. kurvan $\gamma_p(t) \equiv p$)

kallas γ kontraherbar eller 0-homotop, skrivs $\gamma \sim_G 0$

"noll-homotop



$\gamma_1 \sim_G \gamma_2$ $\quad$ $\gamma_3 \sim_G 0$

$\gamma_1 \not\sim_G 0$ $\quad$ $\gamma_4 \not\sim_G \gamma_5$ men $\gamma_4 \sim_G -\gamma_5$

I praktiken, typiskt $G = \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$

Övning 4.24: Visa att varje sluten kurva i $\mathbb{C}$ är 0-homotop i $\mathbb{C}$, och att om γ_1, γ_2 slutna i $\mathbb{C}$, $\gamma_1 \sim_{\mathbb{C}} \gamma_2$

David: "I denna kurs, fuskar man lite"

Cauchys Sats (Sats 4.18)

Antag att f holomorf i G och γ_0, γ_1 slutna slutna, glatta kurvor i G s.a. $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$ då $\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$

Obs! Typiskt ej sant om f ej holomorf eller $\gamma_0 \not\sim_G \gamma_1$

Bevis: Kommer anta $f \in C^1$ och homotopin mellan γ_0, γ_1 är C^2

$I(s) = \int_{\gamma_s} f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t,s)) \frac{d\gamma}{dt}\,dt$. $\quad \frac{dI}{ds} \underset{\text{tack vare antagandan}}{=} \int_a^b \frac{d}{ds}\left(f(\gamma(t,s)) \frac{d\gamma}{dt}\right) dt =$

$= \left[\begin{array}{l} f \text{ holomorf så enligt lemma:} \\ \frac{d}{ds} f(\gamma(t,s)) = f'(\gamma(t,s)) \frac{d\gamma}{ds} \end{array}\right] \quad = \int_a^b \left(f'(\gamma(t,s)) \frac{d\gamma}{ds}\frac{d\gamma}{dt} + f(\gamma(t,s)) \frac{d^2\gamma}{ds\,dt}\right) dt$

$= \left[\text{samma lemma: } \frac{d}{dt} f(\gamma(t,s)) = f' \frac{d\gamma}{dt}\right] = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t,s)) \frac{d\gamma}{ds}\right) dt =$

$= f(\gamma(b,s)) \frac{d\gamma}{ds}(b,s) - f(\gamma(a,s)) \frac{d\gamma}{ds}(a,s) = 0$ ty $\gamma(a,s) = \gamma(b,s)\ \forall s$

$\Rightarrow \frac{dI}{ds} = 0 \Rightarrow I(s)$ konstant $\Rightarrow \int_{\gamma_0} f\,dt = I(0) = I(1) = \int_{\gamma_1} f\,dz$ $\square$

Kor 4.30 Om f holomorf i G, γ sluten slutna glatta kurvor i G så att $\gamma \sim_G 0$, då $\int_\gamma f\,dz = 0$ (tillhor Cauchys sats)

Bevis: $\gamma \sim_G 0$ betyder $\gamma \sim_G \gamma_p$, $\gamma_p(t) \equiv p$, $p \in G$

CS $\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma_p} f\,dz = 0$ ty $\gamma_p' = 0$

---

räknestuga 14/9

3.5 Visa att alla Möbiusavbildningar, förutom $f(z) = z$ $\forall z$, har som mest två fixpunkter dvs. punkter z_0 s.a. $f(z_0) = z_0$

Lösning: Skriv $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Antag att z är en fixpunkt

dvs. $z = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \Rightarrow (cz+d)z = az+b$ max 2 lösningar

Kollar om dom är ekvivalenta: Om $c \neq 0$ så är det en 2:a gradsfunktion 2 lösningar

om $c = 0 \Rightarrow dz = az+b \Rightarrow (d-a)z = b$

om $d \neq a$ så finns max en lösning

om $d = a$ så $b = 0$. oändligt många lösningar vilket inte var ok enligt uppgiften

om $c = 0$, $a = d$ & $b = 0 \Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az}{d} = z$

3.13 Låt $f(z) = \frac{2z}{z+2}$. Rita bilden av:

a) x-axeln

b) y-axeln

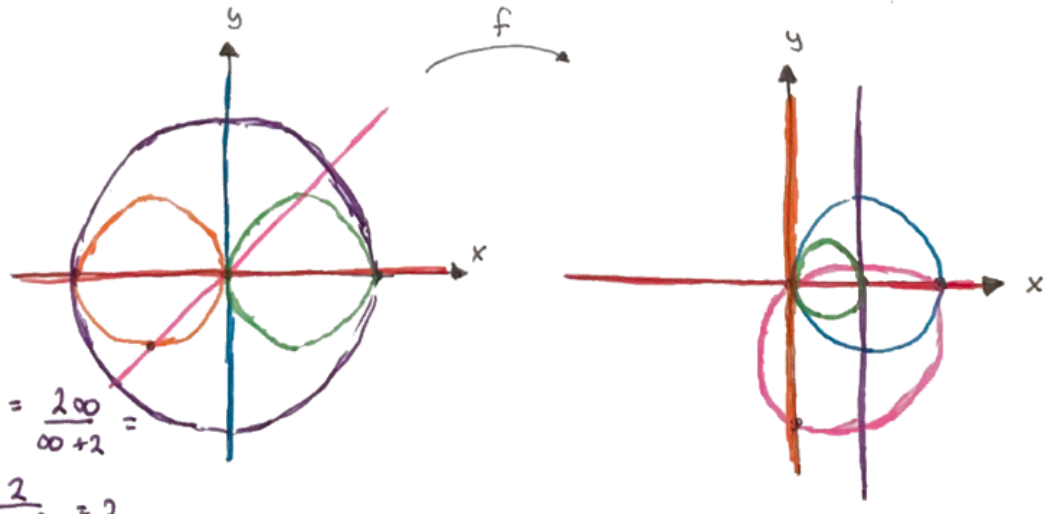
c) $y = x$

d) $C[0,2]$

e) $C[1,1]$

f) $C[-1,1]$

Tips: Räcker att rita bilden av $0, \pm 2, \infty, -1-i$



$f(0) = \underline{0}$ $\quad f(\infty) = \frac{2\infty}{\infty+2} = \frac{2}{1+\frac{2}{\infty}} = \underline{2}$

$f(2) = \underline{1}$

$f(-2) = \underline{\infty}$

$f(-1-i) = \frac{-2(1+i)}{1-i} = \frac{-2(1+i)^2}{2} = -(1+2i-1) = \underline{-2i}$

3.14 Hitta en Möbiusavbildning s.a.

a) $1 \longmapsto 0$, $2 \longmapsto 1$, $3 \longmapsto \infty$

b) $1 \longmapsto 0$, $1+i \longmapsto 1$, $2 \longmapsto \infty$

Lösning: a) $f(z) = \frac{z-1}{z-3} \cdot A$ $\quad f(2) = \frac{2-1}{2-3} \cdot A = -A$

$f(z) = \frac{1-z}{z-3}$ $\quad$ b) exakt likadant

3.41 c) Skriv i^i på rektangulär form

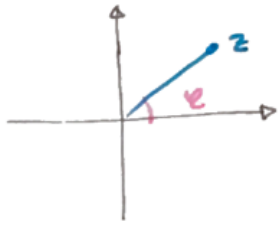
Lösning: $i^i = (e^{\operatorname{Log} i})^i = e^{i \operatorname{Log} i} = e^{i(\ln|i| + i\pi/2)} =$

$= e^{-\pi/2} \in \mathbb{R}$!!

3.45 Hitta alla lösningar till:

a) $\operatorname{Log} z = \frac{\pi i}{2}$

b) $\operatorname{Log} z = \frac{3\pi i}{2}$



Lösning: $\arg z = \varphi + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k$ s.a. $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi$

Definition: $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$, $\log z$

Definition: $a^b = e^{b \cdot \operatorname{Log} a}$ $\quad i^i = (e^{\pi i/2}) = \ldots = e^{-\pi/2}$

" $(e^{\pi i/2 + 2\pi i})$ " $= e^{-\pi/2 - 2\pi}$ ← fel pga ej hänsyn för komplexa tal

a) $\ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \pi i/2$

$\Rightarrow \begin{cases} \ln|z| = 0 \\ \operatorname{Arg} z = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \operatorname{Arg} z = \pi/2 \end{cases} \Rightarrow z = i$

b) $\ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \frac{3\pi i}{2} \Rightarrow \begin{cases} \ln|z| = 0 \\ \operatorname{Arg} z = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ omöjligt, Inga lösningar.

4.4 Visa att $\displaystyle\int_{C[w,r]} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$

<u>Lösning</u>: Parametrisera $C[w,r]$, $z = w + re^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$

$dz = ire^{it}\,dt$

$$\int_{C[w,r]} \frac{dz}{z-w} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

viktig integral!

4.5 a) Integrera $z + \bar{z}$ över $C[0,2]$

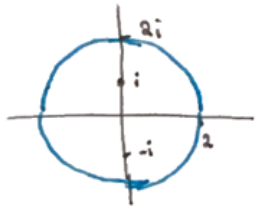
<u>Lösning</u>:

$$\int_{C[0,2]} (z+\bar{z})\,dz = \begin{bmatrix} z = 2e^{it} & t \in [0,2\pi] \\ dz = i2e^{it} & \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} (2e^{it} + 2e^{-it})\, i2e^{it}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (4ie^{2it} + 4i)\,dt = \left[\frac{4ie^{2it}}{2i} + 4it\right]_0^{2\pi} = 8\pi i$$

Integralen av någon holomorf funktion på en sluten kurva $= 0$

4.28 Visa att $\displaystyle\int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^2+1} = 0$



ej det i i & -i pga nämnare $= 0$

<u>Lösning</u>:

$$\int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{C[0,r]} \frac{dz}{z^2+1}$$

$r > 2$ pga Cauchys sats säger att de är samma även om radien är större sålänge cirkeln inte går genom förbjudna punkter

$$|z^2+1| \geq |z^2| - 1 \Rightarrow \left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{|z|^2-1}$$

$$\Rightarrow \int_{C[0,r]} \left|\frac{dz}{z^2+1}\right| \leq 2\pi r \cdot \max_{z \in C[0,r]} \left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \{z \in C[0,r] \Leftrightarrow |z| = r\}$$

$$\leq \frac{2\pi r}{r^2-1} \to 0 \text{ då } r \to \infty \quad \Rightarrow \int_{C[0,2]} \frac{dz}{z^2+1} = 0$$

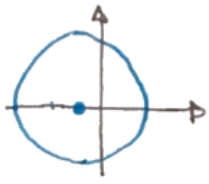
4.36 Beräkna a) $\displaystyle\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4-z^2}\,dz$ b) $\displaystyle\int_{C[0,1]} \frac{\sin z}{z}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{C[0,2]} \frac{e^z}{z(z-3)}\,dz$

Sats 4.24 (Cauchys Integralformel)

Om f är holomorf i $\bar{D}[w,R]$ så $f(w) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C[w,R]} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$

Lösning: a) $\dfrac{1}{4-z^2} = \dfrac{A}{2-z} + \dfrac{B}{2+z} = \dfrac{A(z+2)+B(2-z)}{4-z^2} = \begin{cases} A-B=0 \\ 2A+2B=1 \\ A=B \ \& \ 4A=1 \\ \Rightarrow A \ \& \ B = \frac{1}{4} \end{cases}$

$\displaystyle\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4-z^2}\,dz \Rightarrow$  $\Rightarrow \displaystyle\int_{C[-1,2]} \frac{z^2}{4(2-z)} + \frac{z^2}{4(2+z)}\,dz$ $\leftarrow f(z) = \dfrac{z^2}{4}$

$= 2\pi i\,\dfrac{(-2)^2}{4} = 2\pi i$

b) $\displaystyle\int_{C[0,1]} \frac{\sin z}{z}\,dz = 2\pi i \sin(0) = 0$ $\leftarrow w=0,\ f=\sin z$

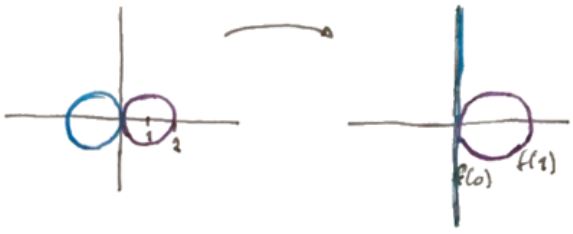
c) $\displaystyle\int_{C[0,2]} \frac{e^z\,dz}{z(z-3)}\,dz = 2\pi i\,\frac{e^0}{0-3} = -\frac{2\pi i}{3}$ $\leftarrow w=0,\ f=\dfrac{e^z}{z-3}$

Storgruppsövning 14/9

3.13 $f(z) = \frac{2z}{z+2}$ e) Bestäm bilden av cirkeln med centrum i 1
f) Bestäm bilden av cirkeln med centrum i -1

Använd bara $f(-2), f(0), f(2)$

Lösning:



$f(-2) = \infty$, $f(0) = 0$

$f(2) = 1$

enligt sats $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ linje eller cirkel genom $\infty, 0, 1$ dvs. linje genom $0, 1$ = reella axeln. Enligt sats: $f(c(1,1))$ cirkeln eller linjen genom $0, 1$

i punkten 0 skär $c(1,1)$ den reella axeln i rät vinkel

f konf $\Rightarrow f(c(1,1))$ skär reella axeln i rät vinkel

$\Rightarrow f(c(1,1)) = c(1/2, 1/2)$

$f(c(-1,1))$ = cirkel eller linje genom $\infty, 0$ dvs. en linje genom 0

$f(c(-1,1))$ skär reella axeln i rät vinkel = $i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

3.14 Hitta en Mavb $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ s.a. $M(0) = i$, $M(1) = 1$, $M(\infty) = -i$

Lösning: $0 \longmapsto i$ $\quad \frac{b}{d} = i$ sätt $b = i, d = 1$

$\infty \longmapsto -i \Rightarrow \frac{a}{c} = -i \quad c = ia \quad \Rightarrow M(z) = \frac{az+i}{iaz+1}$

$M(1) = \frac{a+i}{ia+1} = 1 \Rightarrow a = 1 \quad \Longrightarrow M(z) = \frac{z+i}{iz+1}$

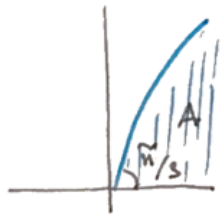
Uppgift från senaste omtentan

Låt $A = \{z : |z| > 0, 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/3\}$. Bestäm bilden av A under avbildningen $f(z) = \frac{z^3}{z^3+i}$ (Tips. använd att $f(z) = M(z^3)$)

Lösning:

$M(z) = \frac{z}{z+i}$

A =



Låt $g(z) = z^3$, då är $f = \underbrace{M \circ g}_{\text{sammansatt}} \rightarrow f(A) = M(B)$

$B = g(A)$

$g(re^{i\theta}) = r^3 e^{i3\theta}$, dvs. g tredubblar vinkeln

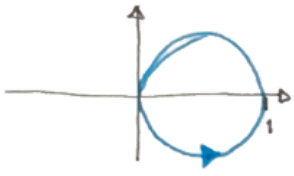
$\longrightarrow g(A) = \{z : |z| > 0,\ 0 < \operatorname{Arg} z < \pi\}$ = övre öppna halvplanet

randen till B är reella axeln
vart avbildas den?

$M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = ?$ Välj 3 punkter på reella axeln.

$M(0) = 0 \qquad M(1) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}(1-i) \qquad M(\infty) = 1$

$\xrightarrow[\text{enligt sats}]{} M(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ cirkel eller linje genom 0,1 och $\frac{1}{2}(1-i)$

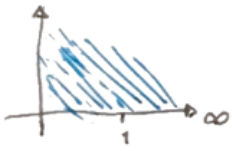


antingen cirkelskivan eller dess komplex element

Tar en punkt i övre halvplanet

t.ex $i \Rightarrow \frac{i}{i+1} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2} \Rightarrow C(1/2, 1/2)$

Konformitet:



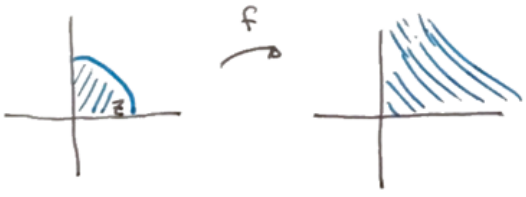
Ligger till vänster och därför måste också bilden ligga till vänster.

Svar: $f(A) = D(1/2, 1/2) = \{z - 1/2 \mid < 1/2\}$

Övning från tenta

Hitta en bijektiv konform avbildning från cirkelsektorn

$S = \{z : 0 < |z| < 1,\ 0 < \operatorname{Arg} z < \pi/2\}$ till positiva oktanten $O = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$



Ide:

Kommer aldrig kunna hitta Mavb ty

vill hitta avbildningar av värderna

3 ränder $\not\longrightarrow$ 2 ränder, vrid ut z till z^2 för att få en halvcirkel.

Övning: Bestäm integralen $\int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2}\, dz$ ← holomorf överallt ← holomorf förutom vid 0 i närmaren

$\Rightarrow \frac{e^z}{z^2}$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$C(2,1) \sim \mathbb{C}\setminus\{0\}^0 \xrightarrow{CS} \int_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2}\, dz = 0$

Kurvan kan komprimeras till en punkt.

Övning: Beräkna $I = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+2z}$

Lösning:

Holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ & $\{-2\}$

$C(0,1) \not\sim \mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$ dvs. integralen $\neq 0$

Partialbråksuppdelning: $\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z(2+z)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{(2+z)}$ $A = \frac{1}{2}$ $B = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+2} \Longrightarrow I = \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}} - \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{z+2}\, dz} =$

superviktiga exemplet från föreläsningen:

$$\int_{|z|=1} z^k\, dz = \begin{cases} 2\pi i, & k=-1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dz}{z} = \int z^{-1}\, dz = 2\pi i$$

$\frac{1}{z+2}$ holomorf i $\mathbb{C}/\{-2\}$

$C(0,1) \sim \mathbb{C}\setminus\{-2\}^0$

$\xRightarrow{CS} \int_{|z|=1} \frac{1}{z+2}\, dz = 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}\cdot 2\pi i = \pi i = I$

Med denna metod kan man räkna ut integral för alla rationella funktioner.

$\boxed{\text{Föreläsning 17/9}}$

Repetition: Två slutna kurvor γ_0, γ_1 homotopa i G, $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$

Om γ_0 kan deformeras kontinuerligt till γ_1 inne i G.

Cauchys Sats: (Sats 4.18, Kor 4.20)

f holomorf i G, γ_0, γ_1 slutna styckevis glatta kurvor i G, $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$

då $\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$. Om $\gamma_0 \sim_G 0$, då $\int_{\gamma_0} f\,dz = 0$.

Kan nu räkna ut $\int_{\gamma} \frac{p(z)}{q(z)}\,dz$, p, q polynom i z.

Men vad blir t.ex. $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$ eller $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{e^z}\,dz$?

Cauchys integralformel version 1 (Sats 4.24)

f holomorf i G, $\bar{D}(w,R) \subseteq G$, då

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz, \quad 0 < r \leq R$$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $\frac{f(z)}{z-w}$ holomorf i $G \setminus \{w\}$ och för $0 < r \leq R$ är $C(w,r)$ alla homotopa i $G \setminus \{w\}$. $\overset{CS}{\Longrightarrow} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$ oberoende av r.

Har enligt superviktiga exemplet: $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{1}{z-w}\,dz = 1$

$$\Rightarrow f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(w)}{z-w}\,dz$$

Nu ska vi uppskatta kurvan istället

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)-f(w)}{z-w}\,dz \right| \leq$$

Δ-olikhet för integraler

$$\leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z-w|=r} \left| \frac{f(z)-f(w)}{z-w} \right| 2\pi r = \max_{|z-w|=r} |f(z)-f(w)| \xrightarrow[r \to 0]{} 0 \text{ ty } f \text{ kontinuerlig.}$$

$|z-w| = r$, ersätter i nästa steg och tar ut r:en

Men $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz - f(w)$ oberoende av r, så $= 0$

dvs. $f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$ $\square$

Exempel: Beräkna $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz$

Lösning: e^z holomorf i $\mathbb{C}$, $w=0$ $\quad \bar{D}(0,1) \subseteq \mathbb{C} \overset{\text{CIF}}{\Rightarrow} e^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z-0}\,dz$

$$\Rightarrow \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\,dz = 2\pi i$$

Cauchys Integralformel version 2:

f holomorf i G, $w \in G$, γ sluten styckvis glatt kurva i $G \setminus \{w\}$, $\gamma \sim_{G\setminus\{w\}} C(w,r)$, $0<r<d$, då $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,dz$

Exempel: Bestäm $\int_\gamma \frac{\sin z}{1-z}\,dz$, där

Lösning:

$\sin z$ holomorf i $\mathbb{C}$, $\gamma \sim_{\mathbb{C}\setminus\{1\}} -2\,C(1,r)$

$$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\sin z}{1-z}\,dz = -\int_\gamma \frac{\sin z}{z-1}\,dz \overset{\text{CIFv.2}}{=} -(-2)\,2\pi i \sin 1 = 4\pi i \sin 1$$

Men $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{e^z}\,dz$?

Tillhör bevislistan

Cauchys integralformel för derivatan ($\sim$ Sats 5.1)

f holomorf i G, $\bar{D}(w,r) \subseteq G$, då $f'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$.

Bevis: Om $|h|<r$ så CIFv2 $= f(w+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-(w+h)}\,dz$

$$\Rightarrow \frac{f(w+h)-f(w)}{h} = \frac{1}{2\pi i h}\int_{|z-w|=r} f(z)\left(\frac{1}{z-w-h} - \frac{1}{z-w}\right)dz =$$

$$= \left[\frac{1}{z-w-h} - \frac{1}{z-w} = \frac{h}{(z-w-h)(z-w)}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)}\,dz \xrightarrow[h\to 0]{?} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$$

$$\Rightarrow \left|\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w-h)(z-w)}\,dz - \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)}\,dz\right| = \left[\frac{1}{(z-w-h)(z-w)} - \frac{1}{(z-w)^2} = \frac{h}{(z-w-h)(z-w)^2}\right] =$$

$$= \left|\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)h}{(z-w-h)(z-w)^2}\,dz\right| \underset{\Delta\text{-olik } \int}{\leq} \max_{|z-w|=r}\left|\frac{f(z)h}{(z-w-h)(z-w)^2}\right| \cdot 2\pi r \leq$$

$$\leq \left[\begin{array}{l} |z-w-h| \geq |z-w| - |h| = r - |h| \\ \text{omv. } \Delta\text{-olik} \geq r/2 \text{ för } |h| < r/2 \end{array}\right] \leq \max_{|z-w|=r} |f(z)| \cdot \frac{2|h|}{r^3} \cdot 2\pi r \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(w+h)-f(w)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$$

$\square$

Exempel: $\int \frac{\sin z}{z^2}\,dz \overset{\text{CIF för der.}}{=} \left[\begin{matrix} f = \sin z \\ w = 0 \end{matrix}\right] = 2\pi i \cdot \sin'(0) = 2\pi i$

Korollorium: Om f holomorf då existerar alla derivator $f^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}}\,dz$$

Tillhör inte beislistan

$\boxed{\text{Bevis:}}$ f holomorf i G, $\bar{D}(w,r) \subseteq G$. CIF för f' + CS $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{f'(w+h) - f'(w)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_{|z-w|=r} f(z) \left(\frac{1}{(z-w-h)^2} - \frac{1}{(z-w)^2} \right) dz =$$

$$= \left[\frac{1}{(z-w-h)^2} - \frac{1}{(z-w)^2} = \frac{2h(z-w) - h^2}{(z-w-h)^2 (z-w)^2} \right] = \frac{2}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w-h)^2 (z-w)}\,dz + O(h) \xrightarrow[h \to 0]{}$$

$$\xrightarrow[h \to 0]{} \frac{2}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$$ som i förra beviset.

OBS! Det motsvarande påståendet för reella deriverbara funktioner är totalt falskt!

Exempel: $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

f' ej deriverbar

Exempel: $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^k}\,dz = \{k \geq 1\} = 2\pi i \frac{(e^z)^{k-1}(0)}{(k-1)!} = \frac{2\pi i}{(k-1)!}$

Föreläsning 18/9

Liouvilles sats (kor 5.13)

Om f hel (holo i $\mathbb{C}$) och begränsad ($|f| \leq M < \infty$), då är f konstant.

Bevis Tag $w \in \mathbb{C}$ godtyckligt. $f'(w) \underset{\text{CIF för } f'}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=R} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$

$$\Rightarrow |f'(w)| \underset{\Delta \text{ olik}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \max_{|z-w|=R} \frac{|f(z)|}{R^2} 2\pi R \leq \frac{M}{R} \text{ enligt antagadena.}$$

f hel $\Rightarrow$ R kan väljas godtyckligt stort $\Rightarrow$ $f'(w) = 0$.

w godtyckligt så $f' \equiv 0$, $\mathbb{C}$ område $\underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$ f konstant

OBS! Stor skillnad mot reella världen!

Exempel: $\sin x, \cos x$ oändligt deriverbara och begränsade på $\mathbb{R}$ men ej konstanta.

$\sin z, \cos z$ ej begränsade på $\mathbb{C}$!

Överkursövning: (mycket svår?)

e^z hel, begränsad på ett halvplan. Kan du hitta en hel funktion som är begränsad på sektor med vinkel $> \pi$?

Algebrans fundamentalsats (sats 5.11)

← Bevislistan (denna + Lemma + Lemmabevis)

Låt $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \geq 1$ $a_i \in \mathbb{C}$. Då finns $z_0 \in \mathbb{C}$: $p(z_0) = 0$ (formulerad 1629, felaktigt bevisad av d'Alembert 1746, Euler 1749, de Foncenex 1759, Lagranges 1772, Laplace 1795, Wood 1798, Gauss 1799, korrekt bevis 1806 av Argand)

Lemma: Givet $p(z) = z^n + \ldots + a_0$ kan man välja $R \gg 0$ s.a. $|p(z)| \geq \frac{|z|^n}{2}$ för alla $|z| \geq R$.

Bevis (Lemma) $\left|\frac{p(z)}{z^n}\right| = \left|1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right| \underset{\text{omv. } \Delta \text{ olik}}{\geq} 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_0|}{|z|^n}$,

Välj $R > 2n \cdot \max(|a_i|, 1)$ så funkar det $\square$

Bevis →

$\boxed{\text{Bevis}}$ Antag att $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$. Får då $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ hela funktionen. Välj $R \gg 0$ som i Lemmat, då gäller för

$|z| \geq R$ att $|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|z|^n} \leq \frac{2}{R^n} < \infty$

$|f(z)|$ kontinuerlig funktion, $\bar{D}(0,R)$ kompakt $\Rightarrow |f| \leq C$ på $\bar{D}(0,R)$ Sats A1

$\Rightarrow |f| \leq \max\left(\frac{2}{R^n}, C\right)$ på hela $\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ f konstant $\Rightarrow$ p konstant $\Rightarrow$ motsägelse då grad $p \geq 1$

Liouville

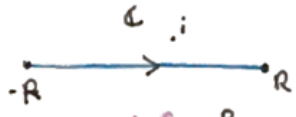
$\square$

Beräkning av reella integraler

Exempel: Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} (\arctan(R) - \arctan(-R)) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ med komplex analys

Lösning:



$[-R,R]$ parametriseras av $\gamma(t) = t$, $t \in [-R,R]$

$\gamma'(t) = 1$

$\Rightarrow \int_{[-R,R]} \frac{1}{1+z^2}\,dz \overset{\text{def}}{=} \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+t^2}\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{1}{1+z^2}\,dz$

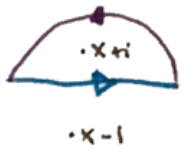
$\gamma_R(t) = Re^{it}$ $t \in [0,\pi]$ $\sigma_R = [-R,R] \cup \gamma_R$ sluten

styckvis glatt kurva

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz - \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz$

$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz\right| \underset{\Delta\text{olik } \int}{\leq} \max_{z\in\gamma_R} \left|\frac{1}{1+z^2}\right| \cdot \pi R \leq \left[\begin{array}{c} |1+z^2| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1 \\ \text{omv} \\ \Delta\text{olik} \end{array}\right] \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}$ $\begin{matrix} \} F \\ \} W \end{matrix}$ $\Rightarrow \frac{1}{z+i}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, $\sigma_R \sim_{\mathbb{C}\setminus\{-i\}} C(i,r)$ $0 < r \ll 1$



$\overset{\text{CIF}}{\Rightarrow} \int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z+i}\right)_{z=i} = \pi \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi$

Exempel: Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx$

Lösning: $\cos 2x = \mathrm{Re}(e^{2ix}) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Re} \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{e^{2iz}}{1+z^2}\,dz$

Låt γ_R, σ_R vara som i förra exemplet, får

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{2ix}}{1+z^2}\,dz - \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2}\,dz\right)\right)$$

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{2ix}}{1+z^2}\,dz\right| \underset{\text{olik } \int}{\overset{\Delta}{\leq}} \max_{z\in\gamma_R} \frac{|e^{2iz}|}{|1+z^2|}\,\pi R \leq \left[\begin{array}{l} |1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2 - 1 \\ \text{omv. } \Delta \text{ olik} \\ |e^{2iz}| = |e^{2i(x+iy)}| = |e^{2ix-2y}| = \end{array}\right.$$

$$= |e^{-2y}e^{2ix}| = |e^{-2y}|\,|e^{2ix}| = e^{-2y} \leq 1 \text{ ty } y \geq 0\Big] \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$\frac{e^{2iz}}{1+z^2} = \frac{\overbrace{e^{2iz}}^{F}}{\underbrace{(z+i)(z-i)}_{w}}, \quad \frac{e^{2ix}}{z+i} \text{ holomorf i } \mathbb{C}\setminus\{-i\},\ \sigma_R \sim_{\mathbb{C}\setminus\{-i\}} C(i,r), \left[\begin{array}{l} 0<r<<1 \\ R>1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\text{CIF}}{\Rightarrow} \int_{\sigma_R} \frac{e^{2ix}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \left(\frac{e^{2iz}}{z+i}\right)_{z=i} = \pi e^{-2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2}\,dx =$$

$= \mathrm{Re}(\pi e^{-2}) = \pi e^{-2}$ sinus hade gett Imaginär del

---

Primitiva funktioner

Definition: Låt f, F vara holomorf i G. Om $F' = f$ kallas F en primitiv till f i G

OBS F bestämd upp till konstant om den existerar

Exempel: e^z primitiv till sig själv, $\sin z$ primitiv till $\cos z$, $\mathrm{Log}\, z$ primitiv $1/z$ i $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{\leq 0}$.

Föreläsning 19/9

Primitiva funktioner

f holomorf i G, $F' = f$ i G, säger F primitiv till f i G.

Exempel: e^z primitiv till e^z i $\mathbb{C}$, $\sin z$ primitiv till $\cos z$ i $\mathbb{C}$,

$\operatorname{Log} z$ primitiv till $1/z$ i $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$

Sats 4.11: Antag F primitiv till f i G, γ styckvis glatt kurva i G

då $\int_\gamma f\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \overset{\text{Lemma}}{=} \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt =$

analysens fundamentalsats $= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$ $\square$

Exempel: Bestäm $\int_\gamma e^z\,dz$, $\gamma(t) = it$, $t \in [0, \pi]$

Lösning: $\int_\gamma e^z\,dz \underset{\text{Sats}}{=} e^{i\pi} - e^0 = -2$

Följd: Om f har en primitiv i G och γ sluten styckvis glatt kurva.

$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = 0$

Obs!! $\int_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z}$ har ingen primitiv i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Definition: Ett område G är <u>enkelt sammanhängande</u> om varje sluten kurva i G är nollhomotop i G.

ej enkelt sammanhängande (har hål)

exempel $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Grenarna del av randen
$\Rightarrow$ skapar inga hål

enkelt sammanhängande (inga hål)

exempel: $D(w,r)$, $\mathbb{C}$, halvplan...

Kor 5.8: Om f holomorf i G, G enkelt sammanhängande, då finns primitiv F till f i G.

Bevis: Tag $w_0 \in G$. Givet $w \in G$, välj styckvis glatt kurva γ_w från w_0 till w, låt $F(w) = \int_{\gamma_w} f\,dz$ om $\tilde{\gamma}_w$ sådan kurva är $\gamma_w \cup (-\tilde{\gamma}_w)$ sluten dvs. nollhomotop då G antas enkelt sammanhängande

$$\Rightarrow \int_{\gamma_w} f\,dz - \int_{\tilde{\gamma}_w} f\,dz = \int_{\gamma_w \cup (-\tilde{\gamma}_w)} f\,ds \overset{CS}{=} 0$$

Låt $\gamma_h(t) = w + th$, $t \in [0,1]$

Får $F(w+h) = \int_{\gamma_w \cup \gamma_h} f\,dz = F(w) + \int_{\gamma_h} f\,dz$

$$\Rightarrow \frac{F(w+h) - F(w)}{h} = \frac{\int_{\gamma_h} f\,dz}{h} = \int_0^1 \frac{f(w+th)\cancel{h}\,dt}{\cancel{h}} = \int_0^1 f(w+th)\,dt \xrightarrow[h \to 0]{} f(w)$$

ty f kontinuerlig $\Rightarrow F$ primitiv till f. $\square$

Moreras sats (Kor 5.6)

Om $f: G \to \mathbb{C}$ kontinuerlig och $\int_\gamma f\,dz = 0$ $\forall$ slutna styckvis glatta kurvor γ i G, då är f holomorf i G

Bevis: Välj $w_0 \in G$, definiera F som i beviset av Kor 5.8 (↑)

pga. antagandet beror $F(w)$ ej på val av kurva. Som i bevis av Kor 5.8 får vi att $F' = f \Rightarrow F$ holomorf, enligt sats $F^{(k)}$ holomorf för alla $k \in \mathbb{N}$ så speciellt f holomorf i G. $\square$

Harmoniska funktioner

Definition: $u: G \to \mathbb{R}$, $G \subseteq \mathbb{C}$ område harmonisk om $u \in C^2$ och $\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2}$ ← Laplace ekvationen

Exempel: $x, y, xy, x^2-y^2, \ldots$

Värmeledningsekvationen:

(VLE): $\frac{du(z,t)}{dt} = \Delta u(z,t)$, $u(z,t_0) = u_0(z)$
$u(z,t) = u_0(z)$ för $z \in \partial G$

om $u_0(z)$ harmonisk $\Rightarrow$ $u(z,t) = u_0(z)$ löser VLE

harmoniska funktioner beskriver jämviktstillståndet

Exempel: Visa $u(t) = \frac{x}{x^2+y^2}$ harmonisk i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Lösning: $u \in C^\infty$, speciellt C^2

$$\frac{du}{dx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2x^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{-2x(x^2+y^2)^2 + 2xy^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4}$$

$$\Delta u = \frac{2x(x^2+y^2)(-(x^2+y^2) + 2x^2(x^2+y^2) + 2y^2)}{(x^2+y^2)^4} = 0$$

Proposition 6.3

Om f holomorf i G, då är $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ harmoniska i G

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Vill visa $u, v \in C^2$ och $\Delta u = \Delta v = 0$

Enligt sats $\exists f^{(k)}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ och CR: $f' = \frac{df}{dx} = i\frac{df}{dy} = -\left(\frac{du}{dy} + i\frac{dv}{dy}\right)$ $\cdot \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}$

$\Rightarrow u, v \in C^\infty$.

CR: $\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dy}\right) \overset{v \in C^2}{=} \frac{d}{dy}\left(\frac{dv}{dx}\right) \overset{CR}{=} -\frac{d^2u}{dy^2} \Rightarrow \Delta u = 0$

på samma sätt får vi $\Delta v = 0$ $\square$

Definition: Om u harmonisk i G och $u = \operatorname{Re} f$, f holomorf i G, då kallas $v = \operatorname{Im} f$ för ett harmoniskt konjugat till u

Exempel. $z = x + iy$, y harmoniskt konjugat till x

$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$, $2xy$ harmoniskt konjugat till $x^2 - y^2$

Sats 6.6 Om u harmonisk i enkelt sammanhängande område G, då finns f holomorf i G s.a. $u = \operatorname{Re} f$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Notera att om $f = u + iv$, $f' = \frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} + i\left(-\frac{du}{dy}\right)$ enl CR

Låt $p = \frac{du}{dx}$, $q = -\frac{du}{dy}$, $g = p + iq \in C^1$

$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2} \underset{u \text{ harmoniskt}}{=} -\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{dq}{dy}$, $\quad \frac{dp}{dy} = \frac{d^2u}{dy\,dx} \underset{u \in C^1}{=} \frac{d}{dx}\left(\frac{du}{dy}\right) = -\frac{dq}{dx}$

$\overset{CR}{\Longrightarrow}$ g holo i G. G enkelt sammanhängande $\Rightarrow \exists \tilde{f}$ holomorf i G, s.a. $\tilde{f}' = g$. Låt $\tilde{u} = \operatorname{Re} \tilde{f}$, $\tilde{v} = \operatorname{Im} \tilde{f}$

$\tilde{f}' = \frac{d\tilde{u}}{dx} + i\frac{d\tilde{v}}{dx} \overset{CR}{=} \frac{d\tilde{u}}{dx} - i\frac{d\tilde{u}}{dy} = \frac{du}{dx} - i\frac{du}{dy} \Longrightarrow \nabla u = \nabla \tilde{u}$

$\overset{\text{sats}}{\Longrightarrow}$ $u = \underset{\text{reellt}}{\tilde{u} + c} \Longrightarrow u = \operatorname{Re}(\underset{\text{holomorf i } G}{\tilde{f} + c})$ $\square$

Storgruppsövning 21/9

4.29 Beräkna $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t}$

Tips: Använd substitutionen $z = e^{it}$

Lösning: $\sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \dfrac{z - \frac{1}{z}}{2i} \Rightarrow 2 + \sin t = \dfrac{4i + z + \frac{1}{z}}{2i}$

$$dz = d(e^{it}) = ie^{it}\,dt = iz\,dt \Rightarrow dt = \frac{-i\,dz}{z} \Rightarrow \frac{dt}{2+\sin t} = \frac{\frac{-i\,dz}{z}}{\frac{4i + z - \frac{1}{z}}{2i}} = \frac{2\,dz}{z^2 + 4iz -}$$

$$= \frac{2\,dz}{(z-z_0)(z-z_1)}, \quad z_0 = -i(2+\sqrt{3}), \quad z_1 = -i(2-\sqrt{3})$$

$z_0 = -i(2+\sqrt{3})$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{|z|=1} \frac{2\,dz}{(z-z_0)(z-z_1)} \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i \left(\frac{2}{z-z_0}\right)_{z=z_1} =$$

$$= \frac{2\pi i \cdot 2}{z_1 - z_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

5.1 d $\square$ kurva som parametriserar positivt fyrkanten med hörn i punkterna $\pm 4 \pm 4i$. Bestäm $\displaystyle\int_\square \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3}\,dz$

Lösning:

$e^z \cos z$ hel, $\square$ går runt π

$$\Rightarrow \int_\square \frac{e^z \cos z}{(z-\pi)^3}\,dz \overset{\text{CIF for der.}}{=} \frac{2\pi i}{2!}\left(e^z \cos z\right)''_{z=\pi} = \left[(e^z \cos z)'' = -2e^z \sin z\right] =$$

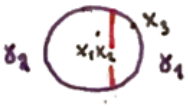
$$= \pi i\left(-2e^{\pi} \sin \pi\right) = 0$$

5.3 i Beräkna $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}}{(z-1)^2(z-2)}$

Lösning:

$$\int_{|z|=3} \frac{e^{2z}\,dz}{(z-1)^2(z-2)} = \int_{\gamma_1} \frac{e^{2z}\,dz}{(z-1)^2(z-2)} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{2z}\,dz}{(z-1)^2(z-2)} \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i\left(\frac{e^{2z}}{(z-1)^2}\right)_{z=2} + 2\pi i\left(\frac{e^{2z}}{z-2}\right)_{z=1}$$

våra $f(z)$



$$= \ldots = 2\pi i \cdot e^2(e^2 - 3)$$

Tips: $\displaystyle 2\pi i \frac{f^{(k)}(w)}{k!} = \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}}\,dz$

5.13 Visa att om f hel och $|f| \geq M > 0$, då är f konstant

<u>Lösning:</u> $|f| > 0 \Rightarrow \frac{1}{f}$ hel $\quad \left|\frac{1}{f}\right| \leq \frac{1}{M} < \infty$

$\overset{\text{Liouville}}{\Longrightarrow} \frac{1}{f}$ konstant $\Rightarrow f$ konstant.

5.18 Bestäm $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx \qquad \gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [0,\pi] \qquad \sigma_R = [-R,R] \cup \gamma_R$

<u>Lösning:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \cancel{\frac{\cos z}{1+z^4}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{[-\pi,R]} \frac{\mathrm{Re}\, e^{iz}}{1+z^4}\,dz = \mathrm{Re} \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,dz$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,dz\right) - \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,dz\right)$$

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,dz\right| \underset{\Delta \text{ olik } \int}{\leq} \max_{z\in\gamma_R} \left|\frac{e^{iz}}{1+z^4}\right| \pi R \leq \left[\begin{array}{l} |e^{iz}| = e^{-y} \leq 1 \\ |1+z^4| \underset{\substack{\text{omv.} \\ \Delta \text{ olik}}}{\geq} |z|^4 - 1 = R^4 - 1 \end{array}\right] \leq$$

$$\leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

2 singulära punkter i kurvan

$$z^4 + 1 = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)$$

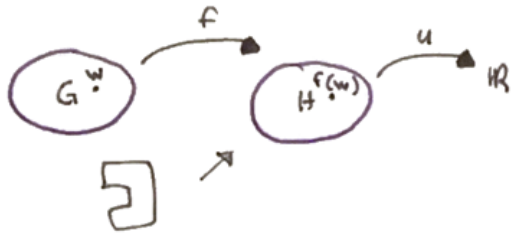
$$\int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^4}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-z_1)\cdots(z-z_4)}}{(z-z_1)}\,dz +$$

$$+ \int_{\gamma_2} \frac{e^{it}/(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_4)}{(z-z_2)}\,dz \overset{\text{CIF}}{=} 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}\right)_{z=z_1} + 2\pi i \left(\frac{e^{iz}}{(z-z_1)(z-z_3)(z-z_4)}\right)_{z=z_2} =$$

$$= \ldots = \pi e^{-1/\sqrt{2}\,\sin(3\pi/4 - \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{1+x^4}\,dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz\right) = \pi e^{-1/\sqrt{2}\,\sin(\frac{3\pi}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

6.9. Antag f holomorf i G, $f(G) \subseteq H$, u harmonisk i H, visa att $u \circ f$ harmonisk i G.



<u>Lösning:</u> Välj $w \in G$, välj $\varepsilon > 0$ s.a. $D(f(w), \varepsilon) \subseteq H$.

f kontinuerlig $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(D(w,\delta)) \subseteq D(f(w), \varepsilon)$

$D(f(w), \varepsilon)$ enkelt sammanhängande $\Rightarrow \exists g$ holomorf i $D(f(w), \varepsilon)$ s.a. $u = \operatorname{Re} g$ i $D(f(w), \varepsilon)$

$\Rightarrow g \circ f$ holomorf i $D(w, \delta)$, $u \circ f = \operatorname{Re}(g \circ f) \underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$

$\underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} u \circ f$ harmonis i $D(w, \delta) \Rightarrow u \circ f$ harmonisk i G ty w godtycklig, harmonisk lokal egenskap.

Föreläsning 24/9

Repetition:

$u: G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ harmonisk om $u \in C^2$ och $\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$

Proposition 6.3: Om f holomorf, då är $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ harmonisk

Sats 6.6: om u harmonisk i enkelt sammanhängande område G, då $\exists f$ holomorf i G s.a. $\operatorname{Re} f$ i G. $v = \operatorname{Im} f$ kallas harmoniskt konjugat till u.

Utvikning: harmoniska funktioner $u: I \to \mathbb{R}$, $I = (a,b)$

$\Delta u = \frac{d^2u}{dx} = 0$

= linjär!

Medelvärdessatsen för harmoniska funktioner (Sats 6.10)

Om u harmonisk i $G \subseteq \mathbb{C}$, $\bar{D}(w,r) \subseteq G$, då är

$$u(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w + re^{it})\,dt$$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Välj $\varepsilon > 0$ s.a. $D(w, r+\varepsilon) \subseteq G$, enkelt sammanhängande.

$\underset{\text{Sats 6.6}}{\Longrightarrow}$ $\exists f$ holomorf i $D(w, r+\varepsilon)$, $u = \operatorname{Re} f$ i $D(w, r+\varepsilon)$

$$f(w) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \left[\begin{array}{l} \gamma(t) = w + re^{it},\ t \in [0, 2\pi] \\ \gamma'(t) = ire^{it} \end{array}\right] = \frac{1}{2\pi \cancel{i}\cancel{r}} \int_0^{2\pi} \frac{f(w+re^{it})\cancel{ire^{it}}}{\cancel{re^{it}}}\,dt$$

$$\Longrightarrow u(w) = \operatorname{Re} f(w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(w+re^{it})\,dt \quad \square$$

Maximumprincipen (Sats 6.10)

Om u harmonisk i G och om u antar max i området (dvs. $\exists w \in G: u(w) = \sup_{z \in G} u(z)$), då är u konstant.

Bevis $\longrightarrow$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Antag $\exists w \in G : u(w) = \sup_{z \in G} u(z)$.

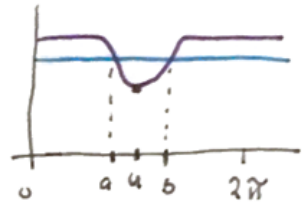
Vill visa $u \equiv u(w)$ i G.

Steg 1: Visar att om $\bar{D}(w,R) \subseteq G \Rightarrow u \equiv u(w)$ i $\bar{D}(w,R)$

Steg 2: Visar $u \equiv u(w)$ i hela G.

Steg 1: Antag $\bar{D}(w,R) \subseteq G$. Välj $0 < r \leq R$. Enligt medelvärdessatsen $u(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+re^{it})\,dt$. Om $u(w+re^{it}) < u(w)$ för $t_0 \in [0,2\pi]$ då

$\overset{u \text{ kont.}}{\Longrightarrow}$ $u(w+re^{it}) \leq u(w) - \varepsilon$ för $t \in [a,b]$, $b > a$, $\varepsilon > 0$.



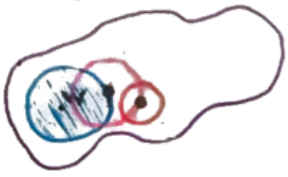
punkten: $u(w+re^{it})$

$$\Rightarrow u(w) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w+re^{it})\,dt \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_a^b u(w) - \varepsilon\,dt + \underbrace{\int u(w)\,dt}_{\text{resten}}\right) =$$

$$= u(w) - \frac{\varepsilon(b-a)}{2\pi}$$ motsägelse!

$\Rightarrow u \equiv u(w)$ i $\bar{D}(w,R)$.

Steg 2: överkursövning visa steg 2 rigorost.



← om man tar en punkt i randen och sätter det som en ny cirkels mittpunkt, så kan man täcka hela området med cirklar. $\square$

Svaga maximumprincipen:

Om u harmonisk på begränsat område, u kontinuerlig på $\bar{G} = G \cup \partial G$, då antar u sitt max på ∂G.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ G begränsad $\Rightarrow \bar{G}$ kompakt u kontinuerlig på $\bar{G}$

$\overset{\text{Sats A.1}}{\Longrightarrow}$ u antar max på $\bar{G}$. Om u antar max i $G \overset{\text{max prin.}}{\Longrightarrow}$ u konstant i G.

$\overset{u \text{ kont.}}{\Longrightarrow}$ u konstant på $\bar{G} \Rightarrow$ speciellt antar u max på ∂G. $\square$

Kor 6.13: Om u, v harmonisk i begränsat område G, kontinuerlig på $\bar{G}$, $u = v$ på ∂G då är $u \equiv v$ i G.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $\Delta(u-v) = \Delta u - \Delta v = 0$, $u - v \in C^2 \Rightarrow u - v$ harmonisk i G.

Kontinuerlig på $\bar{G}$, $u - v = 0$ på $\partial G \xRightarrow{\text{sv. maxprinc}} u - v \leq 0$ i G

P.s.s. $v - u \leq 0$ i $G \Rightarrow u \equiv v$ i G $\square$

Maximummodulusprincipen (Kor 6.11)

Om f holomorf i G och $|f|$ antar max i G, då är f konstant i G.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Antag $|f|$ antar max i $w \in G$. Skriv $f(w) = re^{i\theta}$, dvs $|f(w)| = r$

Låt $u(z) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f) \xRightarrow{\text{prop 6.3}} u$ harmonisk i G.

$u(z) = \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(z)) \leq |e^{i\theta} f(z)| = |f(z)| \leq |f(w)| = r = u(w)$.

dvs. u antar max i $w \xRightarrow{\text{max princ.}} u$ konstant i G

$\xRightarrow{\text{CR ekv.}} e^{-i\theta} f$ konstant $\Rightarrow f$ konstant. $\square$

Exempel: Finns det f holomorf i $D(0,1)$ s.a. $|f(z)| = 2 - |z|^2$?

Lösning: $2 - |z|^2$ antar max i $0 \in D(0,1)$

Dock så är den inte konstant $\underset{\text{max med. princ.}}{\Rightarrow}$ ej $|f|$ för f holomorf

---

Vi vet hur man räknar ut $\int_\gamma \frac{f(z)}{p(z)} dz$, f holomorf, p polynom, γ sluten kurva

Men vad blir $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz$?

Idé: i punkter där $\sin z = 0$ (singulariteten för $\frac{e^z}{\sin z}$) skriv $\frac{e^z}{\sin z}$ som potensserie, t.ex. $\frac{e^z}{\sin z} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ ← Laurentserieutveckling

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{\sin z} dz = \int_{|z|=1} \sum c_k z^k dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{|z|=1} c_k z^k dz = 2\pi i \underbrace{c_{-1}}_{\text{residy}}$$

Kallas **Residykalkyl**

Serier:

Serien $\sum_1^\infty b_k$ är konvergent om $\sum_1^n b_k$ konvergerar, annars divergent. Låter även $\sum_1^\infty b_k$ beteckna eventuelt gränsvärde $\sum_1^\infty b_k$ är absolutkonvergent om $\sum_1^\infty |b_k|$ konvergent.

Sats 7.20: Absolutkonvergent $\rightarrow$ konvergent.

Funktionföljder & serier:

Låt $f_n : G \to \mathbb{C}$ vara funktionsföljd, $A \subseteq G$.

Definition: a) f_n konvergerar likformigt mot f på A om

$$\sup_{z \in A} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

b) $\sum_1^\infty f_k$ konvergent likformig på A om $\forall z \in A$, $\sum_1^\infty f_k(z)$ konvergent, och $\sum_1^n f_k \xrightarrow[\text{på } A]{\text{lik.f.}} \sum_1^\infty f_k$.

$\boxed{\text{Föreläsning 25/9}}$

Funktionsföljd och serier:

Proposition 7.25:

a) om f_n kontinuerlig G, $A \subseteq G$, $f_n \xrightarrow[\text{på } A]{\text{lik f}} f$, då är f kontinuerlig på A.

b) Om f_k kontinuerlig, $\sum_1^\infty f_k$ konvergerar likformigt på A, då är $\sum_1^\infty f_k$ kontinuerlig på A.

OBS! om $\sum_1^\infty f_k$ konvergerar likformigt på A, $|g| \leq M$ funktion på A, $\sum_1^\infty f_k g$ konvergerar likformigt. g måste inte vara kontinuerlig.

Proposition 7.27: f_n kontinuerlig i G, γ styckvis glatt kurva i G

a) Om $f_n \xrightarrow[\text{på } \gamma]{\text{lik f}} f$, då $\int_\gamma f_n \, dz \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\gamma f \, dz$

b) Om $\sum_1^\infty f_k$ konvergerar likformigt på γ, då $\int_\gamma \sum_1^\infty f_k dz = \sum_1^\infty \int_\gamma f_k \, dz$

Bevis $\longrightarrow$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ a) $\left| \int_\gamma f_n \, dz - \int_\gamma f \, dz \right| = \left| \int_\gamma (f_n - f) \, dz \right| \leq$

Δ olikh. $\int$ $\leq \max_{z \in \gamma} |f_n(z) - f(z)| \cdot |\gamma| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

b) $\int_\gamma \sum_1^\infty f_k \, dz = \lim_{n \to \infty} \int_\gamma \sum_1^n f_k \, dz = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \int_\gamma f_k \, dz = \sum_1^\infty \int_\gamma f_k \, dz$ $\square$

Potensserier:

En funktionsserie på formen $\sum_0^\infty c_k (z - z_0)^k$, $c_k \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ kallas potensserie (centrerad i z_0).

Sats 7.31: Varje potensserie $\sum_0^\infty c_k (z - z_0)^k$ har en konvergensradie $R \in [0, \infty]$ s.a.

i) serien konvergerar absolut på $D(z_0, R)$. ($\mathbb{C}$ om $R = \infty$)

ii) serien konvergerar likformigt på $\bar{D}(z_0, r)$, $r < R$

iii) serien divergerar utanför $\bar{D}(z_0, R)$.

Konvergenskriterier:

Kvotkriteriet: om $\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \xrightarrow{k \to \infty} C$, då $R = \frac{1}{C}$ ($R = \infty$ om $C = 0$, $R = 0$ om $C = \infty$)

Rotkriteriet: Om $|c_k|^{1/k} \to C$, då $R = 1/C$. Generellt är $R = \frac{1}{C}$ där $C = \limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k}$

Exempel: Bestäm konvergensradien för $\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!}$

Lösning: $c_k = \frac{1}{k!}$, $\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0 \overset{\text{kvotkrit.}}{\Longrightarrow} R = \infty$

Exempel: Bestäm konvergensradien för $\sum_0^\infty \frac{i^k z^{2k}}{3^k}$

Koefficienten c_{2k+1} finns ej pga z endast innehåller jämna potenser

Lösning: $c_{2k} = \frac{i^k}{3^k}$, $c_{2k+1} = 0$

$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k} = \limsup_{k \to \infty} |c_{2k}|^{1/2k} = \limsup_{k \to \infty} \left(\frac{1}{3^k}\right)^{1/2k} = \frac{1}{\sqrt{3}} \overset{\text{rotkrit.}}{\Longrightarrow} R = \sqrt{3}$

Taylorutvecklingar

Sats 8.1 Om $f(z) = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k$ har konvergensradien $R>0$, då är $f(z)$ holomorf i $D(z_0, R)$ (i $\mathbb{C}$ om $R=\infty$)

Bevis: $c_k(z-z_0)^k$ kontinuerlig, $\sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ konvergerar likformigt på $\bar{D}(z_0,r)$, $r<R$ $\overset{\text{Prop 7.25b}}{\Longrightarrow}$ f kontinuerlig på $\bar{D}(z_0,r)$ $\underset{r\to R}{\overset{\text{låt}}{\Longrightarrow}}$ f kontinuerlig i $D(z_0,R)$. Låt $\gamma: [a,b] \to D(z_0,R)$ vara styckvis glatt sluten kurva

$|\gamma(t)-z_0|$ kontinuerlig funktion på $[a,b]$ ← kompakt

$\underset{\text{Sats A.1}}{\Longrightarrow}$ $\exists t_0 \in [a,b] : \sup|\gamma(t)-z_0| = |\gamma(t_0)-z_0| = r < R$

$\Rightarrow \gamma \subseteq \bar{D}(z_0,r) \Rightarrow \sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ konvergerar likformig på γ!

$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz \overset{7.25b}{=} \sum_0^\infty \int_\gamma c_k(z-z_0)^k\,dz = \left[\int_\gamma c_k(z-z_0)^k\,dz = 0 \ \forall k \text{ enligt CS}\right] =$

$= 0 \Longrightarrow$ memorera f holomorf i $D(z_0,R)$

OBS! Ger oss massor av holomorfa funktioner.

Välj c_k: $|c_k| \leq M \Rightarrow \sum_0^\infty c_k z^k$ holomorf i $D(0,1)$ om $|c_k| \leq \frac{M}{k!}$ då $\sum_0^\infty c_k z^k$ hel.

Sats 8.2 Om $f(z) = \sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ har konvergensradien $R>0$, då $f'(z) = \sum_1^\infty k c_k (z-z_0)^{k-1}$ i $D(z_0,R)$

Bevis: Låt $0<r<R$. För $z \in D(z_0,r)$: $f'(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z_0|=r} \frac{f(w)}{(w-z)^2}\,dw$

$\sum_0^\infty c_k(w-z_0)^k$ konvergerar likformigt på $C(z_0,r)$

$\left|\frac{1}{(w-z)^2}\right| \leq M$ på $C(z_0,r) \Rightarrow \sum_0^\infty \frac{c_k(w-z_0)^k}{(w-z)^2}$ konvergerar likformigt på γ

$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=r} \frac{\sum_0^\infty c_k(w-z_0)^k}{(w-z)^2}\,dw \overset{7.25b}{=} \sum_0^\infty c_k \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(w-z_0)^k}{(w-z)^2}\,dw \overset{\text{CIF}}{=} \sum_0^\infty c_k\left((w-z_0)^k\right)'_{w=z} =$

$= \sum_1^\infty k c_k (z-z_0)^{k-1}$ $\square$

OBS! $\sum k c_k (z-z_0)^{k-1}$ har samma konvergensradie

Exempel: Visa $\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$

Lösning: Notera $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!}$ hel. $f'(z) = \sum_1^\infty \frac{k z^{k-1}}{k!} = \sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = f(z)$

Sats 8.2

$(fe^{-z})' = f'e^{-z} - fe^{-z} = 0 \quad (f = f')$

$\overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} fe^{-z}$ konstant $\Rightarrow f = ce^z$, $c = f(0) = 1 \Rightarrow f = e^z$

Får $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$

Kor 8.5 Om $f(z) = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k$, konvergensradie $R > 0$ då

$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$

Bevis: Iteration av Sats 8.2 ger $f^{(k)}(z) = \sum_{m \geq k} m(m-1)\dots(m-k+1)c_m (z-z_0)^{m-k}$

$\Rightarrow f^{(k)}(z_0) = k!\, c_k$ $\square$

Föreläsning 28/9

Fortsättning: Taylorutvecklingar

- $f(z) = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k$ holomorf i $D(z_0, R)$, R konvergensradien (8.2)
- $f'(z) = \sum_1^\infty k \cdot c_k (z-z_0)^{k-1}$ (8.2)
- $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$ (kor 8.5)

Kor 8.6

Finns bara 1 potensserie till varje funktion (holomorf)

Om $\sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k = \sum_0^\infty d_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, r)$, $r > 0$, då är $c_k = d_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Bevis: $f(z) = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k = \sum_0^\infty d_k (z-z_0)^k$

$c_k \underset{8.5}{=} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \underset{8.5}{=} d_k$ $\square$

Exempel: $\sum_0^\infty \frac{z^k}{k!} = e^z$, $\sum_0^\infty z^k = \{$konvergensradie 1, holomorf i $D(0,1)\} =$

$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = \sin z \quad \Rightarrow \sum_0^\infty z^k = \frac{1}{1-z} \longleftarrow$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

Taylorutveckling av holomorfa funktioner (8.8) Bevisliste

Antag att f holomorf i $D(z_0, R)$

Då har f en potensserieutveckling (Taylorutveckling)

$$f(z) = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k \text{ i } D(z_0, R)$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz, \quad 0 < r < R$$

cirkeln ska ligga i den vi började med.

derivator av f i centrumpunkten

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Antar först $z_0 = 0$. Välj $z \in D(0,R)$ och $|z| < r < R$

$$f(z) \overset{CIF}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w-z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{z} \cdot \frac{1}{1 - z/w}\, dw =$$

$$= \left[\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{r} < 1 \implies \frac{1}{1-z/w} = \sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^k \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^k dw =$$

$= \{$ serien måste konvergera likformigt på cirkeln. $=$ holomorf funktion, kompakt cirkel. $\} = \Big[\sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)$ konvergerar likformigt på $(0,r)$,

$\left|\frac{f(w)}{w}\right| \leq M$ på $C(0,r)$ så $\frac{f(w)}{w} \sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^k$ likformigt konvergent! $\Big]$

$$\underset{\text{Prop 7.27b}}{=} \sum_0^\infty z_k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\, dw = \sum_0^\infty c_k z^k.$$

För $z_0 \neq 0$ låt $w = z - z_0$. $g(w) = f(z)$ holomorf $D(0,R)$

$$\implies f(z) = g(w) = \sum_0^\infty c_k w^k = \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k, \quad c_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!} = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \square$$

OBS! $\sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k$ har konveringsradie $\geq R$

En funktion som lokalt kan skrivas som konvergent potensserie kallas analytisk, komplexa funktioner är analytiska omm holomorfa.

Finns reella funktioner på $\mathbb{R}$ som är C^∞ men ej analytiska.

t.ex. $u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$

Exempel: Hitta Taylorutvecklingen till $\frac{1}{1+z^2}$ centrum i 0, och konvergensradien.

Lösning: $\frac{1}{1+z^2}$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} \overset{|-z^2|<1}{=} \sum_0^\infty (-z^2)^k = (-1)^0 \cdot z^0 + 0 \cdot z^1 + (-1) z^2 + 0 \cdot z^3 + \dots =$$

$$= \sum_0^\infty c_k z^k \quad \text{då} \quad c_{2k} = (-1)^k, \; c_{2k+1} = 0$$

$$\limsup_{k \to \infty} |c_k|^{1/k} = 1 \longrightarrow \underline{\text{konvergensradie} = 1}$$

Cauchys uppskattningar (kor 8.12)

Antag f holomorf i $D(w, R)$ och $|f| \leq M$ där.

Då fås $|f^{(k)}(w)| \leq \frac{k! M}{R^k}$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Låt $r < R$, $|f^{(k)}(w)| \overset{\text{CIF för } f^{(k)}}{=} \left| \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz \right| \overset{\Delta \text{ olik } \int}{\leq}$

$$\leq \frac{k!}{2\pi} \max_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{r^{k+1}} 2\pi r \leq \frac{k! M}{r^k} \quad \square$$

Exempel: Antag f hel och $|f(z)| \leq |z| \; \forall z \in \mathbb{C}$, visa att $f(z) = Cz$, $C \in \mathbb{C}$

Lösning: Låt $w \in \mathbb{C}$ godtyckligt. Vill visa $f''(w) = 0$.

f hel, speciellt f holomorf i $D(w, R)$ för alla $R > 0$

För $z \in D(w, r)$ har vi $|f(z)| \leq |z| = |z - w + w| \overset{\Delta \text{ olik}}{\leq} |z - w| + |w| \leq R + |w|$

$$|f''(w)| \overset{\text{CU}}{\leq} \frac{2(R + |w|)}{R^2} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

$$\Longrightarrow f''(w) = 0 \xrightarrow[\text{godt.}]{w} f' \equiv 0 \xrightarrow{\text{Sats}} f' = C, \; C \in \mathbb{C} \longrightarrow f' = (Cz)'$$

$$\xrightarrow{\text{Sats}} f = Cz + D, \; D \in \mathbb{C}, \text{ men } |D| = |f(0)| \leq |0| = 0 \longrightarrow D$$

$f = Cz$ Variant på Liouvilles sats.

Räknestuga 28/9

7.25 b) Hitta en potensserie & avgör konvergensradien för

$\frac{1}{3 - z/2}$.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \text{ om } |z| < 1$$

$$\frac{1}{3 - z/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - z/6}\right) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{6}\right)^n \quad \left|\frac{z}{6}\right| < 1 \iff |z| < 6$$

7.26 Hitta en potensserie runt origo för a) $\cos z$ b) $\cos(z^2)$ c) $z^2 \sin z$ d) $\sin^2(z)$

alla funktioner är holomorfa.
Går att utveckla alla som potensserie runt alla punkter.

Vet att $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)\, z^n}{n!} = \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!} z^{2n}$

$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$ – variera mellan + 0 -

a) $f(z) = \cos z \quad f(0) = 1$

$f'(z) = -\sin z \quad f'(0) = 0$

$f''(z) = -\cos z \quad f''(0) = -1$

$f^{(3)}(z) = \sin z \quad f^{(3)}(0) = 0$

$f^{(4)}(z) = \cos z = f(z)$

b) Hade kunnat göra samma, men vet vad $\cos z$ är

$\cos(z^2) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{4n}$

c) Vet att $\sin z = -(\cos z)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 2n\, z^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$

derivera serien term för term

$z^2 \sin z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} z^{2n+1}$ (multat med z^2)

d) $f(z) = (\sin z)^2$, $f'(z) = 2 \sin z \cos z = \ldots = \sin(2z)$

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$, $(\sin z)^2 = f(z)$

primitiv funktion $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n} + \cancel{C}$ $\quad (\sin(0))^2 = 0 = C$

7.27 a) Antag att (c_n) är begränsad.

Visa att konvergensradien för $\sum c_n (z-z_0)^n$ är ≥ 1.

b) Antag att (c_n) inte konvergerar mot 0. Visa att konvergensradien för $\sum c_n (z-z_0)^n$ är ≤ 1.

a) $\exists M \in \mathbb{R}$ s.a. $|c_n| \leq M \iff \frac{1}{|c_n|} \geq \frac{1}{M}$

enligt rotkriteriet $\quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M}} = 1$

b) Antag att $\exists c > 0$ s.a. $|c_n| \geq c \quad \forall n$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c}} = 1$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \frac{1}{\sqrt[n]{c}} = 1$$

7.28 a) Hitta potensserien för $f(z) = \frac{1}{z}$ runt 1.

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{1-(1-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n$$

7.33 Hitta konvergensradien för:

b) $\sum_{k=0}^{\infty} k^n z^k \quad n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ c) $\sum z^k$ $\quad$ e) $\sum \frac{z^k}{k^k}$

b) $\boxed{n \geq 0}$ $\quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \frac{(k+1)^n}{k^n} = \{\text{binomialsatsen}\} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^n + \binom{n}{1} k^{n-1} + \ldots + 1}{k^n} = \lim_{k\to\infty} 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k^n} = 1 \longrightarrow \underline{R = 1}$$

c) $n \leq 0$, $m = -n$ $\longrightarrow \sum \frac{z^k}{k^m}$, $\quad \lim_{k\to\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k^m}{(k+1)^m} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^m}{k^m + k^{m-1}\binom{m}{1} + \ldots + 1} =$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{k}\binom{m}{1} + \ldots + \frac{1}{k^m}} = 1 \qquad \underline{R = 1}$$

e) $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \longrightarrow 0 \qquad R = \text{"}\frac{1}{0}\text{"} = \infty$

7.33 Hitta konvergensradien för $\sum_{k=0}^{\infty} z^{k!}$

skriver ut serien: $1 + z + z^2 + z^6 + z^{24} + \dots$

Alltså: $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = 1$

För att använda rot/kvotkriteriet måste $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}$ existera

Det gör den inte! Hade kunnat använda limsup.

Om $|z| < 1$, $|z| = r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r} < \infty$$

Absolutkonvergent $\rightarrow$ radien är åtminstone 1

Om $|z| > 1$, $|z| = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ $\Rightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} |z|^{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (1+\varepsilon)^{k!} \overset{\text{övning}}{=} \infty$

Divergent $\Rightarrow$ $R = 1$ Definition av konvergensradien.

8.17 Hitta Laurentserien för $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)}$ centrerad vid $z = 1$

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \underbrace{\frac{1}{z-1}}_{\text{redan centrerad}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2+(z-1)}}_{\text{för att centrera}} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\left(\frac{1-z}{2}\right)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{1-z}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(z-1)^n}_{\text{användbart om man tex vill beräkna integralen av detta.}}$$

8.19 Hitta Laurentserien för $\frac{z-2}{z+1}$ runt $z = -1$

$$f(z) = \frac{1}{z+1}\cdot(-3 + (z+1)) = \underbrace{-3(z+1)^{-1}}_{\text{uppfyllt}} + 1(z+1)$$

endast två termer i summan

8.23 Visa att $\frac{z-1}{z-2} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^k}$, $|z-1| > 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{\frac{z-1}{z-1} - \frac{1}{z-1}} = \frac{1}{\left(\frac{z-2}{z-1}\right)} = \frac{z-1}{z-2} \quad \square$$

$\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$

8.26 Hitta Laurentserien för $\sec z = \frac{1}{\cos z}$ runt 0.

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \text{Ansats } \sec z = \sum_{m=0}^{\infty} S_m z^m$$

$$1 = \sec z \cdot \cos z = \sum_{n,m} \frac{(-1)^n S_m}{(2n)!} z^{2n+m} = \frac{(-1)^0 S_0}{(2\cdot 0)!} + \frac{(-1)^0 S_1}{(2\cdot 0)!} z + \left(\frac{(-1)^1 S_0}{(2\cdot 1)!} + S_2\right) z^2 +$$

$$+ \left(S_3 + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!} S_1\right) z^3 + \left(S_4 + \frac{(-1)^1}{(2\cdot 1)!} S_2 + \frac{(-1)^2}{(2\cdot 2)!} S_6\right) z^4 =$$

{ alla olika sätt man kan få z^4 med (1,0) eller (2,0) olika n och m } =

$$= \underset{1}{S_0} + \underset{0}{S_1} z + \underset{0}{\left(S_2 - \frac{S_0}{2}\right)} z^2 + \underset{0}{\left(S_3 - \frac{S_1}{2}\right)} z^3 + \underset{0}{\left(S_4 - \frac{S_2}{2} + \frac{S_0}{4!}\right)} z^4 + \dots$$

$$\left.\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 - \frac{S_0}{2} &= 0 \\ S_3 - \frac{S_1}{2} &= 0 \\ S_4 - \frac{S_2}{2} + \frac{S_0}{4!} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 0 \\ S_2 &= 1/2 \\ S_3 &= 0 \\ S_4 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{24} = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

$$\sec z = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{5}{24} z^4 + \dots$$

8.28 Hitta multipliciteten av nollställerna för

a) $f(z) = e^z - 1$, $z_0 = 2\pi i k$

b) $f(z) = \sin z - \tan z$, $z_0 = 0$

(a) $f(2\pi i k) = e^{2\pi i k} - 1 = 0$, $f'(z) = e^z$ $\quad f'(2\pi i k) = 1 \neq 0$

multipliciteten = 1

(b) $f(0) = \sin(0) - \tan(0) = 0$

$f'(z) = \cos(z) - \frac{1}{\cos^2(z)}$, $f'(0) = 1 - 1 = 0$.

$f''(z) = -\sin z - \frac{2\cancel{\cos z} \sin z}{\cos^{\cancel{4}} z} = -\sin(z) + \frac{2\sin z}{\cos^3 z}$ $\quad f''(0) = 0$

$$f'''(z) = \underbrace{-\cos z}_{-1} - \underbrace{2}_{2} \underbrace{\frac{\cos^4 z - \sin z \cdot 3\cos^2 z(-\sin z)}{\cos^6 z}}_{1} = -3 \neq 0$$

Multipliciteten = 3

$\boxed{\text{Föreläsning 1/10}}$

Kollarium: Om $f(z_0)=0$ men $f \not\equiv 0$, då är z_0 ett isolerat nollställe. dvs. $\exists r>0$ s.a. $f(z)\neq 0$ i $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ enligt klass av nollställe

$f(z)=(z-z_0)^m g(z)$, g holomorf så kontinuerlig

$g(z_0)\neq 0 \Rightarrow \exists r>0 : g(z)\neq 0$ i $D(z_0,r)$

$(z-z_0)^m \neq 0$ i $D(z_0,r)\setminus\{z_0\} \to f\neq 0$ i $D(z_0,r)\setminus\{z_0\}$ $\square$

kan ej hända
nollställen går mot

Kan finnas många nollställen, måste finnas skiva runt.

Identitetsprincipen Bevislistan

Antag f,g holomorf i G, $f(z_n)=g(z_n)$, där z_n följd av distinkta punkter i G s.a. $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_\infty$

Då är $f\equiv g$ i G.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $h=f-g$ holomorf i G, $h(z_n)=0$ $\forall n\in\mathbb{N}$, h kontinuerlig

$\Rightarrow h(z_\infty) = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = 0$

Får z_∞ nollställe till h, ej isolerat $\xrightarrow[\text{klass}]{\text{kor till}}$ $h\equiv 0$ i G, dvs. $f\equiv g$ i G $\square$

Exempel: Visa $\sin^2 z+\cos^2 z=1$

$f(z)=\sin^2 z+\cos^2 z$, $g(z)=1$, holomorfa i $\mathbb{C}$.

$f(x)=g(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ vet att de är identiska på reella linjen.

Lösning: Låt $z_n=1/n$, $z_n\to 0\in\mathbb{C}$

$f(z_n)=g(z_n) \xrightarrow[\text{princ.}]{\text{id.}} f\equiv g$ i $\mathbb{C}$

OBS! Om $f(z_n)=g(z_n)$, $z_n\to z_\infty\in G$ då behöver inte $f\equiv g$.

Laurentserier

Definition: En serie på formen $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ kallas för en Laurentserie med centrum i z_0.

Kan skrivas $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\sum_{-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k}_{\mathrm{II}}$

R_2 konvergensradie för I. $w = \frac{1}{z-z_0}$, $\mathrm{II} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k$ har konv. radie $1/R_1$ $\rightarrow$ II konvergerar då $|w| < 1/R_1 \iff |z-z_0| > R_1$

Summan av de konvergerande där båda konvergerar.

$\Rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ konvergent i annulusen

$$A(z_0, R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$$

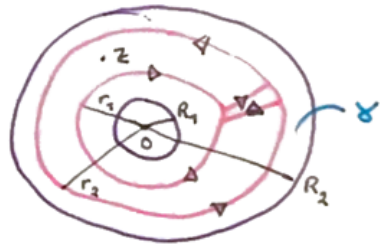
Laurentserieutvecklingar av holomorfa funktioner: Beislistan

Antag f holomorf i $A(z_0, R_1, R_2)$.

Då har f en Laurentserieutveckling (LSV)

$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$; $A(z_0, R_1, R_2)$ där

$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz$, $R_1 < r < R_2$



Bevis: Antag först $z_0 = 0$. Välj $z \in A(z_0, R_1, R_2)$ och r_1, r_2 s.a. $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$. Låt γ vara som på bild.

$$f(z) \overset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(w)}{w-z} dw = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\mathrm{I}} + \underbrace{-\frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z} dw}_{\mathrm{II}}$$

$$\mathrm{I} = \left[\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{w}\left(\frac{1}{1-z/w}\right) \overset{|z/w|<1}{=} \frac{f(w)}{w} \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{w^k} \quad \text{likformig konvergens på } C(0, r_2) \right] =$$

obs $<1 \rightarrow$ geomsumma

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w} \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{w^k} dw \overset{\text{likf konv}}{=} \sum_0^{\infty} z^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw.$$

$$\mathrm{II} = \left[-\frac{f(w)}{w-z} = \frac{f(w)}{z-w} = \frac{f(w)}{z}\left(\frac{1}{1-w/z}\right) \overset{|w/z|<1}{=} \frac{f(w)}{z} \sum_0^{\infty} \frac{w^k}{z^k} \quad \text{likf. konv. på } C(0, r_1) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{z} \sum_0^{\infty} \frac{w^k}{z^k} dw \overset{\text{likf konv}}{=} \sum_0^{\infty} z^{-k-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} f(w) w^k dw = \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w^{k+1}} dw$$

$\rightarrow$

$$CS \to \frac{1}{2\pi i}\int_{R_1<r<R_2} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw$$

$$\to f(z) = I + II = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k, \text{ där } c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{f(w)}{w^{k+1}}\,dw,\ R_1<r<R_2$$

Om $z_0 \neq 0$ låt $w = z - z_0$, $g(w) = f(z)$ får

$$f(z) = g(w) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k w^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \quad \square$$

<u>Exempel:</u> Bestäm LSU av $\frac{1}{1-z}$ centrerad i 0, giltig i $A(0,1,\infty)$

<u>Lösning:</u> $\frac{1}{1-z}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ $\quad c_k = \begin{cases} 0, & k<0 \\ 1, & k\geq 0 \end{cases}$

Annulus med centrum i 0, inre radie 0

$1/1-z$ holomorf i $A(0,0,1)$ identisk med Taylor i cirkelskiven.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{0}^{\infty} c_k z^k$$ divergerar utanför

Titta på allt utanför istället för $A(0,1,\infty)$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\,\frac{1}{1-1/z} \overset{|z|>1}{=} -\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^k = -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k,$$

vill att det ska vara lika

$$c_k = \begin{cases} -1, & k\leq -1 \\ 0, & k>-1 \end{cases}$$

<u>Exempel:</u> Om $\sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$ är LSU till $\frac{1}{\sin z}$ giltig i $A(0,0,\pi)$

bestäm $c_{-1}, c_0, c_1, c_2, c_3$

<u>Lösning:</u> $\frac{1}{\sin z}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

holomorf i denna annulus.

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7)$$

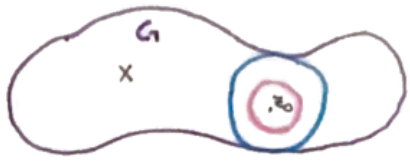
$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z\underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + O(z^6)\right)}_{\text{antar litet}}} = \frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \dots\right)^k = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots \frac{z^4}{36} + \dots\right.$$

$$= \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 + O(z^5)$$

$$\to c_{-1} = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 1/6,\ c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{7}{360}$$

$\boxed{\text{Föreläsning 2/10}}$

LSU (fortsättning)



f holomorf i G

Lemma: Antag $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$, $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ i $A(z_0, R_1, R_2)$

Då är $f'(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1}$ och $f(z)g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $A(z_0, R_1, R_2)$

i $A(z_0, R_1, R_2)$

där $c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m}$.

Bevis: Visar andra påståendet Enligt satsen om LSU gäller

$$f(z)g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ i } A(z_0, R_1, R_2) \text{ där } c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)g(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{\left(\sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k\right)\left(\sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k\right)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \underset{\text{konv}}{\overset{\text{likf}}{=}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{(z-z_0)^m (z-z_0)^l}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz}_{\substack{1 \text{ om } m+l=k \\ 0 \text{ annars}}}\right) =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m b_{k-m} \qquad \square$$

Exempel: Hitta LSU av $\frac{1}{z^2}$ centrerad i -1, giltig i $A(-1, 1, \infty)$

Lösning: $\frac{1}{z^2}$ holomorf i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

Notera: $\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)'$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-1} = \frac{1}{z+1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}}\right) \overset{|z|>1}{=} \frac{1}{z+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z+1}\right)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} (z+1)^k$$

$$\frac{1}{z^2} = -\left(\frac{1}{z}\right)' \underset{\text{Lemma}}{=} -\sum_{k=-\infty}^{-1} k(z+1)^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{-2} (-k-1)(z+1)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z+1)^k,$$

Ger om k
därav $-k \to (-k-1)$

$$c_k = \begin{cases} -k-1, & k \leq -2 \\ 0, & k > -2 \end{cases}$$

Isolerade singularitet

Definition: Om f holomorf i punktrad cirkelskiva $D(z_0, R)^\times = D(z, R) \setminus \{z_0\}$

då sägs f ha en isolerad singularitet i z_0.

Exempel: • $\frac{1}{z^2+1}$ x^i, x_{-i} har isolerad singularitet i ± 1

• $\frac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$ har isolerade singulariteter i $\frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

... 0 ... men 0 icke isolerad singularitet.

• z holomorf i $D(0,1)^\times$, isolerad singularitet i 0...

Definition: Antag f har isolerad singularitet i z_0

Då är singulariteten z_0.

i) hävbar om $\exists g$ holomorf i $D(z_0,R)$ s.a. $f \equiv g$ i $D(z_0,R)^\times$

ii) en pol om $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$

iii) väsentlig annars.

Exempel: z har hävbar singularitet i 0.

• $\frac{\sin z}{z^2}$ har en pol i 0 $\lim_{z \to 0} \left| \frac{\sin z}{z^2} \right| \to \infty$

• $\sin(\frac{1}{z})$ har väsentlig singularitet i 0.

Klassifikation av isolerade singularitet (Sats 4.1, 4.2 R)

Antag z_0 isol. sing. till f. Då är singulariteten:

ⓐ hävbar omm $\lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$

ⓑ en pol omm $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ i $D(z_0,R)^\times$ $m \geq 1$, g holo i $D(z_0,R)$ $g(z_0) \neq 0$

m kallas då polens ordning.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ ⓐ $\Rightarrow$ z_0 hävbar singularitet, dvs $f(z) = g(z)$ i $D(z_0,R)^\times$,

g holomorf i $D(z,R) \Rightarrow \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) g(z) = 0 \cdot g(z) = 0$

kont.

ⓐ $\Leftarrow$ Låt $h(z) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z), & z \in D(z_0,R)^\times \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$

h holomorf i $D(z_0,R)^\times$. h kompakt deriverbar i z_0?

$\lim_{z \to z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$ enligt sats $\Rightarrow$ h holomorf i $D(z_0,R)$

$h(z) \overset{TU}{=} \sum_0^\infty c_k (z-z_0)^k = \begin{bmatrix} c_0 = h(z_0) = 0 \\ c_1 = h(z_1) = 0 \end{bmatrix} = \sum_2^\infty c_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^2 \sum_2^\infty c_k (z-z_0)^{k-2} =$

$\rightarrow$

$= (z-z_0)^2 g(z)$, g holomorf i $D(z_0,R)$ får $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^2} = g(z)$

i $D(z_0,R)^\times$ dvs z_0 hävbar singularitet

(b) $\Leftarrow$ $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \left| \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \right| = |g(z_0)| \lim_{z\to z_0} \frac{1}{|z-z_0|^m} = \infty$

$\Rightarrow$ $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty \Rightarrow f \neq 0$ i $D(z_0,\varepsilon)^\times$, $\varepsilon > 0 \Rightarrow h(z) = \frac{1}{f(z)}$

holomorf i $D(z_0,\varepsilon)^\times$. z_0 isol. sing. till h,

$\lim_{z\to z_0} |h(z)| = \frac{1}{\lim_{z\to z_0} |f(z)|} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow \lim_{z\to z_0} (z-z_0)h(z) = 0 \overset{a}{\Rightarrow}$

$\overset{a}{\Rightarrow}$ z_0 hävbar sing. till h, dvs. om $h(z)=0$ så är h holomorf i

$D(z,\varepsilon)$ z_0 nollställe till h, enda nollstället i $D(z_0,\varepsilon) \Rightarrow$

klass av nollställe $\Rightarrow$ $h(z) = (z-z_0)^m k(z)$, $m \geq 1$, k holomorf i $D(z_0,\varepsilon)$, $k(z_0) \neq 0$

Får alltså att $k \neq 0$ i $D(z_0,\varepsilon)$.

Låt $g(z) = \frac{1}{k(z)}$ holomorf i $D(z_0,\varepsilon)$, $g(z_0) = \frac{1}{k(z_0)} \neq 0$

Får $f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m k(z)} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ i $D(z_0,\varepsilon)^\times$

Låt $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ i $D(z_0,R)^\times \Rightarrow f(z)$ gäller i $D(z_0,R)^\times$. $\square$

Exempel.

- $\frac{\sin z}{z}$, 0 isol. sing. $\lim_{z\to 0} \frac{z \sin z}{z} = \sin 0 = 0 \Rightarrow$ 0 hävbar sing.

- $\frac{\sin z}{z^3}$, 0 isol. sing. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$ $\frac{\sin z}{z^3} = \frac{1}{z^3}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right) =$

$= \frac{1}{z^2}\underbrace{\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \dots\right)}_{g} = \left[g \text{ holomorf}, g(0) = 1\right] = \frac{g(z)}{z^2}$

Får att 0 är en pol av ordning 2.

Föreläsning 3/10

Isolerad singularitet (fortsättning)

f holomorf i $D(z_0, R)^\times$

i) hävbar, om man kan definiera $f(z_0)$ s.a f holomorf i $D(z_0, R)$

Enligt KIS omm $\lim_{z \to z_0} f(z) = 0$.

ii) pol om $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$. Enligt KIS omm $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m \geq 1$, g holomorf i $D(z_0, R)$, $g(z_0) \neq 0$. m kallas polens ordning

iii) väsentlig annars.

Sats 43R:

Antag f har isolerade singularitet i z_0 och $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, R)^\times$. Då är singularitet z_0.

a) hävbar omm $c_k = 0 \ \forall k < 0$

b) pol omm $\exists m \geq 1 : c_{-m} \neq 0$, medan $c_k = 0$, $k < -m$

c) väsentlig omm $c_k \neq 0$ för oändligt många negativa k.

Bevis: lämnas som nyttig övning

Exempel: $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, 0 isolerad singularitet. $\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{(1/z)^3}{3!} + \frac{(1/z)^5}{5!} - \dots =$

$= z^{-1} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-5} - \dots$ dvs. $c_k \neq 0$ för $k < 0$ och udda.

$\overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$ 0 väsentlig singularitet

Lemma: Om $\sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$ i $A(z_0, R_1, R_2)$, $R_1 < R_2$, då är $a_k = b_k \ \forall k \in \mathbb{Z}$

Bevis: Låt $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k (z-z_0)^k$, $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}} dz =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{\sum_{-\infty}^{\infty} a_m (z-z_0)^m}{(z-z_0)^{k+1}} dz \underset{\text{konv}}{\overset{\text{LIRS}}{=}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{(z-z_0)^m}{(z-z_0)^{k+1}} dz}_{\substack{1 \text{ om } m=k \\ 0 \text{ annars}}} = a_k \quad \square$$

Pss. $= b_k \Rightarrow a_k = b_k \ \forall k$

Residykalkyl

Definition: Låt f vara holomorf med isolerad singularitet i z_0, om $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, R)^*$, då definierar vi f:s residy i z_0

$\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1}$

Notera: $\int_{|z-z_0|=r} f(z)\,dz = \int_{|z-z_0|=r} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \, dz \overset{\text{likf}}{\underset{\text{konv}}{=}} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k \, dz}_{\substack{2\pi i \text{ då } k=-1 \\ 0 \text{ annars}}} = 2\pi i\, c_{-1} = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z_0} f$

$0 < r < R$

Definition: En sluten kurva γ är enkel om den ej skär sig själv (dvs. $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ om $a \leq t < s < b$)

Jordans kurvsats: om γ sluten enkel kurva, då omsluter γ ett område $\mathrm{int}(\gamma)$ (interior) kallat det inre av γ.

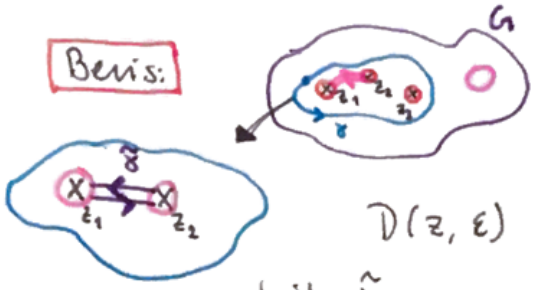
Faktum: Om γ sluten enkel kurva i G, och $\gamma \sim_G 0$, då $\mathrm{int}(\gamma) \subseteq G$

Residysatsen (Sats 9.10) Bevislistan

Antag f holomorf i G förutom isolerade singulariteten z_k, γ stycken glatta kurvor, enkla, positiv orientering nollhomotop kurva i G som undviker singulära z_k. Då är $\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f$

$\boxed{\text{Bevis}} \longrightarrow$

Bevis:



Numrera singulariteterna i $\mathrm{int}(\gamma)$: $z_1, \dots, z_N$. Välj $\varepsilon > 0$ s.a. $D(z, \varepsilon) \subseteq \mathrm{int}(\gamma)$, ej skär varann.

Låt $\tilde{\gamma}$ vara som på bilden.

Topologiskt faktum $\gamma \sim_{G \setminus \mathrm{sing}} \tilde{\gamma}$. $\Rightarrow \int_\gamma f\,dz \overset{\text{LS}}{=} \int_{\tilde{\gamma}} f\,dz = \sum_{i=1}^{N} \int_{|z-z_i| = \varepsilon/2} f(z)\,dz$

$$\int_{|z-z_i|=\varepsilon/2} f(z)\,dz = \int_{|z-z_i|=\varepsilon/2} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_i)^k\,dz = 2\pi i\, c_{-1} = 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z_i} f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f\,dz = \sum_{i=1}^{N} 2\pi i\, \mathrm{Res}_{z_i} f = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f. \quad \square$$

Räkna ut residyer:

Bevis listan

Prop. 9.11a: Om z_0 hävbar singulär till f, då är $\mathrm{Res}_{z_0} f = 0$

Bevis: Skriv $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, R)^\times$, z_0 hävbar $\overset{\text{Sats}}{\Rightarrow} c_k = 0$ $\forall k < 0$, speciellt $\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1} = 0$.

Bevislistan

Prop 1.3.R:

Om $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m \geq 1$, g holomorf i $D(z_0, R)$ (ej nödvändigt att $g(z_0) \neq 0$)

då är $\mathrm{Res}_{z_0} f = \dfrac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

Bevis: Skriv $g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, R)$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} \sum_{-\infty}^{\infty} d_k (z-z_0)^k = \sum_{k=-m}^{\infty} d_{k+m} (z-z_0)^k$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1} = d_{m-1} \overset{\text{Sats}}{=} \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \quad \square$$

Exempel: Bestäm $\mathrm{Res}_1 f$ där $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z\,(z-1)^2}$

Lösning: $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-1)^2}$, $g(z) = \dfrac{e^z}{\sin z}$ holomorf i omgrinning till 1.

Får $\mathrm{Res}_1 f \overset{\text{Prop.}}{=} \left(\dfrac{e^z}{\sin z}\right)'_{z=1} = \left[\left(\dfrac{e^z}{\sin z}\right)' = \dfrac{e^z \sin z - e^z \cos z}{\sin^2 z}\right] = \dfrac{e \cdot \sin 1 - e \cdot \cos 1}{\sin^2 1}$

Bevislistan

ordning 1

Prop 9.14: Låt f, g holomorf i $D(z_0, R)$, z_0 enkelt nollställe till g: Då är $\operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Enligt antagande $g(z) = (z-z_0)h(z)$, h holomorf i $D(z_0, R)$, $h(z_0) = g'(z_0) \neq 0$. Får $h \neq 0$ i $D(z_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

$$\Rightarrow \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z)/h(z_0)}{(z-z_0)}, \quad \frac{f}{h} \text{ holomorf i } D(z_0, \varepsilon)$$

$$\overset{\text{Prop 1.5A}}{\Longrightarrow} \operatorname{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{h(z_0)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)} \quad \square$$

$\boxed{\text{Storgruppsövning 3/10}}$

Exempel: Beräkna $\operatorname{Res}_{\pi} f$, $f(z) = \frac{e^z}{\sin z (z-1)^2}$

Lösning: $\sin \pi = 0$, $\sin'(\pi) = \cos \pi = -1 \neq 0$

$$\left(g(z) = \sum c_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+m} (z-z_0)^k \right)$$

nollställe av ordning m

$\Rightarrow$ π enkelt nollställe till $\sin z$.

$f(z) = \frac{g(z)}{\sin z}$, $g(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ holomorf i omgivning till π

$$\overset{\text{Prop 9.14}}{\Longrightarrow} \operatorname{Res}_{\pi} \frac{e^z/(z-1)^2}{\sin z} = \frac{\left(e^z/(z-1)^2\right)_{z=\pi}}{(\sin z)'_{|z=\pi}} = \frac{e^{\pi}/(\pi-1)^2}{\cos \pi} = -\frac{e^{\pi}}{(\pi-1)^2}$$

7.25 Skriv funktionen som potensserie med centrum i 0, samt bestäm konvergensradien.

ⓐ $\frac{1}{1+4z}$ ⓒ $\frac{z^2}{(4-z)^2}$ $\left[\frac{1}{1-\otimes} \overset{|\otimes|<1}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \otimes^k \right]$

Lösning: ⓐ $\frac{1}{1+4z} = \frac{1}{1-(-4z)} \overset{|z|<\frac{1}{4}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-4z)^k = \sum_0^{\infty} \underbrace{(-1)^k 4^k}_{c_k} z^k$

Rotkriteriet: $|c_k|^{1/k} = 4 \longrightarrow 4 \Rightarrow R = \frac{1}{4}$

ⓒ $\frac{1}{4-z} = \frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z}{4}} \overset{|z|<4}{=} \frac{1}{4} \sum_0^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^k = \sum_0^{\infty} \frac{z^k}{4^{k+1}}$. $\frac{1}{(4-z)^2} = \left(\frac{1}{4-z}\right)' = \left(\sum_0^{\infty} \frac{z^k}{4^{k+1}}\right)' \overset{\text{Sats}}{=}$

$$= \sum_1^{\infty} \frac{k z^{k-1}}{4^{k+1}} \Rightarrow \frac{z^2}{(4-z)^2} = \sum_1^{\infty} \frac{k z^{k+1}}{4^{k+1}} = \sum_2^{\infty} \frac{(k-1) z^k}{4^k}$$

Kvotkriteriet: $\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \frac{k 4^k}{4^{k+1}(k-1)} = \frac{k}{4(k-1)} \xrightarrow{k \to \infty} \frac{1}{4} \Rightarrow R = 4$

7.34 Hitta funktionen som ges av potensserien

ⓑ $\sum_1^\infty k(z-1)^{k-1}$ ⓒ $\sum_2^\infty k(k-1)z^k$

Lösning: ⓑ $\sum_1^\infty k(z-1)^{k-1} \underset{\text{Sats}}{=} \left(\sum_0^\infty (z-1)^k\right)' \overset{|z-1|<1}{=} \left(\frac{1}{1-(z-1)}\right)' = \left(\frac{1}{2-z}\right)' = \frac{1}{(2-z)^2}$

ⓒ $\sum_2^\infty k(k-1)z^k = z^2 \underbrace{\sum_2^\infty k(k-1)z^{k-2}} \overset{\text{Sats}}{=} z^2 \left(\underbrace{\sum_0^\infty z^k}\right)'' \overset{|z|<1}{=} z^2\left(\frac{1}{1-z}\right)'' =$

$= z^2\left(\frac{1}{(1-z)^2}\right)' = z^2 \frac{2}{(1-z)^3} = \frac{2z^2}{(1-z)^3}$

7.35 Låt $f(z) = \int_{[0,1]} \frac{dw}{1-wz}$, $z \in D(0,1)$

Hitta en potensserie för f centrerad i 0.

Lösning: $|wz| \leq |z| < 1$ på $[0,1]$ $\Rightarrow \frac{1}{1-wz} = \sum_0^\infty (wz)^k$ konvergerar likformigt på $[0,1]$

$\Rightarrow f(z) = \int_{[0,1]} \sum_0^\infty (wz)^k dw \underset{\text{konv}}{\overset{\text{Mat}}{=}} \sum_0^\infty z^k \int_{[0,1]} w^k dw =$

$= \sum_0^\infty z^k \left[\frac{w^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \sum_0^\infty z^k \cdot \frac{1}{k+1}$ $\left(\sum_1^\infty \frac{z^k}{k} = \frac{\operatorname{Log}(1-z)}{z}\right)$

8.5 Bestäm 3 första termerna i Taylorutvecklingen av:

ⓐ $\frac{1}{1+z^2}$ centrerad i 1 ⓓ e^{z^2} centrerad i i

Lösning: ⓐ Sätt $w = z-1$, $z = w+1$, $z^2 = w^2+2w+1$

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2+2w+w^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-w-\frac{w^2}{2})} \overset{|w|<<1}{=} \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-1)^k\left(w+\frac{w^2}{2}\right)^k =$

$= \frac{1}{2}\left(1-\left(w+\frac{w^2}{2}\right)+\left(w+\frac{w^2}{2}\right)^2 + O(w^3)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}w - \frac{1}{4}w^2 + \frac{1}{2}w^2 + O(w^3)$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1) + \frac{1}{2}(z-1)^2 + O((z-1)^3)$

ⓓ $w = z-i$, $z = w+i$, $z^2 = w^2+2iw-1$

$e^{z^2} = e^{w^2+2w-1} = e^{-1}e^{2iw}e^{w^2} = e^{-1}\left(1+2iw+\frac{(2iw)^2}{2} + O(w^3)\right) \times$

$\times (1+w^2+O(w^4)) = \frac{1}{e}(1+2iw-w^2) + O(w^3) = \frac{1}{e}(1+2i(z-i)-(z-i)^2) + O((z-i)^3)$

Räknestuga 5/10

(9.2) Hitta polerna och deras ordning av

(a) $(z^2+1)^{-3}(z-1)^{-4}$

(b) $z \cot z = \dfrac{z\cos z}{\sin z}$

(d) $1/1-e^z$

(e) $z/1-e^z$

(a) $(z+i)^{-3}(z-i)^{-3}(z-1)^{-4}$ Polerna: $\pm i$ ordning 3, 1 ordning 4

(b) $\sin z = 0 \iff z = \pi i k,\ k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0 \Rightarrow z\cos z \neq 0$

Vi vet att $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots = zg(z),\ g(0) \neq 0$

$\sin z$ har en pol av ordning 1 i 0, men det ger att $\sin z$ har pol av ordning 1 i $\pi i k$. Polerna: $\pi i k,\ k \neq 0$ av ordning 1

(d) $e^z = 1 \iff z = 2\pi i k,\ k \in \mathbb{Z}$

$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots \Rightarrow 1 - e^z = -z - \frac{z^2}{2!} = zg(z),\ g(0) \neq 0$ för någn funktion $g(z)$

$\dfrac{1}{1-e^z} = \dfrac{1}{zg(z)}$ Polerna: $2\pi i k,\ k \neq 0$ av ordning 1.

(9.5) För $\gamma = C[0,3]$ beräkna

(a) $\int_\gamma \cot z\, dz$

(d) $\int_\gamma z^2 e^{1/z}\, dz$

(c) $\int_\gamma \dfrac{dz}{(z+4)(z^2+1)}$

(a) $\cot z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ har polen i $\pi i k$, så enbart i 0 innanför γ, av ordning 1. $\operatorname{Res}_\gamma(\cot z) = \lim_{z\to 0} \dfrac{z\cos z}{\sin z} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{z\to 0} \dfrac{\cos z - z\sin z}{\cos z} = 1$

Enligt Residysatsen fås $\int_\gamma \cot z\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}_0(\cot z) = 2\pi i$

(c) $\int \dfrac{dz}{(z+4)(z^2+1)} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_i\left(\dfrac{1}{(z+4)(z^2+1)}\right) + \operatorname{Res}_{-i}\left(\dfrac{1}{(z+4)(z^2+1)}\right)\right) =$

$= 2\pi i \left(\dfrac{\cancel{(z-i)}}{(z+4)(z+i)\cancel{(z-i)}}\Big|_{z=i} + \dfrac{\cancel{(z+i)}}{(z+4)\cancel{(z+i)}(z-i)}\Big|_{z=-i}\right) = 2\pi i\left(\dfrac{1}{2i(4+i)} - \dfrac{1}{2i(4-i)}\right)$

$= \pi\left(\dfrac{(4-i)}{(4+i)(4-i)} - \dfrac{(4+i)}{(4-i)(4+i)}\right) = \dfrac{\pi}{17}\cdot(-2i) = -\dfrac{2\pi i}{17}$ $\to$ (d)

(d) $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$

$\Rightarrow e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$

$\Rightarrow z^2 e^{1/z} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{6z} + \dots$

$\mathrm{Res}_0(z^2 e^{1/z}) = 1/6$ ← framför $1/z$ {alltid koefficienten framför z^{-1} = residyn}

$\int_\gamma z^2 e^{1/z}\, dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi i}{3}$

(9.7) (d) Hitta residyn av $e^{1-\frac{1}{z}}$ vid 0.

(d) $e^{1-\frac{1}{z}} = e e^{-1/z} = e\left(1 + \left(-\frac{1}{z}\right) + \frac{\left(-\frac{1}{z}\right)^2}{2!} + \dots\right)$

$\mathrm{Res}_0(e^{1-1/z}) = -e$

(9.1) Anta att f har ett nollställe av ordning m vid a

Förklara varför $\frac{1}{f}$ har en pol vid ordning m vid a.

Lösning: $f(z) = (z-a)^m g(z)$, $g(a) \neq 0$ gäller i någon ordning till a

$\rightarrow \frac{1}{f(z)} = (z-a)^{-m} \frac{1}{g(z)} \rightarrow \frac{1}{f}$ har en pol vid a av ordning m.

(9.8) (d) Beräkna $\int_{C[0,1]} \frac{dz}{z^2 \sin z}$

(d) $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = z\, g(z)$ för någon funktion g.

$\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z^2 \sin z}\right) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{z^3}{z^2 \sin z}\right)$

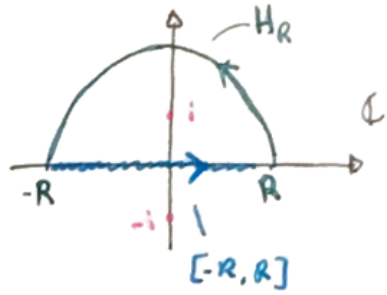
$\frac{1}{\sin z} = \frac{A}{z} + B + Cz + \dots$, $1 = \sin z \cdot \frac{1}{\sin z} = \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)\left(\frac{A}{z} + B + Cz + \dots\right)$

$= \underbrace{(z)\cdot\left(\frac{A}{z}\right)}_{=A} - Bz + z^2\left(C - \frac{A}{6}\right) + \dots \Rightarrow$ $A = 1$, $B = 0$

$C - \frac{A}{6} = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{6}z + \dots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{6z} + \dots$ | $\int_{C[0,1]} \frac{dz}{z \sin z} = \frac{2\pi i}{6} = \frac{\pi i}{3}$

(9.15) Beräkna $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$



$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{dz}{(1+z^2)^2} =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \int_{H_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right) \overset{R>1}{=} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} - \qquad \gamma_R = \underline{[-R,R]} \cup H_R$$

$$- \lim_{R\to\infty} \int_{H_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \Rightarrow \left| \frac{1}{z^2+1} \right| \leq \frac{1}{|z|^2-1} \Rightarrow \left| \int_{H_R} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| \leq \pi R \max_{z\in H_R} \left| \frac{1}{(z^2+1)^2} \right|$$

omvänd Δ olik

$$\leq \pi R \frac{1}{(R^2-1)^2} \to 0 \text{ då } R \to \infty$$

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = f(z)$$

$$\operatorname{Res}_i f(z) = \lim_{R\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z+i)^2} = \lim_{z\to i} = -2 \frac{1}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} =$$

$$= \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{2}{8i}$$

$\Rightarrow$ integralen $= 2\pi i \cdot \frac{2}{8i} = \frac{\pi}{2}$ reell integral $\to$ reellt svar.

(9.21) Hitta antalet nollställen för

(b) $\frac{1}{3}e^z - z$ i $\bar{D}[0,1]$

(c) $z^4 - 5z + 1$ i $1 \leq |z| \leq 2$

Rouché's sats:

om γ är sluten, enkel, positivt orienterad om $|g(z)| < |f(z)| \quad \forall z \in \gamma$

$\Rightarrow Z(f+g, \gamma) = Z(f, \gamma)$

(b) $\gamma = \partial[0,1]$ $\quad z \in \gamma \Leftrightarrow |z| = 1$

$$\underbrace{\left|\frac{1}{3}e^z\right|}_{g(z)} \leq \frac{1}{3}e^z < 1 = \underbrace{|-z|}_{f(z)}$$

$$Z\left(\frac{1}{3}e^z - z, \gamma\right) = Z(-z, \gamma) = 1$$

(c) steg 1: $\gamma = C[0,2]$, $|-5z+1| \leq 5|z|+1 = 11 < 16 = |z^4|$

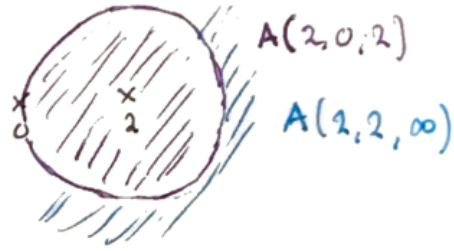
$$Z(z^4 - 5z + 1, \gamma) = Z(z^4, \gamma) = 4$$

steg 2: $\alpha = C[0,1]$ $\quad |z^4| = 1 < 4 = 5-1 = |-5z| - |1| \leq |-5z+1|$

$$Z(z^4 \; ; \; \alpha) = Z(-5z+1, \alpha) = 1$$

storgruppsövning 5/10

8.17 Hitta LSU av $\frac{1}{z(z-2)^2}$ centrerad i 2, bestäm konvergensområde.



Lösning: $\frac{1}{z(z-2)^2}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0,2\}$

i $A(2,0,2) = D(2,2)^\times$

$$\boxed{\frac{1}{1-\omega} \overset{|\omega|<1}{=} \sum_0^\infty \omega^k}$$

Sätt: $w = z-2 \Rightarrow z = w+2$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{w+2} = \frac{1}{2+w} = \frac{1}{2}\frac{1}{2+w/2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-w/2)} \overset{|w|<2}{=} \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-w/2)^k =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} w^k = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^k$$

spelar ingen roll.

$$\Rightarrow \frac{1}{z(z-2)^2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(z-2)^{k-2} = \sum_{-2}^\infty \frac{(-1)^{k(+2)}}{2^{k+3}}(z-2)^k$$

i $A(2,2,\infty)$: $\frac{1}{z} = \frac{1}{w+2} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-(-2/w)} \overset{|w|>2}{=} \frac{1}{w}\sum_0^\infty \left(\frac{-2}{w}\right)^k = \sum_0^\infty (-2)^k w^{-k-1} =$

$$\sum_{-\infty}^{-1} (-2)^{-k-1} w^k = \sum_{-\infty}^{-1} (-2)^{-k-1}(z-2)^k.$$

$$\frac{1}{z(z-2)^2} = \sum_{-\infty}^{-1} (-2)^{-k-1}(z-2)^{k-2} = \sum_{-\infty}^{-3} (-2)^{-k-3}(z-2)^k$$

8.19 Hitta c_k, $-4 \leq k \leq 3$ där $\sum_{-\infty}^\infty c_k z^k$ LSU av $\frac{1}{\sin^2 z}$ giltig i $D(0,r)^\times$.

{OBS, står 4 i boken men jobbig räkning}

Lösning: $\frac{1}{\sin^2 z}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + O(z^7) = z\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + O(z^6)\right)$$

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(z^6)\right)} \overset{|z|<<1}{=} \frac{1}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + O(z^6)\right)^k =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{z}}_{k=0} + \underbrace{\frac{z}{6} - \frac{z^3}{120} + O(z^5)}_{k=1} + \underbrace{\frac{z^3}{36} + O(z^5)}_{k\geq 2} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 + O(z^5)$$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \left(\frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7}{360}z^3 + O(z^5)\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}z^2 + O(z^4)$$

$\Rightarrow c_{-4} = 0,\ c_{-3} = 0,\ c_{-2} = 1,\ c_{-1} = 0,\ c_0 = \frac{1}{3},\ c_1 = 0,\ c_2 = \frac{1}{15}$

$c_3 = 0$

8.35 ⓐ Hitta LSU för $\frac{1}{(z^2-4)(z-2)}$ centrerad i 2, giltig i $D(2,4)^\times$.

<u>Lösning:</u> $z^2-4=(z-2)(z+2)$ $\quad \frac{1}{(z^2-4)(z-2)} = \frac{1}{(z+2)(z-2)^2}$ $\quad \left\{\begin{matrix} w=z-2 \\ z=w+2 \end{matrix}\right\}$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{w+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-(-w/4)} \overset{|w|<4}{=} \frac{1}{4}\sum_0^\infty (-w/4)^k = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{4^{k+1}} w^k =$$

$$= \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(z-2)^k \quad . \quad \frac{1}{(z+2)(z-2)^2} = \sum_0^\infty \frac{(-1)^k}{4^{k+1}}(z-2)^{k-2} = \sum_{-2}^\infty \frac{(-1)^k}{4^{k+3}}(z-2)^k$$

ⓑ Beräkna $\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{(z^2-4)(z-2)}$

2 enda sing. i inre av kurva.

<u>Lösning:</u> $\frac{1}{(z^2-4)(z-2)}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{2,-2\}$

$$\mathrm{Res}_2\left(\frac{1}{(z^2-4)(z-2)}\right) \overset{\text{enligt a)}}{=} \frac{(-1)^{-1}}{4^{-1+3}} = -\frac{1}{16}$$

$$\int_{|z-2|=1} \frac{dz}{(z^2-4)(z-2)} = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}_2\left(\frac{1}{(z^2-4)(z-2)}\right) = -\frac{\pi i}{8}$$

Residysatsen

8.36 ⓐ Hitta Taylorutv. av e^z centrerad i -1.

<u>Lösning:</u> $e^z = e^{z+1-1} = e^{-1}e^{z+1} = e^{-1}\sum_0^\infty \frac{(z+1)^k}{k!} = \sum_0^\infty \frac{e^{-1}}{k!}(z+1)^k$

ⓑ Beräkna $\int_{|z+2|=2} \frac{e^z}{(z+1)^{34}}\,dz$

<u>Lösning</u> $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^{34}}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$

Den singulära punkten -1 ligger i inre av kurvan

$$\frac{e^z}{(z+1)^{34}} = \sum_0^\infty \frac{e^{-1}}{k!}(z+1)^{k-34} \Rightarrow \mathrm{Res}_{-1} f = \frac{e^{-1}}{33!}$$

$$\int_{|z+2|=2} \frac{e^z}{(z+1)^{34}} = 2\pi i\,\mathrm{Res}_{-1} f = \frac{2\pi i e^{-1}}{33!}$$

enligt residysatsen

9.6 Antag f har enkel pol (ord. 1) i z_0, g holomorf i omgivning till z_0. Visa att $\operatorname{Res}_{z_0} fg = g(z_0)\operatorname{Res}_{z_0} f$

<u>Lösning:</u> f enkel pol betyder $f(z) = \frac{h(z)}{z-z_0}$, h holomorf, $h(z_0) \neq 0$. $\operatorname{Res}_{z_0} f = h(z_0)$

räkneregel

$$\operatorname{Res}_{z_0} fg = \operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{g(z)h(z)}{z-z_0}\right) = g(z_0)h(z_0) = g(z_0)\operatorname{Res}_{z_0} f \quad \square$$

9.7 ⓔ Bestäm $\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^{4z}-1}{\sin^2 z}\right)$

<u>Lösning:</u> $\sin z = z - \frac{z^3}{6} + O(z^5)$

$e^{4z} = 1 + 4z + O(z^2)$, $\frac{1}{\sin z} = \{\text{se uppgift } 8.19\} = \frac{1}{z} + O(z)$

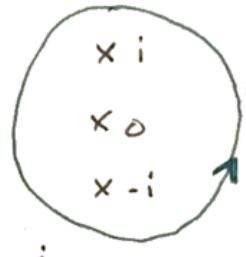
$$\frac{1}{\sin^2 z} = \frac{1}{z^2} + O(1)$$

$$\frac{e^{4z}-1}{\sin^2 z} = (4z + O(z^2))\left(\frac{1}{z^2} + O(1)\right) = \underline{\frac{4}{z} + O(1)} \Rightarrow \operatorname{Res}_0\left(\frac{e^{4z}-1}{\sin^2 z}\right) = 4$$

9.8 ⓒ Beräkna $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3+z}\,dz$

<u>Lösning:</u> $z^3 + z = z(z+i)(z-i)$, enkla nollställen i $0, \pm i$

Alla 3 ligger i det inre av kurvan



$$\operatorname{Res}_0\left(\frac{e^z}{z^3+z}\right) = \left(\frac{e^z}{3z^2+1}\right)_{z=0} = \underline{1}$$

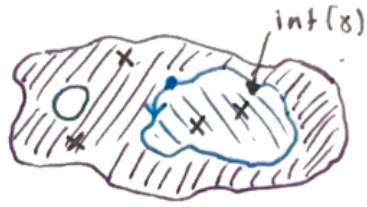
$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{e^z}{z^3+z}\right) = \dots = \underline{-\frac{e^i}{2}} \qquad \operatorname{Res}_{-i}\left(\frac{e^z}{z^3+z}\right) = \dots = \underline{\frac{-e^{-i}}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3+z}\,dz \underset{\text{RS}}{=} 2\pi i\left(1 - \frac{e^i}{2} - \frac{e^{-i}}{2}\right) = 2\pi i(1-\cos 1)$$

Föreläsning 8/10

Repetition:

Residysatsen: Antag f holomorf i G förutom isolerade z_k, γ styckvis glatt sluten enkel positivt orienterad nollhomotop kurva i G som undviker singulariteten z_k.

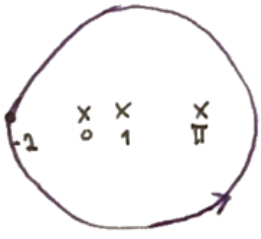


Då är $\int_\gamma f\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f$

- $\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1}$, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0, R)^\times$
- Om $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m \geq 1$, g holomorf i omgivning z_0, då är
  $\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ (Prop 1.3 R)
- Om f, g holomorf i omgivning till z_0, z_0 enkelt nollställe till g, då är $\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g(z_0)}$ (Prop 9.14)

Exempel: Beräkna $\int_{|z-1|=3} \frac{e^z}{\sin z (z-1)^2}\,dz$

Lösning: $f(z) = \frac{e^z}{\sin z (z-1)^2}$ holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isol. sing. i 1 samt $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. $C(1,3)$ uppfyller kraven:



$0, 1, \pi$ ligger i $\mathrm{int}(C(1,3))$

$\mathrm{Res}_1 f = \frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{\sin^2 1}$

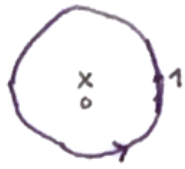
$\mathrm{Res}_\pi f = \frac{e^\pi}{(\pi-1)^2}$ ← förra veckan

$\mathrm{Res}_0 f = \left(\frac{e^z/(z-1)^2}{\sin z}\right)_{z=0} = 1$

sin z enkelt nollställe i 0

$$\int_\gamma f\,dz = 2\pi i \left(\frac{e(\sin 1 - \cos 1)}{\sin^2 1} - \frac{e^\pi}{(\pi-1)^2} + 1 \right)$$

Exempel: Bestäm $\int_{|z|=1} e^z \sin(1/z)\, dz$



Lösning: $e^z \sin(\frac{1}{z})$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \dots, \quad e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$e^z \sin(1/z) = \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots\right)\left(z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} - \dots\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

Kommer finnas oändligt med matchningar som ger z^{-1}.

$$\mathrm{Res}_0\left(e^z \sin\left(\frac{1}{z}\right)\right) = c_{-1} = 1 - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!(2k+1)!}$$

$$\int_{|z|=1} e^z \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \left(\sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!(2k+1)!}\right)$$

Res. sats

Reella integraler:

Exempel: Beräkna $\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\cos t + 2}\, dt$

Lösning: $z = e^{it}$, $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2+1}{2z}$

$\cos t + 2 = \frac{z^2+1}{2z} + 2 = \frac{z^2+4z+1}{2z}$. $dz = d(e^{it}) = ie^{it}dt = iz\,dt$.

$dt = \frac{-i}{z} dz \Rightarrow \frac{\cos t}{\cos t + 2} dt = \frac{-i(z^2+1)}{z^3+4z^2+z} dz$ $\quad (z^3 + 4z^2 + z = z(z^2+4z+1))$

$f(z) = \frac{-i(z^2+1)}{z^3+4z^2+z}$ f holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerad singularitet i $0, -2 \pm \sqrt{3}$

$(\sqrt{3} < 2)$

0 och $-2+\sqrt{3}$ inuti enhetsskivan.

$$\mathrm{Res}_0 f = \left(\frac{-i(z^2+1)}{3z^2+8z+1}\right)_{z=0} = -i$$

derivatan till tidigare nämnare.

$$\mathrm{Res}_{-2+\sqrt{3}} f = \left(\frac{-i(z^2+1)}{3z^2+8z+1}\right)_{z=-2+\sqrt{3}} = \dots = \frac{2i}{\sqrt{3}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{\cos t + 2} dt = \int_{|z|=1} f(z)\, dz =$$

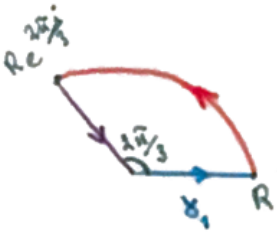
Res. sats

$$= 2\pi i\left(-i + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = 2\pi\left(1 - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

Exempel: Beräkna $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ ← valda funktion

Lösning:

$$\gamma_R(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi/3]$$



$$\sigma_R = [0,R] \cup \gamma_{R_2} \cup [Re^{\frac{2\pi i}{3}}, 0]$$

$$\int_{[Re^{2\pi i/3},0]} \frac{1}{1+z^3}\,dz = -\int_{[0,Re^{2\pi i/3}]} \frac{1}{1+z^3}\,dz = \left[\begin{array}{l}\gamma_2(t) = e^{2\pi i/3}t, \quad t \in [0,R] \\ \gamma_2'(t) = e^{2\pi i/3}\end{array}\right] =$$

Notera:

$$\int_{[0,R]} \frac{1}{1+z^3}\,dz = \left[\begin{array}{l}\gamma_1(t) = t, \quad t \in [0,R] \\ \gamma_1'(t) = 1\end{array}\right] = \int_0^R \frac{1}{1+t^3}\,dt$$

$$= -\int_0^R \frac{1}{1+(e^{2\pi i/3}t)^3}\, e^{2\pi i/3}\,dt = -e^{2\pi i/3}\int_0^R \frac{1}{1+t^3}\,dt$$

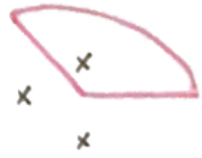
jämn funktion

$$\left|\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^3}\,dz\right| \underset{\Delta\text{-olikh}}{\leq} \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{1}{1+z^3}\right| \cdot \frac{2\pi R}{3} \leq \left[\begin{array}{l}|1+z^3| \geq |z|^3 - 1 = \\ = R^3 - 1\end{array}\right] < \frac{2\pi R}{3(R^3-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^3}\,dz = \left(1 - e^{2\pi i/3}\right)\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

$\frac{1}{1+z^3}$ holomorf i $\mathbb{C}$ förutom isolerade singulariteter. i $-1, e^{\pm\pi i/3}$

endast $e^{\pi i/3}$ i $\mathrm{int}(\sigma_R)$, $R > 1$



$$\mathrm{Res}_{e^{\pi i/3}}\left(\frac{1}{1+z^3}\right) \overset{\text{räkneregel}}{=} \left(\frac{1}{3z^2}\right)_{|z=e^{i\pi/3}} = \frac{1}{3e^{2\pi i/3}}$$

$$\int_{\sigma_R} \frac{1}{1+z^3}\,dz \overset{\text{Res. sats}}{=} \frac{2\pi i}{3e^{2\pi i/3}}, \quad R > 1 \Rightarrow \int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{2\pi i}{3e^{2\pi i/3}(1-e^{2\pi i/3})} = \ldots = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Argumentprincipen:

Definition: f är meromorf i G om f holomorf i G förutom poler.

Exempel: om g, h holomorf i G, $h \not\equiv 0$ då $\frac{g}{h}$ meromorf i G.

Definition: Låt γ vara sluten kurva i $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Vi definierar vindningstalet $w(\gamma)$ (winding number) som # varv γ går runt noll netto i positiv riktning, dvs $(\gamma) = m$ omm $\gamma \underset{\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\sim} m \subset (0,1)$

Exempel:

$w(\gamma) = 2$

$w(\hat{\gamma}) = 0$

OBS: Om γ dessutom är styckvis glatt: $w(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz$ tackvare CS.

Föreläsning 9/10

Förra föreläsningen:

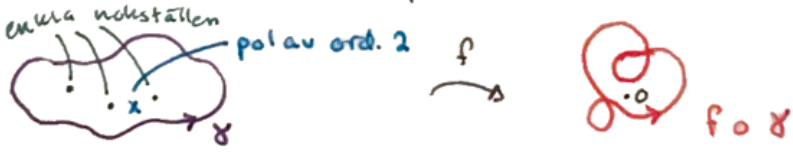
- f meromorf om holomorf förutom i poler
- $W(\gamma)$ = # varv γ går runt 0 i positiv riktning

Argumentprincipen: Beviset

Antag f meromorf i G, γ styckvis glatt sluten enkel nollhomotop positivt orienterad i G som undviker f:s nollställen och poler.

Då gäller att: $W(f \circ \gamma) = N(f, \gamma) - P(f, \gamma)$ där $N(f, \gamma)$ = # nollställen till f i $\mathrm{int}(\gamma)$ (med mult). $P(f, \gamma)$ = # poler till f i $\mathrm{int}(\gamma)$ (med mult)

Exempel:



OBS: $\overline{\mathrm{int}(\gamma)}$ kompakt $\Rightarrow N(f, \gamma) < \infty$, $P(f, \gamma) < \infty$

Bevis →

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Numrera nollställen till f i $\mathrm{int}(\gamma)$: $z_1, \dots, z_N$

n_j = ordning av z_j, numera polerna till f i $\mathrm{int}(\gamma)$: $w_1, \dots, w_M$,

m_j = ordning av w_j. Upprepa användning av klass av nollställen

samt klass av isolerade singularitetser.

$f(z) = \prod_{i=1}^{N} (z-z_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{M} (z-w_j)^{-m_j} g(z)$, g holomorf och $\neq 0$ i något

område $H \supseteq \overline{\mathrm{int}(\gamma)}$.

Får $\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{z-z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j}{z-w_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}$, $\frac{g'}{g}$ holomorf i H.

$$W(f\circ\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{1}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))}(f\circ\gamma)'(t)\,dt = \Big[\underbrace{(f\circ\gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)}_{\text{lemma}}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}\,dz \underset{\text{sats}}{\overset{\text{Residy}}{=}} \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}_{z_i} \frac{f'}{f} + \sum_{j=1}^{M} \mathrm{Res}_{w_j} \frac{f'}{f} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} n_j - \sum_{j=1}^{M} m_j = N(f,\gamma) - P(f,\gamma) \quad \square$$

OBS! Om f holomorf så är $P(f,\gamma) = 0$ dvs. $N(f,\gamma) = W(f\circ\gamma)$

Definition: Om γ styckvis glatt kurva i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (ej nödvändigtvis sluten)

definierar vi $\mathrm{argvar}(\gamma) = \mathrm{Im}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_a^b \frac{d}{dt}\arg(\gamma(t))\,dt$

dvs. totala argumentvariationen längs γ.

Exempel:

Hur har vinkeln ändrats? minskat med π

$\mathrm{argvar}(\gamma) = -\pi$ vinkeln bestäms med hänsyn till 0:an

OBS! Om γ sluten så $W(\gamma) = \frac{\mathrm{argvar}(\gamma)}{2\pi}$ pga ett helt varv.

- $\mathrm{argvar}(\gamma_1 \cup \gamma_2) = \mathrm{argvar}(\gamma_1) + \mathrm{argvar}(\gamma_2)$

OBS! $\mathrm{argvar}(\gamma) = \mathrm{Arg}(\gamma(b)) - \mathrm{Arg}(\gamma(a)) + 2\pi k$

k beror på hur γ gått runt 0!

Exempel:

$\mathrm{argvar}(\gamma_1) = \pi/2$

$\mathrm{argvar}(\gamma_2) = -3\pi/2$

lägger alltså till -2π

Exempel: Bestäm antalet nollställen (med mult) till z^5+2z+1 i högra halvplanet

Lösning:

$\gamma_R(t) = Re^{it}, \; t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$G_R = \gamma_R \cup [iR, -iR]$

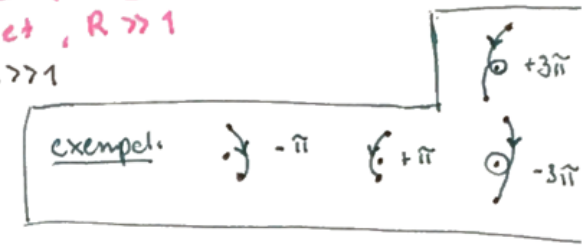
$f(z) = z^5+2z+1, \quad W(f \circ G_R) = ?$

argvar $(f \circ \gamma_R)$:

$$f(Re^{it}) = (Re^{it})^5 + 2Re^{it} + 1 = R^5 e^{5it}\Big(1 + \underbrace{\frac{2e^{-4it}}{R^4} + \frac{e^{-5it}}{R^5}}_{\text{litet},\ R \gg 1}\Big)$$

$\Rightarrow \arg(f(Re^{it})) \approx \arg(R^5 e^{5it}) = 5t + 2\pi k, \; R \gg 1$

$\Rightarrow \text{argvar}(f \circ \gamma_R) \approx 5\pi$



argvar $(f \circ [iR, -iR])$:

$f(iy) = iy^5 + 2iy + 1 = 1 + i(y^5+2y)$

$f(iR) = 1 + i(R^5+2R) \Rightarrow \text{Arg}(f(iR)) \approx \pi/2$

$f(-iR) = 1 + i(-R^5-2R) \Rightarrow \text{Arg}(f(-R)) \approx -\pi/2$

$\text{Re}(f(iy)) = 1 > 0 \Rightarrow f \circ [iR, -iR]$ passerar noll på höger sida

$\Rightarrow \text{argvar}(f \circ [iR, -iR]) \approx -\pi$

$\Rightarrow \text{argvar}(f \circ G_R) \approx 5\pi - \pi = 4\pi$

$\Rightarrow \text{argvar}(f \circ G_R) = 4\pi, \; R \gg 1$

$\Rightarrow W(f \circ G_R) = 2, \; R \gg 1$

arg princ. $\Rightarrow$ f har 2 nollställen i $\text{int}(G_R)$, $R \gg 1$, dvs 2 nollställen i högra halvplanet

Rouchés sats (Sats 9.18) Bevislista

Antag f, g holomorf i G, γ styckvis glatt, sluten enkel nollhomotop positivt orienterad kurva i G, $|f(z)| > |g(z)|$ på γ. Då har f och $f+g$ lika många nollställen i $\mathrm{int}(\gamma)$.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ Notera: $(f+sg)\circ\gamma$, $s \in [0,1]$ är homotopi mellan $f\circ\gamma$ och $(f+g)\circ\gamma$ i $\mathbb{C}$. $|f(\gamma(t))| > |g(\gamma(t))| \Rightarrow |f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t))| \geq$

$\overset{\text{omv}}{\geq} |f(\gamma(t))| - s|g(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))| - |g(\gamma(t))| > 0$

Δ olik.

$\Rightarrow f+sg \neq 0$ på γ

$\Rightarrow f\circ g \underset{\mathbb{C}\setminus\{0\}}{\sim} (f+g)\circ\gamma$

Får $W((f+g)\circ\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(f+g)\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz = \left[\frac{1}{z} \text{ holomorf i } \mathbb{C}\setminus\{0\}\right] \overset{CS}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}\,dz =$

$= W(f\circ\gamma) \underset{\text{princ.}}{\overset{\text{Arg}}{\Longrightarrow}} N(f,\gamma) = N(f+g,\gamma)$ $\square$

Alternativ till Argumentprincipen för att hitta nollställen

Exempel: Bestäm antalet nollställen till $3z^3 + e^{iz} - 1$ i $D(0,2)$

Lösning: Sätt $f(z) = 3z^3$, $g(z) = e^{iz} - 1$, dvs. $f+g = 3z^3 + e^{iz} - 1$

f har 3 nollställen i $D(0,2)$.

$|f(z)| = |3z^3| = 3|z^3| = 24$ på $C(0,2)$

$|g(z)| = |e^{iz} - 1| \underset{\Delta \text{ olik}}{\leq} |e^{iz}| + 1 = e^{-y} + 1 \leq [y \geq -2 \text{ på } C(0,2)] \leq$

$\leq e^2 + 1 < 10$ på $C(0,2)$

$\Rightarrow |f| > |g|$ på $C(0,2) \overset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ f och $f+g$ har lika många nollställen i $\mathrm{int}(C(0,2)) = D(0,2)$ dvs. $f+g$ har 3 nollställen i $D(0,2)$

Föreläsning 10/10

Fourieranalys

Idé: dela upp signal i dess frekvens

J. Fourier 1822: introducerade detta för att lösa värmeledningsekvationerna. Funkar för många olika slags signaler:

Diskreta: användas vid datakomprimering JPEG, mp3, ...

Kontinuerliga: användas röntgenkristall., datatomografi, ...

Fouriertransformen

Definition: En funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ligger i L^1 ($f \in L^1$) om den är integrerbar (tex. styckvis kontinuerlig) samt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt < \infty$

Exempel: $e^{-|t|} \in L^1$, $e^{-t} \notin L^1$

Definition: Givet $f \in L^1$ så def. vi dess Fouriertransform (FT)

$\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt}\,dt$

Exempel: Bestäm FT av $e^{-|t|}$

Lösning: $\widehat{e^{-|t|}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} e^{-ixt}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-ixt}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t} e^{-ixt}\,dt =$

$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-ix)}\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)}\,dt = \left[\frac{e^{t(1-ix)}}{1-ix}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-t(1+ix)}}{1+ix}\right]_{0}^{\infty} =$

$= \frac{1}{1-ix} + \frac{1}{1+ix} = \frac{2}{(1+x^2)}$

Invensions formeln (Sats 2.1F)

Anta f kontinuerlig, $f, \hat{f} \in L^1$. Då är $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\,dx$

Detta säger att signalen $f(t)$ ges som överlagring av rena oscillationer $\hat{f}(x)e^{ixt} = \hat{f}(x)(\cos(xt) + i\sin(xt))$, x = frekvensen, $|\hat{f}(x)|$ = amplituden, $\arg \hat{f}(x)$ = fasen.

OBS! Får $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) e^{ixt}\,dx = \frac{1}{2\pi} \hat{\hat{f}}(-t) \iff \hat{\hat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$

invensionsformeln

Exempel: Bestäm FT av $\frac{1}{1+t^2}$

Lösning: $\widehat{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\widehat{\frac{2}{1+t^2}} = \frac{1}{2}\widehat{\widehat{e^{-|x|}}} \overset{IF}{=} \frac{1}{2}2\pi e^{-|-x|} = \pi e^{-|x|}$

Alternativ: $\widehat{\frac{1}{1+t^2}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixt}}{1+t^2}\,dt$ kan räknas ut med hjälp av residykalkyl.

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt$ = energin hos signalen

Parsevals formel (Sats 2.2F)

Antag $f, \hat{f} \in L^1$. Då är $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^2\,dx$

Utvikning: Vågfunktioner i kvantmekaniken ← ingår ej i kursen

En partikel på en linje då beskrivs i en given tidpunkt av en vågfunktion $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Sannolikheten att träffa på vår partikeln i intervallet $[a,b]$ ges av $\int_a^b |\Psi(x)|^2\,dx$. Speciellt $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2\,dx = 1$

Anta $\Psi \in L^1$, $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x)\, e^{-i\,p/h\,x}\,dx =$ h = planks konstant

$= \frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\hat{\Psi}\left(\frac{p}{h}\right)$, $p = h \cdot$ frekvens = rörelsemängd

Notera att $\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(p)|^2\,dp = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{\Psi}\left(\frac{p}{h}\right)\right|^2 d\left(\frac{p}{h}\right) \overset{\text{parseval}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2\,dx = 1$

Sannolikheten att partikelns rörelsemängd ligger mellan värdena c och d är $\int_c^d |\Phi(p)|^2\,dp$

Heisenbergs osäkerhetsrelationen är matematisk konsekvens av dualiteten mellan Ψ och Φ.

Egenskaper hos FT (prop 2.3F)

ⓐ $\widehat{af+bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$

ⓑ om $f' \in L^1$, då $\widehat{f'} = ix\hat{f}$

ⓒ $\widehat{f(t-a)} = e^{-iax}\hat{f}(t)$

ⓓ $\widehat{f(at)}(x) = \frac{\widehat{f(t)}(x/a)}{|a|}$ $(a \neq 0)$

ⓔ om $tf \in L^1$, då $\widehat{tf} = i(\hat{f})'$

Bevis: b) $\widehat{f'}(x) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f'(t)\,e^{ixt}\,dt =$

$\overset{\text{part. int.}}{=} \lim_{R\to\infty}\left(\left[f(t)e^{-ixt}\right]_{-R}^{R} - (-ix)\int_{-R}^{R} f(t)e^{-ixt}\,dt\right) =$

$= \left[f, f' \in L^1 \Rightarrow f(t) \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0\right.$

Lemma: Om f, g kontinuerlig, L^1 och $\hat{f} = \hat{g}$, då är $f = g$.

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $f - g \in L^1$, $\widehat{f-g} = \hat{f} - \hat{g} = 0 \in L^1$

$$\Rightarrow (f-g)(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f-g}}(-t) = \frac{1}{2\pi} \hat{0}(-t) = 0 \Rightarrow f = g$$

Exempel: Bestäm FT av $f(t) = e^{-t^2/2}$

Lösning: Notera att $f' = -te^{-t^2/2} = -tf \Rightarrow 0 = f' + tf$

$$\Rightarrow 0 = \widehat{f' + tf} = \hat{f'} + \widehat{tf} = ix\hat{f} + i\hat{f}' \Rightarrow \hat{f}' = -x\hat{f}$$

dvs. $\hat{f}$ löser samma diff.ekv. som f!

Får $(e^{x^2/2}\hat{f})' = xe^{x^2/2}\hat{f} + e^{x^2/2}f' = 0$

$$\Rightarrow \hat{f} = ce^{-x^2/2}.$$

$$\hat{\hat{f}} = c^2 e^{-t^2/2} \Rightarrow c^2 = \hat{\hat{f}}(0) \overset{IF}{=} 2\pi f(0) = 2\pi, \quad c = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt > 0$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{2\pi}, \quad \widehat{e^{-t^2/2}} = \sqrt{2\pi}\, e^{-x^2/2}$$

Detta är "anledningen" till varför den Gaussiska funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ dyker upp överallt!

Exempel: Bestäm FT av $\frac{1}{t^2+4t+5}$

Lösning: $t^2 + 4t + 5 = (t+2)^2 + 1$

$$\widehat{\frac{1}{1+(t+2)^2}} \overset{\text{räkne-regel } (a=-2)}{=} e^{-i(-2)x} \widehat{\frac{1}{1+t^2}} = e^{2ix}\pi e^{-|x|} = \pi e^{2ix - |x|}$$

Storgruppsövning 10/10

Övning R3 s.5

Beräkna $\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2k}\,dt$, $k \geq 0$ heltal

Lösning: Variabelbyte $z = e^{it}$, $\cos t = \frac{z^2+1}{2z}$, $dt = \ldots = \frac{-i\,dz}{z}$

$$(\cos t)^{2k}\,dt = \frac{-i(z^2+1)^{2k}}{2^{2k}\,z^{2k+1}}\,dz = \left[(z^2+1)^{2k} = \sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j} z^{2j}\right] =$$

$$= \frac{-i}{2^{2k}}\left(\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j} z^{2j-2k-1}\right)dz \Rightarrow \int_0^{2\pi}(\cos t)^{2k}\,dt = \frac{-i}{2^{2k}}\sum_{j=0}^{2k}\binom{2k}{j}\underbrace{\int_{|z|=1} z^{2j-2k-1}\,dz}_{\substack{2\pi i \text{ om } j=k \\ 0 \text{ annars}}} =$$

$$= \frac{-i}{2^{2k}}\binom{2k}{k}2\pi i = \frac{\pi\binom{2k}{k}}{2^{2k-1}}$$

Övning R3 s.8

Bestäm $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

Lösning: Först noterar vi att $\cos ax = \cos|a|x$.

$$\cos|a|x = \operatorname{Re} e^{i|a||x|} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos|a|x}{1+x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}(e^{i|a|x})}{1+x^2}\,dx =$$

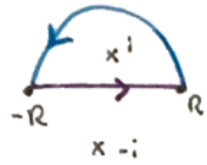
$$= \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i|a|x}}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]}\frac{e^{i|a|x}}{1+z^2}\,dz\right)$$

$\gamma_R(t) = Re^{it}$
$t \in [0,\pi]$
$G_R = [-R,R] \cup \gamma_R$

$$\left|\int_{\gamma_R}\frac{e^{i|a|x}}{1+z^2}\,dz\right| \overset{\Delta\text{olik}}{\leq} \max_{z\in\gamma}\left|\frac{e^{i|a|z}}{1+z^2}\right|\pi R \leq \left[\begin{array}{l} |e^{i|a|z}| = e^{-|a|y} \leq 1 \text{ på } \gamma_R \\ |1+z^2| \geq |z|^2 - 1 = R^2-1 \text{ på } \gamma_R \end{array}\right] \leq$$

omv. Δ olik

$$\leq \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \quad , \quad \frac{e^{iz}}{1+z^2} \text{ holomorf i } \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$$



i singulär i inre av G_R , $R > 1$

$$\operatorname{Res}_i\left(\frac{e^{i|a|z}}{1+z^2}\right) \overset{\text{räkne regel}}{=} \left(\frac{e^{i|a|z}}{2z}\right)_{z=i} = \frac{e^{-|a|}}{2i}.$$

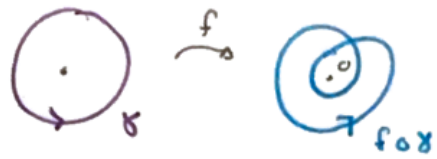
Får $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{[-R,R]}\frac{e^{i|a|z}}{1+z^2}\,dz\right) = \operatorname{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{G_R}\frac{e^{i|a|z}}{1+z^2}\,dz\right) =$$

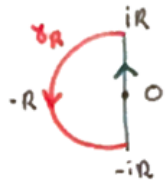
$$= \operatorname{Re}\left(2\pi i\,\frac{e^{-|a|}}{2i}\right) = \operatorname{Re}\left(\pi e^{-|a|}\right) = \pi e^{-|a|}.$$

Övning R1 s.11

Hitta antalet nollställen till z^2+z+1 i vänstra halvplanet.

Lösning:





$\gamma_R(t) = Re^{it},\ t \in [\pi/2, 3\pi/2]$

$\sigma_R = \gamma_R \cup [-iR, iR]$

$f(z) = z^2+z+1$

argvar$(f\circ\gamma)$: $f(Re^{it}) = R^2e^{2it} + Re^{it} + 1 = R^2e^{2it}\left(1 + \frac{e^{-it}}{R} + \frac{e^{-2it}}{R^2}\right)$

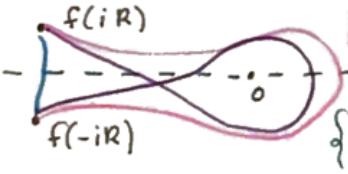
$\Rightarrow$ argvar$(f(Re^{it})) \approx 2t + 2\pi k$

$\Rightarrow$ argvar$(f\circ\gamma_R) \approx 2\pi$

argvar$(f\circ[-iR, iR])$: $f(iy) = -y^2 + iy + 1 = 1 - y^2 + iy$

$f(-iR) = 1 - R^2 - iR \Rightarrow \arg(f(-iR)) \approx \pi + 2\pi k_1$

$f(iR) = 1 - R^2 + iR \Rightarrow \arg(f(iR)) \approx \pi + 2\pi k_2$



$\boxed{\text{möjliga sätt att gå från } f(-iR) \text{ till } f(iR)}$

{rätt kurva är rosa kurvan}

Var passerar $f\circ[-iR, iR]$ x-axeln?

– Jo när $\operatorname{Im} f(iy) = 0$ dvs då $y = 0$ $\Rightarrow$ Kurvan passerar x-axeln bara i punkten 1.

$\Rightarrow$ argvar$(f\circ[-iR, iR]) \approx 2\pi$

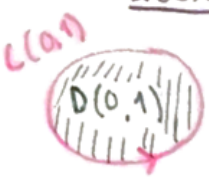
$\Rightarrow$ argvar$(f\circ\sigma_R) \approx 4\pi$

$\Rightarrow W(f\circ\sigma_R) = 2,\ R \gg 1$

$\overset{\text{arg princ.}}{\Rightarrow}$ f har två nollställen i vänstra halvplanet.

9.21 a Hitta antalet nollställen till $3e^z - z$ i $D(0,1)$

<u>Lösning:</u> $|f| > |g|$ på γ



$\overset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ f och $f+g$ har lika många nollställen i $\text{int}(\gamma)$

$f(z) = 3e^z \quad g(z) = -z \quad , \quad f+g = 3e^z - z$

$|f(z)| = |3e^z| = 3e^x \geq 3e^{-1} > 1$ på $C(0,1)$

$|g(z)| = |-z| = |z| = 1$ på $C(0,1)$ $\Rightarrow |f| > |g|$ på $C(0,1)$

$\overset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow}$ f och $f+g$ har lika många nollställen i $\text{int}(C(0,1)) = D(0,1)$

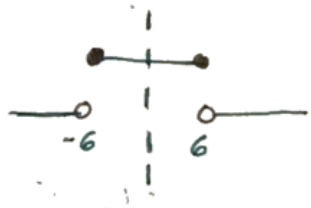
f har inga nollställen i $D(0,1)$

$\Rightarrow$ $3e^z - z$ har inga nollställen i $D(0,1)$

\# nollställen = \# nollställen (hela) − \# nollställen (minusdelen)

<u>Övning F1 s.8</u>

Bestäm FT av $f_6(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 0 \\ 0, & |t| > 0 \end{cases}$ $\quad 6 > 0$



<u>Lösning:</u> $\hat{f}_6(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_6(t) e^{-ixt}\, dt = \int_{-6}^{6} e^{-ixt}\, dt =$

$= \left[\frac{e^{-ixt}}{-ix} \right]_{-6}^{6} = -\frac{1}{ix}\left(e^{-ix6} - e^{ix6}\right) = \frac{2\sin(6x)}{x}$

<u>Övning F3 s.8</u> Visa att $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ax)\sin(bx)}{x^2}\, dx = \pi \min(a,b)$ $\quad a,b > 0$

<u>Lösning:</u> $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin(ax)\, 2\sin(bx)}{x^2}\, dx = \frac{1}{4} \overbrace{\frac{2\sin ax}{x} \cdot \frac{2\sin bx}{x}}(0) =$

$= \ldots$ FALTNING!

$\boxed{\text{Föreläsning 15/10}}$

Fouriertransformen (fortsättning)

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f \in L^1$, Fouriertransformen (FT) av f

  $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ixt}\, dt$

Egenskaper:

- $\hat{\hat{f}}(t) = 2\pi f(-t)$ (invensionsformeln)
- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)^2|\, dx$ (Pascals formel)
- $\widehat{f'} = ix\hat{f}$
- $\widehat{tf} = i\hat{f}'$
- $\widehat{f(t-a)} = e^{-iax}\hat{f}$
- $\widehat{f(at)}(x) = \frac{\hat{f}(x/a)}{|a|}$

Definition: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, då def. faltningen $f * g$ av f med g som $(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(r) g(t-r)\, dr$

obs! $f * g = g * f$

Sats 2.4.F $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g}$

byt integrationsordning

$\boxed{\text{Bevis:}}$ $\widehat{f*g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t) e^{-xt}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(r) g(t-r)\, dr \right) e^{-ixt}\, dt =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-r) e^{-ixt}\, dr \right) f(r)\, dr = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t-r) e^{-ix(t-r)}\, dt \right) f(r) e^{-ixr}\, dr =$

$= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x) f(r) e^{-ixr}\, dr = \hat{f}(x)\hat{g}(x)$ $\square$

Exempel: Lös diff. ekv.

$(*)\quad -u''(t) + u(t) = g(t)$, g given funktion i L^1

Lösning: Vi antar $u, u' \in L^1$. Får $u'' \in L^1$

FT av $(*)$ ger: $\hat{g} = -\widehat{u''} + \hat{u} = (-ix)^2 \hat{u} + \hat{u} = (1+x^2)\hat{u} \Rightarrow$

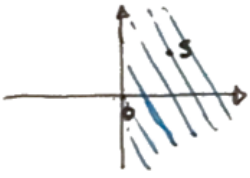
$$\Rightarrow \hat{u} = g\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \left[\widehat{e^{-|t|}} = \frac{2}{1+x^2}\right] = \frac{1}{2}\hat{g}\,\widehat{e^{-|t|}} = \widehat{\frac{1}{2} g * e^{-|t|}}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2} g * e^{-|t|}, \text{ dvs. } u(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} g(r)\, e^{-|t-r|}\, dr.$$

OBS! Hittar endast lösning i L^1 allmänna lösningen: $\frac{1}{2} g * e^{-|t|} + C_1 e^{t} + C_2 e^{-}$

Laplacetransform

Definition: Låt $f: [0,\infty) \to \mathbb{C}$, integrerbar, och anta $\exists A, B \in \mathbb{R}$ s.a. $|f(t)| \leq A e^{Bt}$, då definierar vi Laplacetransformen (LF) av f:



$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt, \quad s \in \mathbb{C} \text{ s.a. } \operatorname{Re} s > B$$

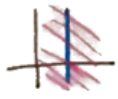
OBS! $\tilde{f}$ är holomorf i $\{s : \operatorname{Re} s > B\}$,

$$\widetilde{f'}(s) = \int_0^{\infty} f(t)(e^{-st})'\, dt = -\int_0^{\infty} t f(t)\, e^{-st}\, dt = -t\tilde{f}(s)$$

Inversionsformel för LT (Sats 3.27)

Om $|f(t)| \leq A e^{Bt}$, $C > B$ och $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(c+iy)|\, dy < \infty$ då är

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\operatorname{Re} s = c} \tilde{f}(s)\, e^{st}\, ds$$



Speciellt: $\tilde{f} = \tilde{g} \Rightarrow f = g$

Egenskaper hos LT (prop. 3.3F)

ⓐ $\widetilde{af+bg} = a\tilde{f} + b\tilde{g}$

ⓑ $\widetilde{f'} = s\tilde{f} - f(0)$

ⓒ $\widetilde{f^{(n)}} = s^n\tilde{f} - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$

ⓓ $\widetilde{e^{ct}f(s)} = \hat{f}(s-c)$

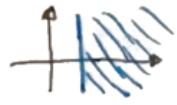
ⓔ $\widetilde{f_a} = e^{-as}\tilde{f}$, $f_a(t) = \begin{cases} f(t-a), & t \geq a \\ 0, & 0 \leq t \leq a \end{cases}$

ⓕ $\widetilde{tf} = -\tilde{f}'$

<u>Exempel:</u> • $\tilde{1}(s) = \int_0^\infty 1e^{-st}\,dt = \left[\frac{-e^{-st}}{s}\right]_0^\infty = [\operatorname{Re} s > 0] = \frac{1}{s}$

• $\tilde{t} = \widetilde{t\cdot 1} \overset{\text{räkneregel}}{=} -(\tilde{1})' = -\left(\frac{1}{s}\right)' = \frac{1}{s^2}$

• $\widetilde{e^{ct}} = \widetilde{e^{ct}\cdot 1} \overset{d)}{=} \frac{1}{s-c}$



• $\widetilde{\sin ct} = \frac{\widetilde{e^{ict} - e^{-ict}}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-ic} - \frac{1}{s+ic}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{2ic}{s^2+c^2}\right) = \frac{c}{s^2+c^2}$

• $\widetilde{\cos ct} = \dots = \frac{s}{s^2+c^2}$

<u>Exempel:</u> Lös diff.ekv. (x): $u''(t) + u(t) = 0$, $t \geq 0$, med begynnelse-värden $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$.

<u>Lösning:</u> LT av (*) ger: $s^2\tilde{u} - su(0) - u'(0) + \tilde{u} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (s^2+1)\tilde{u} - s - 2 = 0 \Rightarrow \tilde{u} = \frac{s+2}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1} =$

$= \left[\widetilde{\cos t} = \frac{s}{s^2+1},\ \widetilde{\sin t} = \frac{1}{s^2+1}\right] = \widetilde{\cos t + 2\sin t}$

$\overset{IF}{\Longrightarrow} u = \cos t + 2\sin t$

Exempel: Lös begynnelsevärdesproblemet

$(*)$: $u''(t) + u(t) = 1$, $t \geq 0$, $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$ enligt form. upp.

Lösning: LT av $(*)$ ger : $(s^2+1)\tilde{u} - s - 2 = \frac{1}{s} \Rightarrow \tilde{u} = \frac{s}{s^2+1} + 2\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s(s^2+1)}$

$= \left[\text{PBU: } \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right] = 2\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s} = \widetilde{2\sin t + 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = 2\sin t + 1$

Definition: Om $f, g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ def. vi fältningen $f * g : [0,\infty) \to \mathbb{C}$ av f med g som $(f*g)(t) = \int_0^t f(r)\, g(t-r)\, dr$

OBS! $f * g = g * f$

Proposition 3.4 F: $\widetilde{f*g} = \tilde{f}\tilde{g}$

Exempel: Lös $(*)$: $u''(t) + u(t) = g(t)$, $t \geq 0$, $u(0) = u'(0) = 0$, g given fkn , $|g(t)| \leq Ae^{Bt}$.

Lösning: LT av $(*)$ ger $s^2\tilde{u} - s\,u(0) - u'(0) + \tilde{u} = \tilde{g} \Rightarrow$

$\Rightarrow (s^2+1)\tilde{u} = \tilde{g} \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{g}\frac{1}{s^2+1} = \tilde{g}\,\widetilde{\sin t} = \widetilde{g * \sin t}$

$\Rightarrow u = g * \sin t$, dvs $u(t) = \int_0^t g(r)\sin(t-r)\, dr$.

Föreläsning 16/10

Z-transformen

Definition: Låt $\alpha = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ följd av komplexa tal, anta $\exists\, M, r \in \mathbb{R}$ s.a. $|a_k| \leq M r^k$. Då definieras Z-transformen $Z(\alpha)$ av α som

$$Z(\alpha)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{z^k}$$

OBS! $\left|\frac{a_k}{z^k}\right| \leq M \left(\frac{r}{|z|}\right)^k$ så $Z(\alpha)$ holomorf i $\{z : |z| > r\}$

Exempel: $\alpha = \{a_k\}$, $a_k = 2^k$, $(M = 1, r = 2)$

$$Z(\alpha)(z) = \sum_0^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k = \frac{1}{1 - 2/z} = \frac{z}{z-2}$$

OBS! $Z(\alpha) = Z(\beta) \implies \alpha = \beta$ varför?

Definition: Givet $\alpha = \{a_k\}$ definierar vi shift $S(\alpha) = \{b_k\}$ $b_k = a_{k+1}$

- $Z(S(\alpha)) = \sum_0^{\infty} \frac{a_{k+1}}{z^k} = z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} = z\left(Z(\alpha) - a_0\right)$
- $Z(S^N(\alpha)) = \dots = z^N\left(Z(\alpha) - \sum_0^{N-1} \frac{a_k}{z^k}\right)$

Definition: Givet $\alpha = \{a_k\}$, $\beta = \{b_k\}$ definierar vi faltningen

$$\alpha * \beta = \{c_k\} \qquad c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Proposition 4.1F: $Z(\alpha * \beta) = Z(\alpha) Z(\beta)$

Bevis: $Z(\alpha) Z(\beta) = \left(\sum_0^{\infty} \frac{a_k}{z^k}\right)\left(\sum_0^{\infty} \frac{b_m}{z^m}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-1}\right)\frac{1}{z^k} = Z(\alpha * \beta)$ $\square$

Exempel: Hitta följden $\alpha = \{a_k\}$ som löser differensekvationen

(*) $a_{k+1} - a_k = b_k$, $a_0 = 1$, $\beta = \{b_k\}$ given (anta $|b_k| \leq M r^k$)

Lösning: observation: (*) kan skrivas $S(\alpha) - \alpha = \beta$

Z-transformen av detta ger: $Z(Z(\alpha) - 1) - Z(\alpha) = Z(\beta)$

$\implies Z(\alpha) = \frac{z}{z-1} + \frac{1}{z-1} Z(\beta)$. Har $\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1 - 1/z} = \sum_0^{\infty} \frac{1}{z^k} = Z(I)$, $I = (1, 1, 1, \dots)$

$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - 1/z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} = Z(I')$, $I' = (0, 1, 1, \dots)$ Får $Z(\alpha) = Z(I) + Z(I') Z(\beta) =$

$= Z(I + I' * \beta) \implies \alpha = I + I' * \beta$ dvs. $a_k = 1 + \sum_{j=1}^{k} b_{k-j} = 1 + \sum_{j=0}^{k+1} b_j$

Repetion

Komplex deriverbarhet

$f: G \to \mathbb{C}$ komplext deriverbar i $z_0 \in G$ om $f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ existerar. Om G öppen och f komplext deriverbar i alla punkter i G då säger vi att f är holomorf i G.

Cauchy-Riemanns ekv. (Sats 2.13)

a) om f holomorf, $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, då löser u, v CR ekv.

$$\begin{cases} \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} \\ \frac{du}{dy} = -\frac{dv}{dx} \end{cases} \quad \text{alt. } \frac{df}{dx} = -i\frac{df}{dy} \; (= f')$$

b) Om $f \in C^1$ och dess partiella derivator löser CR:s ekv då är f holomorf.

Exempel: $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, säg e^z holomorf i $\mathbb{C}$ (hel) mha CR:s ekv.

Sats 2.17: Om f holomorf i område G (dvs. öppen & sammanhängande) och $f' \equiv 0$ i G, då är f konstant

Exempel: Antag att f holomorf och reellvärd i G. Visa att f konstant i G. (område)

Lösning: Låt $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, enligt antagande $v \equiv 0$.

$$\frac{du}{dx} \overset{CR}{=} \frac{dv}{dy} \equiv 0 \qquad f' \overset{CR}{=} \frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} = 0 \underset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} f \text{ konstant}$$

Konforma avbildningar:

Definition: En komplex fkn $f: G \to \mathbb{C}$ är konform om den bevarar vinkeln mellan kurvor i G

Proposition 2.11 Om f holomorf i G, $f' \neq 0$ i G, då är f konform

Lemma: f holomorf, γ kurva $(f \circ \gamma)(t) = f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$

Möbiusavbildningar:

$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ kallas Mavb om $ad - bc \neq 0$. $M'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0$

dvs. Mavb är konform. $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ $\frac{az+b}{cz+d}: \hat{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, $-\frac{d}{c} \to \infty$, $\infty \to \frac{a}{c}$

Får bijektion.

Sats 3.4 Mavb avbildar cirklar & linjer på cirkar eller linjer.

Tentauppgift 2013 oktober uppg. 4

Avbilda $G = \{|z| < \sqrt{2}\} \cap \{|z-2| < \sqrt{2}\}$

konformt & bijektivt på öppen på öppna halvplanet

Svar:

Lösning

Idé: Hitta Mavb. $\xrightarrow{M}$

Steg 1: Hitta Mavb M som avbildar C_1 & C_2 på två linjer genom 0.

Välj $M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ s.a. $M(1-i)=0$, $M(1+i)=\infty$, $M(1)=i$

.... $M(z) = \frac{z-1+i}{iz+1-i}$, $L_1 = M(C_1)$, $L_2 = M(C_2)$ enligt sats linjer genom 0.

$L_3 = M(\{z : \operatorname{Re} z = 1\})$ innehåller punkterna $0, i, \infty$ $\xRightarrow{\text{Sats}}$ $L_3 = \operatorname{Im}$ axeln

---

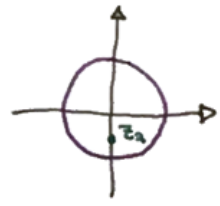
$\boxed{\text{räknestuga 19/10}}$

Häftet "Residue Calculus"

① Visa att $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$ $\quad a > b \geq 0$

Lösning: $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+b\sin t} = \left[\begin{array}{l} z = e^{it} \quad \sin t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} = \frac{z-1/z}{2i} \\ dz = ie^{it}dt \Rightarrow dt = dz/iz \end{array}\right] =$

$$= \frac{1}{i}\int_{C[0,1]} \frac{1}{a+b\frac{z-1/z}{2i}} \cdot \frac{dz}{z} = 2\int_{C[0,1]} \frac{dz}{2iaz+bz^2-b} \overset{(*)}{=}$$



$bz^2 + 2ia - b = 0 \Rightarrow z^2 + \frac{2ia}{b}z - 1 = 0 \Rightarrow \left(z + \frac{ia}{b}\right)^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} = \frac{b^2-a^2}{b^2}$

$z = -\frac{ia}{b} \pm i\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$, $z_1 = \frac{-ia}{b} - i\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ $\quad z_2 = \frac{-ia}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$

$-1 < -\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} < 1$ $\boxed{?}$ $\Leftrightarrow -b < -a + \sqrt{a^2-b^2} < b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-b < \sqrt{a^2-b^2} < a+b \Leftrightarrow (a-b)^2 < a^2-b^2 < (a+b)^2$ sant!

$(*) = 2 \cdot 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = \left[f(z) = \frac{1}{2iaz+bz^2-b} = \frac{1}{b}\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)}\right]$

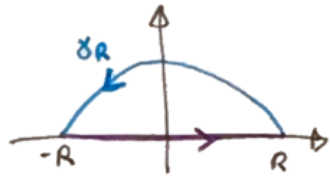
$$= 4\pi i \left.\frac{(z-z_2)}{b(z-z_1)}\right|_{z=z_2} = \frac{4\pi i}{b}\frac{1}{z_2-z_1} = \frac{4\pi i}{b}\cdot\frac{1}{2i\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}} = \frac{4\pi i}{2i}\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$\square$

Sats: Om f har en pol av ordning k i z_0 så är

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \cdot (z-z_0)^k f \Big|_{z=z_0}. \quad k=1 \Rightarrow \operatorname{Res}(f, z_0) = (z-z_0) f \Big|_{z=z_0}$$

Sid 8. (1) Beräkna $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$

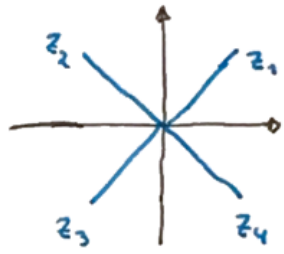


$C_R = [-R, R] \cup \gamma_R$

Lösning: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1+x^4} = \lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{dz}{1+z^4} =$

$$= \lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} - \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} \right) = (*) \qquad \left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^4} \right| \leq \pi R \max_{z\in\gamma_R} \left| \frac{1}{1+z^4} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

$$(*) = \int_{C_R} \frac{dz}{1+z^4} = (*) \Rightarrow \quad z^4+1=0 \iff (z^2-i)(z^2+i) = 0$$



$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i) \quad z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

$z_1^2 = i \quad \& \quad z_3^2 = (-z_1)^2 = i$

$$(*) = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(z_1) + \operatorname{Res}(z_2) \right) = \left\{ (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4) \cdot \frac{1}{z^4+1} = \frac{1}{(z^2-i)(z^2+i)} \right.$$

$$= \frac{1}{(\cancel{z-z_1})(z-z_3)(z^2+i)}$$

$$= \frac{1}{(z^2-i)(\cancel{z-z_2})(z-z_4)}$$

$$= 2\pi i \left(\frac{1}{2i(z_1-z_3)} - \frac{1}{2i(z_2-z_4)} \right) = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}(1+i)} - \frac{1}{\sqrt{2}(-1+i)} \right)$$

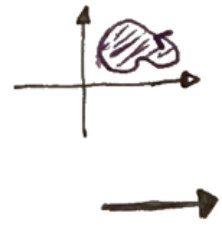
$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-i}{(1+i)(1-i)} - \frac{-1-i}{(-1+i)(-1-i)} \right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (1-i+1+i) =$$

$$\boxed{= \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$

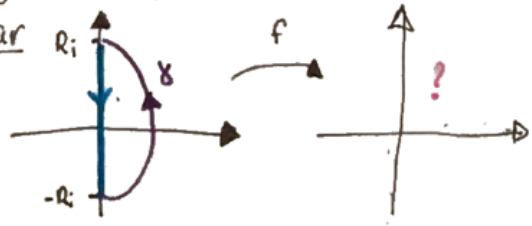
---

sida 11 (2) Använda argumentprincipen för att hitta antalet lösningar till $z^3+z^2+z+4=0$ i höger halvplan.

Lösning: Låt $f(z) = z^3+z^2+z+4$ och γ vara någon enkelt sluten kurva. Arg. principen: $W(f,\gamma) = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$



$W = \dfrac{\text{Arg var}}{2\pi}$

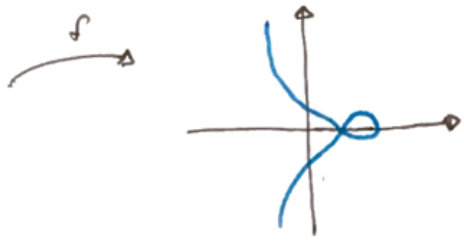


På $[-iR, iR]$

Låt $z = ti$, $t \in \mathbb{R}$, $f(ti) = -t^3 i - t^2 + ti + 4 = (4-t^2) + i(t-t^3)$

$\operatorname{Re} f(ti) = 0 \iff t = \pm 2$

$\operatorname{Im} f(ti) = 0 \iff \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$



$\Rightarrow$ Arg var. $(f, [-Ri; iR] \approx \pi$

$$\text{Arg var}(f, C) \approx \frac{3 \cdot 2\pi}{2} = 3\pi$$

$$W = \text{Arg var}(f, \gamma) / 2\pi \approx \frac{4\pi}{2\pi} = 2$$

$$N(f, \gamma) = W(f, \gamma) = 2$$

Sida 8 (4) Beräkna $I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+s^2} \cdot \frac{1}{1+(s-t)^2}\, ds$

Lösning: $f(s) = \frac{1}{1+s^2}$ $\quad I(t) = f * f(t)$ enligt inversionsformeln.

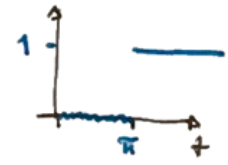
$\hat{\hat{g}}(t) = 2\pi g(-t)$, $\quad I(t) = f * f(t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\widehat{f * f}}(-t) = \frac{1}{2\pi} \widehat{\hat{f} \cdot \hat{f}}(-t)$

$= \frac{1}{2\pi} \widehat{(\pi e^{-|x|})^2}(-t) = \frac{\pi}{2} \widehat{e^{-2|x|}}(-t) = \frac{\pi}{2} \frac{4}{4+t^2} = \frac{2\pi}{4+t^2}$

Sida 13 Lös diff. ekvationen $\begin{cases} u'' + u = g(t) \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$ $\quad g(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq \pi \\ 1 & t > \pi \end{cases}$

Lösning: $L(g) = L(u'' + u) = sL(u') - \cancel{u'(0)} + L(u)$

$= s^2 L(u) + s\cancel{u(0)} + L(u) = (s^2+1) L(u)$



$L(u) = \frac{1}{s^2+1} L(g) = L(\sin x) L(g) = L(g * \sin t)$ $t > \pi$

$\Rightarrow u(t) = g * \sin(t) = \int_0^t g(s) \sin(t-s)\, ds = \int_\pi^t \sin(t-s)\, ds =$

$\left[\cos(t-s)\right]_\pi^t = 1 - \cos(t-\pi)$

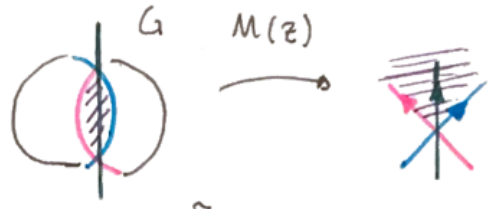
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < \pi \\ 1 - \cos(t-\pi) & t > \pi \end{cases}$$

$\boxed{\text{Föreläsning } 19/10}$

2013 oktober uppg 4

Avbilda $G = \{|z| < \sqrt{2}\} \cap \{|z-2| < \sqrt{2}\}$ konform och bijektiv på öppna $\overset{\text{övre}}{\uparrow}$ halvplanet

Lösning (fortsättning):



$M(z) = \frac{z-1+i}{iz+1-i}$ $\quad M(G) = \{z : |z| > 0,\ \pi/4 < \mathrm{Arg}(z) < 3\pi/4\}$

z^2 dubblar vinkeln $\quad (z^2)' = 2z \neq 0$ i $M(G)$

$\Rightarrow z^2$ avbildar $M(G)$ konform och bijektiv på öppna vänstra halvplanet

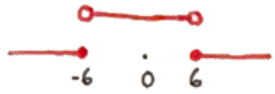
$\Rightarrow -iz \circ z^2 \circ M(z) = -i\left(\frac{z-1+i}{iz+1-i}\right)^2$ avbilda G bijektiv och konform på öppna övre halvplanet.

F3 s. 8 $\quad$ Visa att $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \pi \min(a,b) \quad a,b > 0$

Lösning: $\widehat{f*g} = \hat{f}\hat{g} \overset{IF}{\Rightarrow} 2\pi (f*g)(-t) \overset{IF}{=} \widehat{\widehat{f*g}}(t) = \widehat{\hat{f}\hat{g}}(t)$

Enligt tidigare övning:

$$\frac{\sin(6x)}{x} = \frac{1}{2}\hat{f}_6(x),\quad f_6(t) = \begin{cases} 0, & |t| \geq 6 \\ 1, & |t| < 6 \end{cases}$$



Får $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin bx}{x} \cdot \underbrace{e^{-i0x}}_{\text{viktig}}\,dx = \widehat{\frac{\sin ax}{x} \cdot \frac{\sin bx}{x}}(0) =$

$\displaystyle = \widehat{\frac{1}{2}\hat{f}_a \cdot \frac{1}{2}\hat{f}_b}(0) = \frac{1}{4}\widehat{\hat{f}_a\hat{f}_b}(0) \overset{\text{enligt ovan}}{=} \frac{\pi}{2} f_a * f_b(0) = \frac{\pi}{2}\int_{r=-\infty}^{\infty} f_a(r) f_b(-r)\,dr =$

$\displaystyle = \frac{\pi}{2}\int_{-\min(a,b)}^{\min(a,b)} 1\,dr = \pi \min(a,b) \quad \square$

"små trixig" - David

F1c s. 13 Bestäm LT av $t^2 e^{at}$

Lösning: $\tilde{1} = \frac{1}{s}$, $\widetilde{e^{at}} = \widetilde{e^{at} \cdot 1} = \tilde{1}(s-a) = \frac{1}{s-a}$

$$\widetilde{te^{at}} = -\left(\widetilde{e^{at}}\right)' = -\left(\frac{1}{s-a}\right)' = \frac{1}{(s-a)^2}$$

$$\widetilde{t^2 e^{at}} = -\left(\widetilde{te^{at}}\right)' = -\left(\frac{1}{(s-a)^2}\right)' = \frac{2}{(s-a)^3}$$

F3 a. s. 13 Lös diff.ekv. $*: u'' - 2u' + 2u = 6e^t \quad t \geq 0$

$u(0) = 0,\ u'(0) = 1$

Lösning: LT av $*$ ger:

$$s^2\tilde{u} - su(0) - u'(0) - 2(s\tilde{u} - u(0)) + 2\tilde{u} = 6\widetilde{e^t} \iff$$

$$\iff (s^2 - 2s + 2)\tilde{u} - 1 = 6\frac{1}{s-1} \iff \tilde{u} = \left(6\frac{1}{s-1} + 1\right) \cdot \frac{1}{(s^2 - 2s + 2)}$$

$$\Rightarrow s^2 - 2s + 2 = (s-1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(s-1)((s-1)^2+1)} \overset{\text{PBU}}{=} \frac{1}{s-1} - \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \Rightarrow \frac{1}{s-1} = \widetilde{e^t},\ \frac{s}{s^2+1} = \widetilde{\cos t}$$

$$\frac{1}{s^2+1} = \widetilde{\sin t},\ \frac{s-1}{(s-1)^2+1} = \widetilde{e^t \cos t},\ \frac{1}{(s-1)^2+1} = \widetilde{e^t \sin t}$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = \widetilde{e^t(6 - 6\cos t + \sin t)} \Rightarrow u = e^t(6 - 6\cos t + \sin t).$$

OBS! Fulla uträkningar krävs för full poäng på tentan.

F 16 s. 16 Hitta ZT av $\alpha = \{a_k\}$ $a_k = k$

Lösning: $Z(\alpha) = \sum_0^\infty \frac{k}{z^k}$. Sätt $w = \frac{1}{z}$, $Z(\alpha) = \sum_0^\infty k w^k = w \sum_1^\infty k w^{k-1}$

$$= w\left(\sum_0^\infty w^k\right)' = w\left(\frac{1}{1-w}\right)' = \frac{w}{(1-w)^2} = \frac{1}{z}\frac{1}{(1-1/z)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

F3 s.16 Lös differensekvationen $*$: $a_{k+1} - a_k = k$, $a_0 = 0$

Lösning: $\alpha = \{a_k\}$, $\beta = \{k\}$

$*$ $\Leftrightarrow$ $S(\alpha) - \alpha = \beta$ ZT av detta ger: $z(z(\alpha) - a_0) - z(\alpha) = z(\beta)$

$\Leftrightarrow$ $(z-1)z(\alpha) = \frac{z}{(z-1)^2}$ ← enligt tidigare uppgift ← $\Rightarrow$ $z(\alpha) = \frac{z}{(z-1)^3}$

Övning 1c s. 16 visade att $\frac{2z}{(z-1)^3} = z(\gamma)$ $\gamma = \{k(k-1)\}$

$\Rightarrow$ $z(\gamma) = \frac{1}{2} z(\gamma) = z\left(\frac{1}{2}\gamma\right)$

$\Rightarrow$ $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$ dvs. $a_k = \frac{k(k-1)}{2} = \binom{k}{2}$

Fortsättning $\boxed{\text{REPETITION.}}$

Kurvintegraler: $\int_\gamma f\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

Triangelolik. för integraler (Sats 4.6 d)

$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)|\,|\gamma|$, $|\gamma| = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt$.

Homotopi:

Definition: Två slutna kurvor γ_0, γ_1 i G är homotopa i G, $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$, om γ_0 kan kontinuerligt definierad till γ_1 i G.

γ är nollhomotop, $\gamma \sim_G 0$, om den kan def. till punkt.

Cauchys Sats (Sats 4.18)

Om f holo i G, γ_0, γ_1 styckvis glatta slutna kurvor i G. s.a. $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$, då är $\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz$.

{ Om f holomorf i G, $\gamma \sim_G 0$, då $\int_\gamma f\,dz = 0$ (Kor. 4.20) }

Cauchys integralformel (Sats 4.24)

f holomorf i G, $\overline{D(w,R)} \subseteq G$, då är $f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz$, $0 < r \leq R$

2013 Januari 1a Bestäm $\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$

Lösning: $\int_{|z|=1} \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz \overset{CIF}{=} 2\pi i \left(e^z - e^{-z}\right)_{z=0} = 0$

CIF för derivator (Sats 5.1)

f holo i G, $\overline{D(w,R)} \subseteq G$, då $f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^2} dz$, $0 < r \leq R$

Kor: Om f holomorf så $\exists f^{(k)}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$f^{(k)}(w) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-w|=r} \frac{f(z)}{(z-w)^{k+1}} dz$.

2013 Januari 3 Beräkna $\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz$

Lösning: $\int_{|z|=1} \frac{\sin z - \sinh z}{z^8} dz \underset{\text{för der}}{\overset{CIF}{=}} \frac{2\pi i}{7!} \left(\sin z - \sinh z\right)^{(7)}_{z=0} = -\frac{4\pi i}{7!}$

$\boxed{\text{Föreläsning 22/10}}$

Liovilles sats (Kor 5.13)

Om f hel (holomorf i $\mathbb{C}$) och $|f| \leq M$ då är f konstant.

Tenta 2012 Januari uppg. 8

Bestäm alla hela funktioner f s.a. $|f(z)| \leq e^{\operatorname{Re} z}$

Lösning: Låt $g(z) = \frac{f(z)}{e^z}$ hel funktion.

$|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|e^z|} \leq \frac{e^{\operatorname{Re} z}}{e^{\operatorname{Re} z}} = 1 \overset{\text{Liovilles}}{\Longrightarrow} g \equiv c \Rightarrow f = ce^z$

$|f(z)| = |c| e^{\operatorname{Re} z} \leq e^{\operatorname{Re} z}$ enligt antagandet

$\Rightarrow |c| \leq 1$, så vi får $f(z) = ce^z$, $|c| \leq 1$

De funktionerna uppfyller kraven, så svaret blir $f(z) = ce^z$, $|c| \leq 1$

Algebrans fundamentalsats (Sats 5.11)

Om $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z^1 + a_0 z^0$ $n \geq 1$, då finns $z_0 \in \mathbb{C}$ s.a.

$p(z_0) = 0$

Primitiva funktioner

Definition: F primitiv till f om $F' = f$

Definition: Område G enkelt sammanhängande om varje sluten kurva i G är noll homotop i G.

Kor 5.8 Om f holomorf i enkelt sammanhängande område G, då har f primitiv F i G.

Moreras sats (Kor 5.6)

Om f kontinuerlig i område G och $\int_\gamma f\,dz = 0$ för alla styckvis glatta slutna kurvor γ, då f holomorf i G.

Harmoniska funktioner:

Definition: $u: G \to \mathbb{R}$ harmonisk om $u \in C^2$ och $\Delta u = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$

Proposition 6.3: Om f holomorf, då är $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ harmoniska.

Definition: Om u harmonisk och $u = \operatorname{Re} f$, f holomorf, då kallas $v = \operatorname{Im} f$ harmoniskt konjugat till u.

Sats 6.6: Om u harmonisk i enkelt sammanhängande område G, då $\exists f$ holomorf i G s.a. $u = \operatorname{Re} f$.

Tenta 2013 oktober uppg. 8:

Låt u vara harmonisk funktion i $\mathbb{C}$. Visa att det finns holomorf funktion f sa. $\operatorname{Re} f = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$

Lösning: Alternativ 1: visa att $x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$ harmonisk, sen använd $\mathbb{C}$ enkelt sammanhängande, följer sen från sats att $\exists f$ holomorf i $\mathbb{C}$ s.a. $\operatorname{Re} f = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$.

Maximumprincipen (Sats 6.10)

Om u harmonisk i område G och u antar sitt max (eller min) i G då u konstant.

Följd: svaga maxprincip: Om u harmonisk i G, kontinuerlig på $\bar{G}$ och G begränsad, då antar u sitt max och min på ∂G.

Tenta 2012 mars uppg. 8

Låt f vara holomorf i $\mathbb{C}$, antag f reellvärd på $C(0,1)$. Visa f konstant.

Lösning: Låt $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, enligt sats u, v harmoniska.

Enligt antagandet $v = 0$ på $C(0,1)$.

Svaga maxprincipen $\Rightarrow \max\limits_{\overline{D}(0,1)} v = \max\limits_{C(0,1)} v = 0 \Rightarrow v \leq 0$ på $\overline{D}(0,1)$

Svaga maxprincipen $\Rightarrow \min\limits_{\overline{D}(0,1)} v = \min\limits_{C(0,1)} v = 0 \Rightarrow v \geq 0$ på $\overline{D(0,1)}$

$\Rightarrow v \equiv 0$ i $\overline{D}(0,1)$. $\frac{du}{dx} \overset{CR}{=} \frac{dv}{dy} \equiv 0$ i $D(0,1)$, $f' \overset{CR}{=} \frac{df}{dx} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} \equiv 0$

i $D(0,1) \overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow} f$ konstant i $D(0,1)$, dvs $f \equiv C$ i $D(0,1)$

f, c holomorf i $\mathbb{C}$, $f(\frac{1}{n}) = c$, $\frac{1}{n} \xrightarrow[\text{max}]{} 0 \in \mathbb{C} \underset{\text{princ.}}{\overset{\text{ident.}}{\Longrightarrow}} f \equiv c$ i $\mathbb{C}$

Maximum modulusprincipen (Kor 6.11)

Om f holomorf i G och $|f|$ antar max i G. då är f konstant i G.

Tenta 2014 Januari uppg. 9

Låt f vara holomorf i $D(0,1)$, $|f| \leq 1$, $f(1/2) = 1/2$. Visa att

$$|f(z) - 1/2| \leq 3 \frac{|z - 1/2|}{|z-2|}.$$

Lösning: om $|a| < 1$ så är enligt övning 3.9 Mavb $M(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ en bijektion från $D(0,1)$ till sig självt, speciellt är $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| = 1$ på $C(0,1)$

Låt $a = 1/2$, $M(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}$, $g(z) = \frac{f(z) - 1/2}{M(z)}$

$M(z)$ har enkelt nollställe i $1/2$, $f(z) = 1/2$ har nollställe i $1/2$

$\underset{\text{nollstellen}}{\overset{\text{klassav}}{\Longrightarrow}} g$ holomorf i $D(0,1)$. $|g(z)| = \frac{|f(z) - 1/2|}{M(z)} \overset{\Delta\text{olik}}{\leq} \frac{|f(z)| + 1/2}{1} \leq \frac{3}{2}$ på $C(0,1)$

Svaga maximumprincipen $\Rightarrow |g| \leq 3/2$ på $D(0,1)$

$\Rightarrow |f(z) - 1/2| \leq \frac{3}{2}|M(z)| = \frac{3}{2}\frac{|z - 1/2|}{|1 - \frac{1}{2}z|} = \frac{3|z - 1/2|}{|z-2|}$

Svaga maximumprincipen:

Om f holomorf i G, kontinuerlig på $\overline{G}$, G begränsad, då antar $|f|$ sitt max på δG.

Taylorutveckling:

Sats 7.31: En potensserie $\sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ har konvergensradie $R \in [0,\infty]$ s.a.

ⓐ serien konvergerar på $D(z,R)$

ⓑ serien konvergerar likformigt på $\bar{D}(z,r)$, $r<R$

ⓒ serien divergerar på $\mathbb{C} \setminus \bar{D}(z,R)$

Sats 8.1: Om $f(z) = \sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ har konvergensradie $R>0$, då är $f(z)$ holomorf i $D(z_0,R)$

Taylorutveckling av holomorfa funktioner (Sats 8.8)

Antag f holomorf i $D(z_0,R)$. Då har f en taylorutveckling $f(z) = \sum_0^\infty c_k(z-z_0)^k$ i $D(z_0,R)$ där $c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz \quad (r<R)$

Klassification av nollställen (Sats 8.14 +):

f holomorf i G, $f(z_0)=0$, då gäller antingen:

i) $f \equiv 0$ i G eller

ii) $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, $m \geq 1$, g holomorf i G, $g(z_0) \neq 0$.

m kallas nollställets ordning

"olika"

Identitetsprincipen (Sats 8.15 ∧ 16):

Antag f,g holomorfa i G, $f(z_n)=g(z_n)$, z_n följd distinkta punkter i G, $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_\infty \in G$, då är $f \equiv g$ i G.

Föreläsning 23/10

Tenta 2013 oktober uppgift 8

Låt u vara harmonisk i $\mathbb{C}$. Visa att $\exists f$ holomorf i $\mathbb{C}$ s.a.

$$\operatorname{Re} f = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$$

Lösning (nytt försök)

$\mathbb{C}$ enkelt sammanhängande $\overset{\text{Sats}}{\Longrightarrow}$ $\exists g$ holomorf i $\mathbb{C}$ s.a. $u = \operatorname{Re} g$

Låt $v = \operatorname{Im} g$. $\quad g' \overset{CR}{=} \frac{dg}{dx} = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx} \overset{CR}{=} \frac{du}{dx} - i\frac{du}{dy}$

$$zg' = (x+iy)\left(\frac{du}{dx} - i\frac{du}{dy}\right) = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy} + i\left(y\frac{du}{dx} - x\frac{du}{dy}\right)$$

$f = zg'$ holomorf enligt sats. $\operatorname{Re} f = x\frac{du}{dx} + y\frac{du}{dy}$

Laurentserieutveckling av holomorf funktion (Sats 8.24)

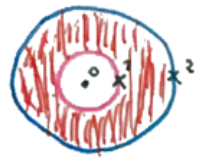
Antag f holomorf i $A(z_0, R_1, R_2)$. Då har f en Laurentserieutveckling

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ i } A(z_0, R_1, R_2) \text{ där } c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz,\ R_1 < r < R_2$$

Tenta 2014 Januari uppg. 3

Utveckla $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ i LS, centrum i 0, giltig i $A(0,1,2)$

Lösning: $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$ holomorf i $\mathbb{C}\setminus\{1,2\}$



detta område vi är intresserade av.

PBU ger $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{1}{(z-2)^2}$.

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} \overset{|z|>1}{=} \frac{1}{z}\sum_0^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{-\infty}^{-1} z^k$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2} \overset{|z|<2}{=} -\frac{1}{2}\sum^{\infty}(z/2)^k = -\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k$$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = -\left(\frac{1}{z-2}\right)' = -\left(-\sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k\right)' \overset{\text{Sats}}{=} \sum_1^{\infty}\frac{k}{2^{k+1}}z^{k-1} = \sum_0^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}z^k$$

Får: $\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} = \sum_{-\infty}^{-1} z^k + \sum_0^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}z^k + \sum_0^{\infty}\frac{k+1}{2^{k+2}}z^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k z^k$, $c_k = \begin{cases} 1, & k<0 \\ \frac{k+3}{2^{k+2}}, & k\geq 0 \end{cases}$

Isolerade singularitet

Definition: Antag f har isolerad singularitet i z_0, dvs f holomorf i $D(z_0,R)^\times$. Då är singularitet:

i) hävbar om man kan definiera $f(z_0)$ s.a. f holomorf i $D(z_0,R)$

ii) en pol om $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

iii) väsentlig annars.

Klassifikation av isolerade singularitet. (Sats 4.1, 4.2 R)

Antag z_0 isolerad singularitet till f. Då är singularitet:

a) hävbar omm $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z) = 0$

b) en pol omm $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, $m \geq 1$, g holomorf i $D(z_0,R)$, $g(z_0) \neq 0$

m är polens ordning.

OBS! endast a-delen är på bevislistan

Tenta 2013 Januari uppg. 7

Antag f holomorf i $D(0,1)^\times$ och $|f| \leq 1$. Visa att f kan utvidgas till en holomorf funktion i $D(0,1)$.

Lösning: $\lim_{z\to 0} z = 0$, $|f|$ begränsad $\xRightarrow{\text{räkneregels för gränser}}$ $\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$

$\Rightarrow$ 0 hävbar singularitet, dvs f kan utvidgas till holomorf funktion i $D(0,1)$.

Klass av isol. sing.

Residykalkyl

Definition: Om f har isolerad singularitet i z_0, $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ i $D(z_0,R)^\times$, då definierar vi $\mathrm{Res}_{z_0} f = c_{-1}$ residyn

Residysatsen (Sats 9.10)

Antag f holomorf i G förutom isolerad singularitet z_k, γ styckvis glatt sluten enkel positivt orienterad nollhomotop kurva i G som undviker singularitet z_k.

Då $\int_\gamma f\,dz = 2\pi i \sum_{z_k \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{z_k} f$.

Proposition 9.11 a

Om z_0 hävbar singularitet då $\mathrm{Res}_{z_0} f = 0$

Proposition 1.3 R:

Om $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$, g holomorf, då $\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

Proposition 9.14

Om f, g holomorf, z_0 enkelt nollställe till g, då $\mathrm{Res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

Tenta 2013 oktober uppg. 2

Beräkna $\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$

Lösning: Vi observerar $\sin^2(t) = \sin^2(t+\pi) \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}$

Variabelbyte $z = e^{it}$, $dt = \ldots = -\frac{i\,dz}{z}$

$\sin t = \ldots = \frac{z^2-1}{2iz}$, $1+\sin^2 t = \ldots = -\frac{z^4-6z^2+1}{4z^2}$, $\frac{dt}{1+\sin^2 t} = \ldots = f(z)\,dz$

$f(z) = \frac{4iz}{z^4-6z^2+1}$, $z^4-6z^2+1 = \prod_{j=1}^{4}(z-z_j)$, $z_1 = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $z_2 = -\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

$z_3 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $z_4 = -\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

OBS! $0 < 3-2\sqrt{2} < 1$

$\mathrm{Res}_{z_3} f = \left(\frac{4iz}{4z^3-12z}\right)_{z=z_3} = \ldots = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\mathrm{Res}_{z_4} f = \left(\frac{4iz}{4z^3-12z}\right)_{z=z_4} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}$

$\Longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} f\,dz \underset{\text{residysatsen}}{=} \frac{1}{2}\,2\pi i\left(-\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

Definition: f meromorf om f holomorf förutom poler.

Definition: Om γ sluten kurva i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ så definierar vi

vindningstalet $W(\gamma)$ som är # varv γ går runt 0 i positiv riktn

Argumentprincipen (Sats 3.2R)

Antag f meromorf i G, γ styckvis glatt sluten enkel positivt orienterad nollhomotop kurva i G som undviker f:s nollställen & poler.

Då är $W(f\circ\gamma) = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$, där $N(f,\gamma)$ = # nollställen till f i $\mathrm{int}(\gamma)$

$P(f,\gamma)$ = # poler till f i $\mathrm{int}(\gamma)$

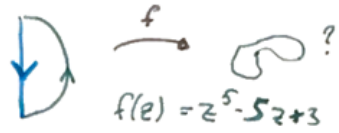
Tenta 2013 oktober uppg. 3b

Hur många nollställen har $z^5 - 5z + 3$ i högra halvplanet?

Lösning:

$\gamma_R(t) = Re^{it}, \; t \in [-\pi/2, \pi/2]$

$\sigma_R = \gamma_R \cup [iR, -iR]$



argvar$(\gamma \circ \gamma_R)$: $f(Re^{it}) = R^5 e^{5it} - 5Re^{it} + 3 = R^5 e^{i5t}\Big(1 - \underbrace{\frac{5e^{-4it}}{R^4} + \frac{3e^{-5it}}{R^5}}_{\text{litet}}\Big)$

$\Rightarrow \arg(f(Re^{it})) \approx 5t + 2\pi k$

$\Rightarrow$ argvar$(f \circ \gamma_R) \approx 5\pi$

argvar$(f \circ [iR, -iR])$: $f(iy) = iy^5 - 5iy + 3 = 3 + i(y^5 - 5y)$

$\mathrm{Re}(f(iy)) = 3$

$f(iR) = 3 + i(R^5 - 5R) \Rightarrow \arg(f(iR)) \approx \pi/2 + 2\pi k_1$

$f(-iR) = 3 + i(-R^5 + 5R) \Rightarrow \arg(f(-iR)) \approx -\pi/2 + 2\pi k_2$

$\Rightarrow$ Kurvan passerar 0 till höger

$\Rightarrow$ argvar$(f \circ [iR, -iR]) \approx -\pi$

$\Rightarrow$ argvar$(f \circ \sigma_R)$ = argvar$(f \circ \gamma_R)$ + argvar$(f \circ [iR, -iR])$

$\approx 4\pi$

$\Rightarrow W(f \circ \sigma_R) = 2$ för $R \gg 1$

$\Rightarrow$ f har 2 nollställen i int(σ_R), $R \gg 1$

arg. princ

$\Rightarrow$ f har 2 nollställen i högra halvplanet

Rouchés sats (Sats 9.18) $\boxed{\text{Föreläsning 24/10}}$

Antag f, g holomorf i G, γ styckvis glatt sluten enkel nollhomotop kurva i G. Antag dessutom $|f| > |g|$ på γ. Då har f och $f+g$ lika många nollställen i int(γ)

Tenta 2014 Januari uppg. 4

Hur många nollställen har $f(z) = z^4 + 2z + 10$ i $A(0,1,2)$?

Lösning:

nollställen i $D(0,2)$:

Skriv $f = g + h$, $g(z) = z^4$, $h(z) = 2z + 10$

$|g(z)| = |z^4| = |z|^4 = 16$ på $C(0,2)$

$|h(z)| = |2z + 10| \overset{\Delta \text{olik}}{\leq} 2|z| + 10 = 14$ på $C(0,2)$

$\Rightarrow |g| > |h|$ på $C(0,2) \underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow} N(f, C(0,2)) = N(g, C(0,2)) = 4$

nollställen i $D(0,1)$:

Skriv $f = g + h$, $g(z) = 10$ $h(z) = z^4 + 2z$

$|g| = 10$ på $C(0,1)$

$|h(z)| = |z^4 + 2z| \overset{\Delta \text{olik}}{\leq} |z|^4 + 2|z| = 3$ på $C(0,1)$

$\Rightarrow |g| > |h|$ på $C(0,1) \underset{\text{Rouché}}{\Longrightarrow} N(f, C(0,1)) = N(g, C(0,1)) = 0$

Har $|f| = |g + h| > |g| - |h| > 0$ på $C(0,1)$

$\Rightarrow$ inga nollställen på $C(0,1)$

$\Rightarrow$ # nollställen till f i $A(0,1,2) = N(f, C(0,2)) - N(f, C(0,1)) = 4$

Fouriertransformen

Definition: Om $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrerbar och $f \in L^1$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty \right)$

så definierar vi FT $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt$

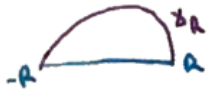
Tenta 2014 Januari uppg. 1

Beräkna mha residykalkylen FT av $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}$

Lösning: $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{e^{-it}}{(x^2+1)(x^2+4)}\, dx$. Vi noterar att $\hat{f}(t) = \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,R]} g(z)\, dz$,

$g(z) = \dfrac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$. Anta först $t \leq 0$. Låt $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$

$\sigma_R = [-R, R] \cup \gamma_R$



$\longrightarrow$

$$\left|\int_{\gamma_R} g\,dz\right| \underset{\text{för } \int}{\overset{\Delta \text{ olikh}}{\leq}} \max_{z\in\gamma_R}\left|\frac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\right| \pi R \leq \Big[\, |e^{-itz}| = e^{ty} \leq 1 \text{ på } \gamma_R \text{ då } t\leq 0!\,,$$

$$|(z^2+1)(z^2+4)| \underset{\Delta\text{ olikh}}{\overset{\text{omv}}{\geq}} (|z|^2-1)(|z|^2-4) = (R^2-1)(R^2-4) \text{ på } \gamma_R\Big] \leq$$

$$\leq \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)} \xrightarrow[R\to\infty]{} 0 \qquad \Longrightarrow \hat f(t) = \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} g\,dz \quad (t\leq 0)$$

g holomorf i $\mathbb{C}$ förutom singulär i $\pm i$, $\pm 2i$, $i, 2i$ ligger i $\operatorname{int}(\sigma_R)$, $R>$

$$\operatorname{Res}_i g \overset{\text{Sats}}{=} \left(\frac{e^{-itz}}{(z+i)(z^2+4)}\right)\Big|_{z=i} = -\frac{ie^t}{6}$$

$$\operatorname{Res}_{2i} g \overset{\text{Sats}}{=} \left(\frac{e^{-itz}}{(z^2+1)(z+2i)}\right)\Big|_{z=2i} = \frac{ie^{2t}}{12}$$

$$\Longrightarrow (t\leq 0) \quad \hat f(t) = \lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_R} g\,dz \underset{\text{Sats}}{\overset{\text{Res}}{=}} \lim_{R\to\infty} 2\pi i\left(\frac{-ie^t}{6}+\frac{ie^{2t}}{12}\right) = \frac{\pi e^t}{6}(2-e^t)$$

$f(x)$ reellvärd $\Longrightarrow \overline{f(x)e^{-itx}} = f(x)e^{itx} = f(x)e^{-i(-t)x}$

$\Longrightarrow \overline{\hat f(t)} = \hat f(-t)$, $\hat f(t) = \overline{\hat f(-t)}$.

Får då $t\geq 0$: $\hat f(t) = \overline{\hat f(-t)} = [-t\leq 0] = \overline{\frac{\pi e^{-t}}{6}(2-e^{-t})} = \frac{\pi e^{-t}}{6}(2-e^{-t})$

Får att $\forall t$: $\hat f(t) = \frac{\pi e^{-|t|}}{6}(2-e^{-|t|})$

Laplacetransformen

Definition: $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{C}$ integrerbar, $|f(t)|\leq Ae^{Bt}$, $A, B\in\mathbb{R}$

då definierar vi LT $\tilde f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$, $s\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Re} s > B$

$\tilde f$ holomorf

Tenta 2014 Januari uppg 6.

Lös mha LT begynnelsevärdesproblemet $*: y''-2y'+5y = e^{-t}$, $t\geq 0$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

Lösning. LT av $*$ ger: $s^2\tilde y - sy(0) - y'(0) - 2(s\tilde y - y(0)) + 5\tilde y =$

$= \widetilde{e^{-t}}$ $\quad\left[\widetilde{e^{-t}} = \tilde 1(s+1) = \frac{1}{s+1}\right] \Longleftrightarrow (s^2-2s+5)\tilde y - s - 2 + 2 = \frac{1}{s+1}$

$\Longleftrightarrow \tilde y = \frac{1}{(s+1)(s^2-2s+5)} + \frac{s}{s^2-2s+5} = \left[s^2-2s+5 = (s-1)^2+4\right] = \longrightarrow$

$$= \frac{1}{(s+1)((s-1)^2+4)} + \frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{(s-1)^2+4}$$

PBU ger $\frac{1}{(s+1)((s-1)^2+4)} = \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{8}\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{1}{4}\frac{1}{(s-1)^2+4}$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{1}{8}\frac{1}{s+1} + \frac{7}{8}\frac{s-1}{(s-1)^2+4} + \frac{5}{4}\frac{1}{(s-1)^2+4}$$

$$\frac{1}{s+1} = \widetilde{e^{-t}}, \quad \frac{s}{s^2+4} = \widetilde{\cos 2t}, \quad \frac{s-1}{(s-1)^2+4} = \widetilde{e^{t}\cos 2t}$$

$$\frac{2}{s^2+4} = \widetilde{\sin 2t}, \quad \frac{1}{(s-1)^2+4} = \frac{1}{2}\widetilde{e^{t}\sin 2t}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \widetilde{\left(\frac{1}{8}e^{-t} + \frac{7}{8}e^{t}\cos 2t + \frac{5}{8}e^{t}\sin 2t\right)}$$

$$\overset{\text{inv}}{\underset{\text{formel}}{\Longrightarrow}} \quad y = \frac{1}{8}e^{-t} + \frac{7}{8}e^{-t}\cos 2t + \frac{5}{8}e^{t}\sin 2t$$