Satsen om Cauchy-Riemanns ekvationer

①

Låt $G \subseteq \mathbb{C}$ öppen, $f: G \to \mathbb{C}$, $u(x,y) := \operatorname{Re} f(x+iy)$, $v(x,y) := \operatorname{Im} f(x+iy)$

a) Om f holomorf i G så löser u, v CR:s ekv:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{eller ekvivalent} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$$

speciellt gäller att $f' = \dfrac{\partial f}{\partial x} = -i \dfrac{\partial f}{\partial y}$

b) Om f är C^1 och u, v löser CR:s ekvation då är f holomorf

Bevis av a) f holo i G så $f'(z)$ existerar $\forall z \in G$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+iy+\Delta x)-f(x+iy)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z) = \frac{\partial}{\partial x}(u+iv)(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i\frac{\partial v}{\partial x}(z)$$

Å andra sidan

$$f'(z) = \lim_{i\Delta y \to 0} \frac{f(x+iy+i\Delta y)-f(x+iy)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z) =$$

$$= -i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Bevis av b)

Sats från flervar: Om f är C^1, då är f differentierbar dvs $f(z+\Delta x+i\Delta y)-f(z) = \frac{\partial f}{\partial x}(z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\Delta y + \underbrace{o}_{\text{lilla ordo}}(|\Delta x + i\Delta y|)$

skriv $h = \Delta x + i\Delta y$

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(z)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(z)\Delta y + o(h)}{h} \overset{\boxed{CR: \frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}}}{=}$$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(z)\Delta x + i\frac{\partial f}{\partial x}(z)\Delta y + o(h)}{h} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(z)h + o(h)}{h} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(z) + \frac{o(h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} \frac{\partial f}{\partial x}(z)$$

Så f är komplext deriverbar $\forall z \in G$,

dvs f holo i G

Cauchys sats

Antag f holo i G och γ_0, γ_1 slutna, styckvis glatta kurvor i G s.a. $\gamma_0 \sim_G \gamma_1$. Då är

$$\int_{\gamma_0} f\,dz = \int_{\gamma_1} f\,dz.$$

Speciellt, om γ är sluten, styckvis glatt och nollhomotop i G så är

$$\int_{\gamma} f\,dz = 0$$

<u>Bevis</u> Enligt lemma kan man hitta $\gamma^1, \dots, \gamma^k$ s.a. $\gamma_0 \simeq \gamma^1, \dots, \gamma^k \simeq \gamma_1$ är enkelt homotopa.

Så det räcker att visa satsen då $\gamma_0 \simeq \gamma_1$ är enkelt homotopa. Vi har då $\gamma_0 \cup (-\gamma_1) = \pm \partial\Omega$ där $\Omega \subseteq G$.

Vi antar också att $f \in C^1$ (går att bevisa utan men svårt).

Vi får: $\int_{\gamma_0} f\,dz - \int_{\gamma_1} f\,dz = \int_{\gamma_0 \cup (-\gamma_1)} f\,dz = \pm \int_{\partial\Omega} f\,dz =$

$= [u := \mathrm{Re} f,\ v := \mathrm{Im} f,\ dz = dx + i\,dy,\ f\,dz = (u+iv)(dx+i\,dy) =$

$= u\,dx - v\,dy + i(v\,dx + u\,dy)] = \pm\left(\int_{\partial\Omega} u\,dx - v\,dy + i\int_{\partial\Omega} v\,dx + u\,dy\right) =$

$$= \left[\begin{array}{l}\text{Greens sats} \\ \int_{\partial\Omega} P\,dx + Q\,dy = \iint_{\Omega}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy\end{array}\right] =$$

$$= \pm\left(\iint_{\Omega}\underbrace{\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ enligt CR's ekvationer}} dx\,dy + i\iint_{\Omega}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ enligt CR's ekvationer}} dx\,dy\right) = 0$$

γ nollhomotop i G betyder $\gamma \sim_G \gamma_P$ där $\gamma_P(t) = P\ \forall t$, dvs $\gamma_P'(t) = 0$.

Får enligt ovan då att

$$\int_{\gamma} f\,dz = \int_{\gamma_P} f\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\underbrace{\gamma_P(t)}_{=P})\underbrace{\gamma_P'(t)}_{=0}\,dt = 0$$

Cauchys integralformel version 1

f holo i G, $\overline{D}(a,R) \subseteq G$, då är

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz, \quad 0 < r \leq R$$

Bevisa denna

Cauchys integralformel version 2

f holo i G, $a \in G$, $\gamma \sim_{G \setminus \{a\}} C(a,r)$ för små r, då är

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz$$

(för bevis av CIF v2 använd CIF v1 + CS)

Bevis Notera att $\int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{|w|=r} \frac{1}{w}\,dw = 2\pi i$

$w := z-a$ FEX

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a}\,dz.$$

$$A_r := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz$$

Notera $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$ holo i $G\setminus\{a\} \overset{CS}{\Rightarrow} A_r$ oberoende av $r \in (0,R]$ eftersom $C(a,r)$ homotopa i $G\setminus\{a\}$

Vill nu visa att $A_r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, för då följer att $A_r = 0 \ \forall r \in (0,R]$ (enligt det jag noterade ovan)

$$|A_r| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)-f(a)|}{\underbrace{|z-a|}_{=r}} 2\pi r =$$

triangelolikheten för integraler

$$= \max_{|z-a|=r} |f(z)-f(a)| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$ ty f kontinuerlig i a

<u>Cauchys integralformel för derivatan</u>

f holo i G; $\bar{D}(a,r) \subseteq G$, då är

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2}\, dz$$

Bevisa detta

<u>Kolollarium</u>

Om f holo i G så existerar alla ordningens derivator $f^{(k)}, k \in \mathbb{N}$, i G, och om $\bar{D}(a,r) \subseteq G$ gäller

$$f^{(k)}(a) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz$$

Bevis Om $|h|<r$ så $f(a+h) \overset{\text{CIF v2}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-(a+h)} dz$

$$\Rightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_{|z-a|=r} f(z)\left(\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a}\right) dz =$$

$$= \left[\frac{1}{z-a-h} - \frac{1}{z-a} = \frac{h}{(z-a-h)(z-a)}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz$$

vill nu visa att det går mot $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$ då $h \to 0$.

$$\left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)} dz - \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| =$$

$$= \left[\frac{1}{(z-a-h)(z-a)} - \frac{1}{(z-a)^2} = \frac{h}{(z-a-h)(z-a)^2}\right] =$$

$$= \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)h}{(z-a-h)(z-a)^2} dz \right| \leq \max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)||h|}{|z-a-h||z-a|^2} 2\pi r \leq$$

triangelolikheten för integraler

$$\leq \left[|z-a-h| \geq |z-a| - |h| = r - |h| \geq r/2 \quad \text{ty } |h| \leq r/2 \right] \leq$$

omvända triangelolikheten

$$\leq \max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)||h| 4\pi}{r^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

$$\text{Så } f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz$$

Liouvilles sats

Om f hel (holo i $\mathbb{C}$) och begränsad

(dvs $|f| \leq M < \infty$) då är f konstant

Bevis Tag godtyckligt $a \in \mathbb{C}$.

$$|f'(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^2} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z-a|=r} \frac{|f(z)|}{r^2} \cdot 2\pi r \leq \frac{M}{r}$$

CIF der. triangelolikheten för integraler

f hel så kan låta $r \to \infty \Rightarrow f'(a) = 0$

men a är ju godtyckligt så $f'(z) = 0 \ \forall z$

$\Rightarrow$ f konstant

Algebrans fundamentalsats

Låt $p(z) := z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 \quad n \geq 1 \ , a_i \in \mathbb{C}.$

Då $\exists \ z_0 \in \mathbb{C} : p(z_0) = 0.$

Bevis Antag motsatsen, dvs $p(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{C}$.

Då är $\frac{1}{P(z)}$ hel och CIF för derivator ger att

$$\frac{1}{P(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C[0,R]} \frac{\frac{1}{P(z)}}{z} dz \quad \forall R > 0.$$

Låt $d := \text{grad} P$ och låt a_d vara koefficienten till z^d i $P(z)$. Då kan vi för tillräckligt stora R approximera

$$\left|\frac{1}{P(0)}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C[0,R]} \frac{1}{zP(z)}\right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{z \in C[0,R]} \left|\frac{1}{zp(z)}\right| 2\pi R \leq \frac{2}{|a_d| R^d}$$

"proposition 5.10"

R kan väljas hur stort som helst och $\frac{2}{|a_d| R^d} \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$ så

$\frac{1}{P(0)} = 0$ vilket är omöjligt

Taylorutveckling av holomorfa funktioner

Antag f holo i $D(a,R)$. Då har f en Taylorutveckling

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty} C_k(z-a)^k \quad ; \quad D(a,R) \quad , \text{ där}$$

$$C_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz \quad , \quad 0<r<R$$

<u>Bevis</u> Antag först att $a=0$. Välj punkt $w \in D(0,R)$ och r s.a. $|w|<r<R$.

$$f(w) \underset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\left(\frac{1}{1-w/z}\right)dz =$$

$$= \left[\left|\frac{w}{z}\right| = \frac{|w|}{r} < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-w/z} = \sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^k\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^k dz =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \displaystyle\sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^k \underset{\tilde{z} := \frac{w}{z}}{=} \sum_0^\infty \tilde{z}^k \text{ likformigt konvergent på } |\tilde{z}| = \frac{|w|}{r} < 1 \\ \text{dvs } |z| = r. \\ \displaystyle\left|\frac{f(z)}{z}\right| \le \max_{|z|=r} \frac{|f(z)|}{r} < \infty \Rightarrow \sum_0^\infty \frac{f(z)}{z}\left(\frac{w}{z}\right)^k \text{ likf. konv. på } |z|=r \end{array}\right] =$$

$$= \sum_0^\infty w^k \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz = \sum_0^\infty c_k w^k$$

För $a \neq 0$ låt $w := z-a$, $g(w) := f(z)$ holo i $D(0,R)$

$$\Rightarrow f(z) = g(w) \underset{\text{enligt ovan}}{=} \sum_0^\infty c_k w^k = \sum_0^\infty c_k (z-a)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Klassifikation av nollställen

Om f holo i G, $f(a)=0$ då är antingen

i) $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $m \geq 1$, g holo i G, $g(a) \neq 0$

eller

ii) $f=0$ i G

m kallas ordningen (alt. multipliciteten) av nollstället

(ii: $m=\infty$)

Bevis

Iteration av faktorsatsen ger antingen fall i) eller så kan för alla k f skrivas $f(z) = (z-a)^k g_k(z)$, $g_k(a) = 0$

holo i G

Vi får då $f^{(k)}(a) = k!\, g_k(a) = 0$.

Välj $r > 0$ s.a. $D(a,r) \subseteq G$. Har då enligt sats 8.8 (Taylorutveckling av holo funktioner)

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k = 0 \quad i \ D(a,r)$$

Iteration i punkter $a_1, a_2, \ldots$ ger att $f = 0$ i G.

Så att cirkelskivorna täcker hela G

Identitetsprinciper

Antag f, g holo i G, $f(a_n) = g(a_n)$ där a_n följd av distinkta punkter i G s.a. $a_n \to a \in G$.

Då är $f = g$ i G.

Bevis: $h := f - g$ holo i G. $h(a_n) = 0 \ \forall n$,
$h(a) = \lim_{n\to\infty} h(a_n) = 0$. a nollställe till h men ej isolerat ty $a_n \to a \Rightarrow h = 0$ i G, dvs $f = g$ i G.

Om f holo i G, $f(a) = 0$ men f ej identiskt lika med 0 i G, då är a ett isolerat nollställe, dvs $\exists r > 0 : f(z) \neq 0$ i $D(a,r) \setminus \{a\}$

Bevis av bubblen

f ej identisk $= 0 \underset{\text{klass.}}{\Rightarrow} f(z) = (z-a)^m g(z)$, g holo i G, $g(a) \neq 0$. g spec. kont.

$\Rightarrow \exists r > 0 : g(z) \neq 0$ i $D(a,r) \Rightarrow f(z) \neq 0$ i $D(a,r) \setminus \{a\}$

Laurentserieutveckling av holo funktioner

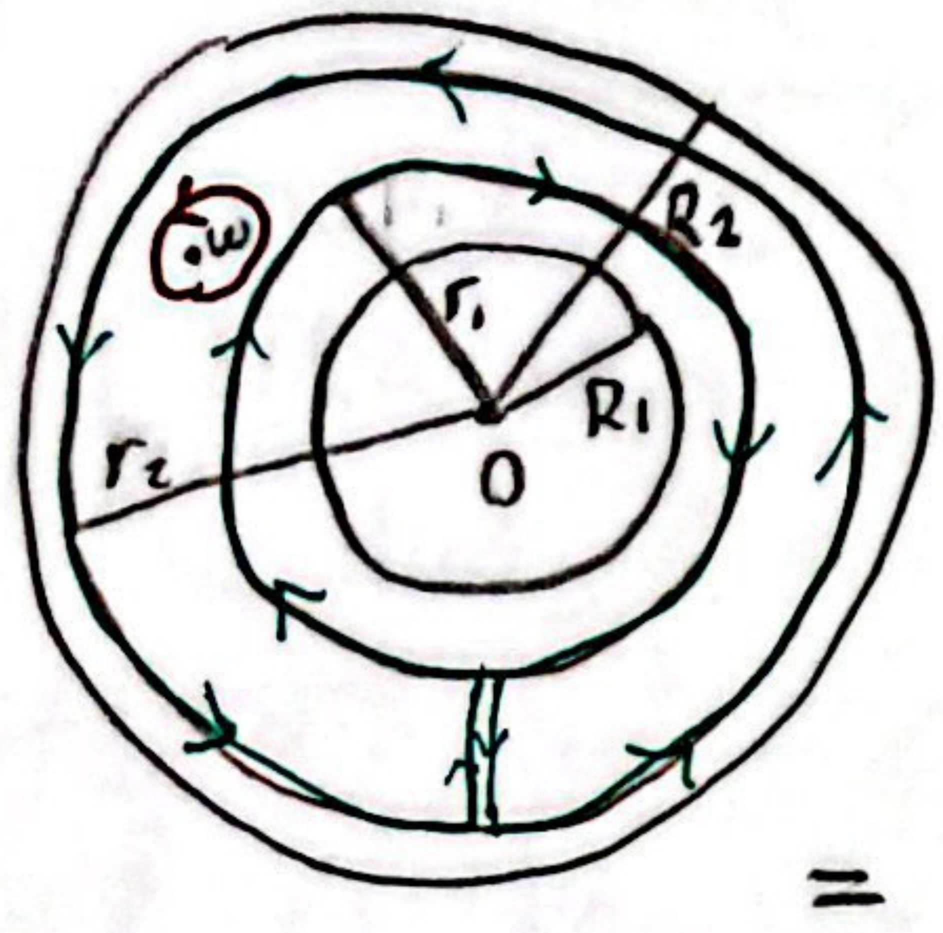
Antag f holo i $A(a, R_1, R_2)$. Då kan f skrivas som

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k \quad \text{i} \quad A(a, R_1, R_2) \text{ där}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \ , \quad R_1 < r < R_2 .$$

OBS! $\frac{1}{1-z} \overset{|z|<1}{=} \sum_{0}^{\infty} z^k$

Bevis: Anteg först $a=0$.
Välj $w \in A(0,R_1,R_2)$ och r_1, r_2 s.a. $R_1 < r_1 < |w| < r_2 < R_2$.
Låt $\gamma, \tilde{\gamma}$ vara som i figur, notera



$\gamma \sim_{A(0,R_1,R_2)\setminus\{w\}} \tilde{\gamma}$. Får att

$$f(w) \underset{\text{CIF}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w} \underset{\text{CS}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2} \frac{f(z)}{z-w}\,dz}_{\mathrm{I}} \underbrace{- \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{z-w}\,dz}_{\mathrm{II}}$$

Beräkning av I

$$\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{z}\,\frac{1}{1-w/z} \overset{|w/z|<1}{=\!=} \frac{f(z)}{z}\sum_0^\infty \left(\frac{w}{z}\right)^k = \sum_0^\infty w^k \frac{f(z)}{z^{k-1}}$$

likf. konv. på $|z|=r_2$ så

$$\mathrm{I} = \sum_0^\infty w^k \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_2} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz \underset{\text{CS}}{=} \sum_0^\infty c_k w^k$$

Beräkning av II

$$-\frac{f(z)}{z-w} = \frac{f(z)}{w-z} = \frac{f(z)}{w}\,\frac{1}{1-z/w} \overset{|z/w|<1}{=\!=} \frac{f(z)}{w}\sum_0^\infty \left(\frac{z}{w}\right)^k =$$

$$= \sum_0^\infty w^{-k-1} f(z) z^k = \sum_{-\infty}^{-1} w^k \frac{f(z)}{z^{k+1}}$$ likf. konv. på $|z|=r_1$ så

$$\mathrm{II} = \sum_{-\infty}^{-1} w^k \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r_1} \frac{f(z)}{z^{k+1}}\,dz \underset{\text{CS}}{=} \sum_{-\infty}^{-1} c_k w^k$$

Vi får alltså $f(w) = \mathrm{I} + \mathrm{II} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k w^k$.

Om $a \neq 0$ sätt $w := z-a$, $g(w) := f(z)$, g holo i $A(0,R_1,R_2)$,

$$f(z) = g(w) \underset{\text{ovan}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} c_k w^k = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k,$$ där

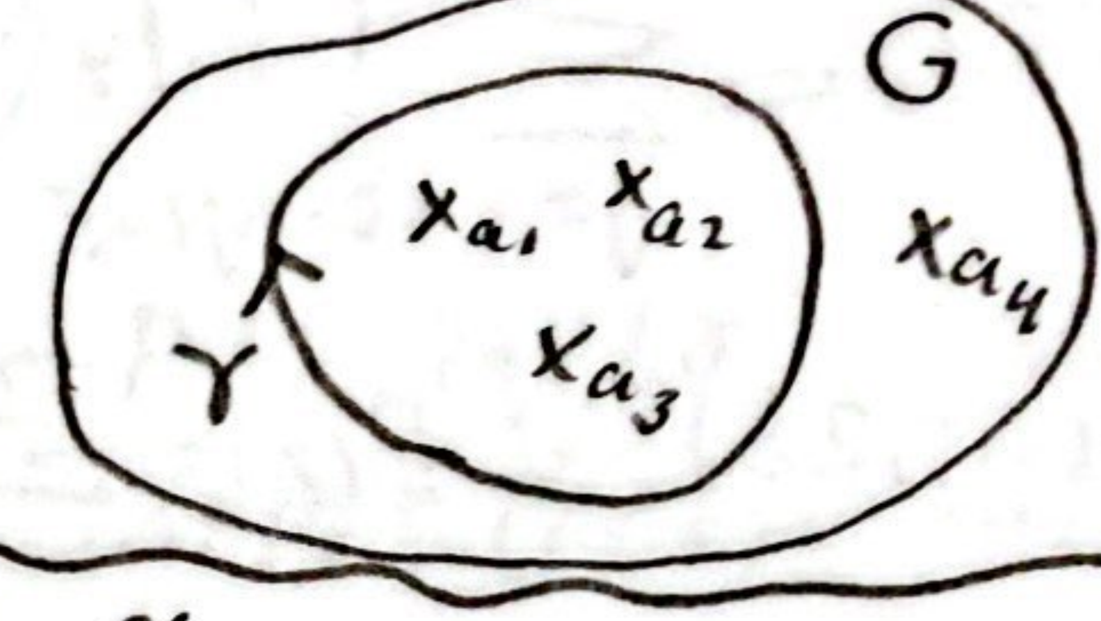
$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r} \frac{g(w)}{w^{k+1}}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\,dz$$

Residysatsen

Anteg f holo i G förutom isolerade singulariteter i $a_1, \dots, a_N$, γ enkel positivt orienterad kurva i $G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}$ s.a. $\gamma \underset{G}{\sim} 0$. Då är

Bevisa denna

$$\int_\gamma f \, dz = 2\pi i \sum_{a_j \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}_{a_j} f$$



Def: Låt f ha isol. sing. i a.
Om $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k$ i $D(a,R)^*$ så definieras f:s residy i a som $\mathrm{Res}_a f = c_{-1}$

Räkneregler för residyer

a) $\mathrm{Res}_a(bf + cg) = b\,\mathrm{Res}_a f + c\,\mathrm{Res}_a g$

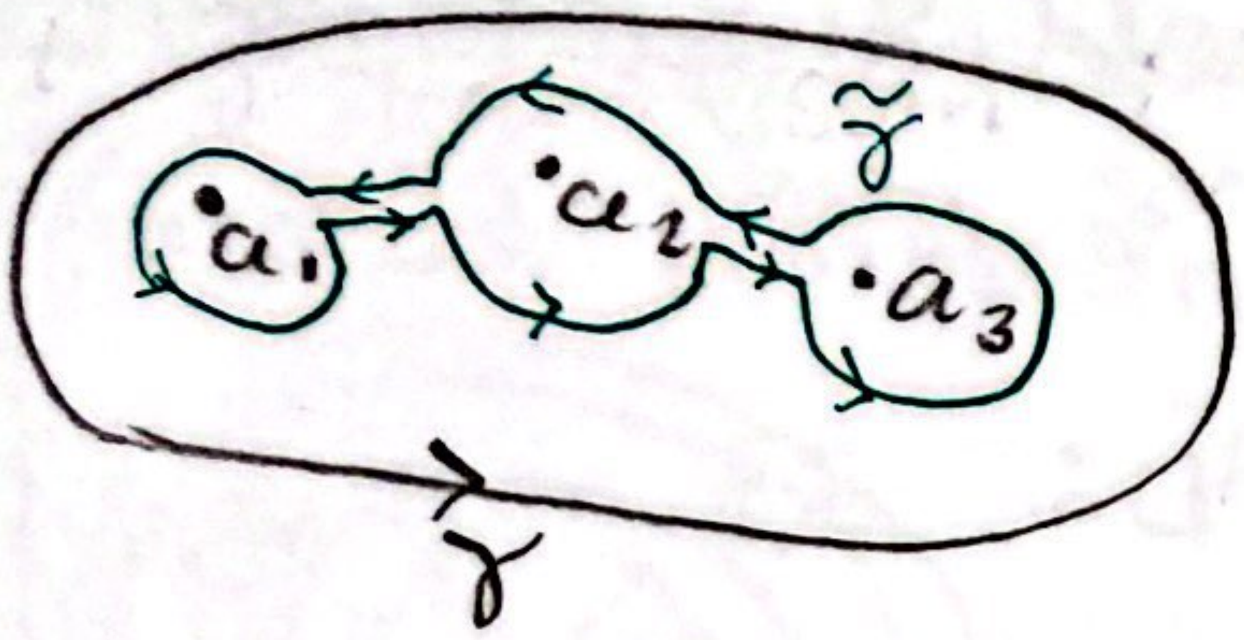
b) Om f holo i $D(a,R)$, dvs a hävbar sing, då är $\mathrm{Res}_a f = 0$.

c) Om $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^{m+1}}$, $m \geq 0$, g holo i $D(a,R)$ då är

$$\mathrm{Res}_a f = \frac{g^{(m)}(a)}{m!}$$

d) Om f, g holo i $D(a,R)$, a enkelt nollställe till g (dvs $g(a) = 0$, $g'(a) = 0$), då är $\mathrm{Res}_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{f(a)}{g'(a)}$

Bevis Antag $a_1, \dots, a_M \in int(\gamma)$ medan resten ligger utanför.



Låt $\tilde{\gamma}$ vara som i figuren, notera $\gamma \underset{G \setminus \{a_1, \dots, a_N\}}{\sim} \tilde{\gamma}$

$$\int_\gamma f\,dz \underset{CS}{=} \int_{\tilde{\gamma}} f\,dz = \sum_{j=1}^{M} \int_{|z-a_j|=\varepsilon} f\,dz$$

f holo i $D(a_j, 2\varepsilon)^*$ så $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k (z-a_j)^k$ i $D(a_j, 2\varepsilon)^*$ så

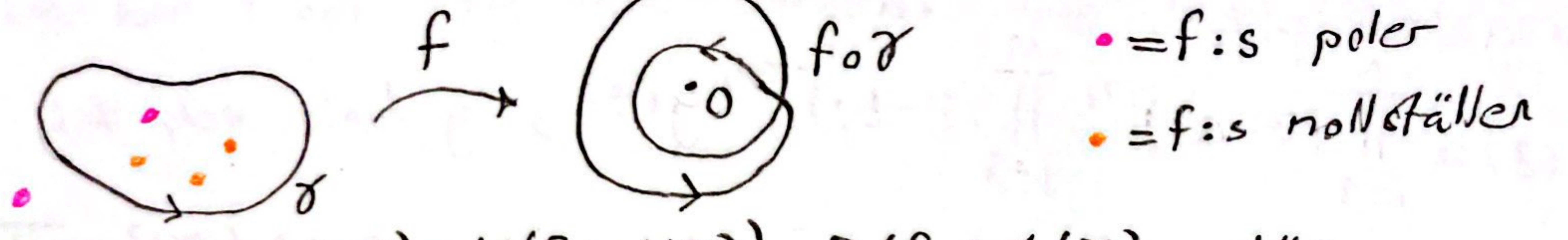
$$\int_{|z-a_j|=\varepsilon} f\,dz = \int_{|z-a_j|=\varepsilon} \sum_{-\infty}^{\infty} C_k (z-a_j)^k\,dz \underset{\substack{\text{likf.}\\ \text{konv.}}}{=} \sum_{-\infty}^{\infty} C_k \int_{|z-a_j|=\varepsilon} (z-a_j)^k\,dz \underset{\text{FEX}}{=} 2\pi i C_{-1} =$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}_{a_j} f \quad \text{så}$$

$$\int_\gamma f\,dz = \sum_{j=1}^{M} 2\pi i \,\mathrm{Res}_{a_j} f = 2\pi i \sum_{a_j \in int(\gamma)} \mathrm{Res}_{a_j} f$$

Argumentprincipen

Antag f meromorf i G, γ enkel positivt orienterad nollhomotop kurva i G som undviker f:s nollställen och poler.



Då är $w(f\circ\gamma) = N(f, int(\gamma)) - P(f, int(\gamma))$, där

$N(f, int(\gamma)) :=$ # nollst. till f i $int(\gamma)$ (räknat med mult.)

$P(f, int(\gamma)) :=$ # poler ———————— 〃 ————————

Speciellt: Om f holo i G gäller $w(f\circ\gamma) = N(f, int(\gamma))$

<u>Bevis</u> Numrera nollst. till f i $\mathrm{int}(\gamma)$: $a_1, \ldots, a_N$, $n_i :=$ ordn. a_i, nomrera polerna till f i $\mathrm{int}(\gamma)$: $b_1, \ldots, b_M$, $m_j :=$ ordn. b_j. Iteration av satserna "klassifikation av nollställen" samt "klassifikation av isolerade singulariteter" ger att

$$f(z) = \prod_{i=1}^{N} (z-a_i)^{n_i} \prod_{j=1}^{M} (z-b_j)^{-m_j} g(z), \quad g \text{ holo och } \neq 0$$

i området $H := G \setminus \{f\text{:s nollst. } \& \text{ poler utanför } \mathrm{int}(\gamma)\} \supseteq \overline{\mathrm{int}(\gamma)}$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{n_i}{z-a_i} - \sum_{j=1}^{M} \frac{m_j}{z-b_j} + \frac{g'(z)}{g(z)}, \quad \frac{g'}{g} \text{ holo i } H$$

$\Rightarrow \frac{f'}{f}$ holo i H förutom isol. sing i $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_M$.

$$\mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{f'}{f}\right) \underset{\text{RRa}}{=} \mathrm{Res}_{a_i}\left(\frac{n_i}{z-a_i}\right) + \mathrm{Res}_{a_i}\underbrace{\left(\sum_{l \neq i} \frac{n_l}{z-a_l} - \sum_j \frac{m_j}{z-b_j} + \frac{g'}{g}\right)}_{\text{holo i omg. till } a_i} \underset{\text{RRb+C}}{=} n_i + 0 = n_i$$

$$\mathrm{Res}_{b_j}\left(\frac{f'}{f}\right) \overset{\text{RRa}}{=} \mathrm{Res}_{b_j}\left(-\frac{m_j}{z-b_j}\right) + \mathrm{Res}_{b_j}\left(\sum_i \frac{n_i}{z-a_i} - \sum_{l \neq j} \frac{m_l}{z-b_l} + \frac{g'}{g}\right) = -m_j + 0 \overset{\text{RRb+C}}{=} -m_j$$

$$W(f \circ \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{1}{f(\gamma(t))} (f \circ \gamma)'(t) \, dt \underset{\text{holo kedjereg.}}{=}$$

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z} dz \underset{CS}{=} m \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz \underset{\text{FEX}}{=} m = W(\gamma)}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha^\beta \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) \, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'}{f} dz \overset{\text{RS}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Res}_{a_i}(f'/f) + \sum_{j=1}^{M} \mathrm{Res}_{b_j}(f'/f) = \sum_{i=1}^{N} n_i - \sum_{j=1}^{M} m_j =$$

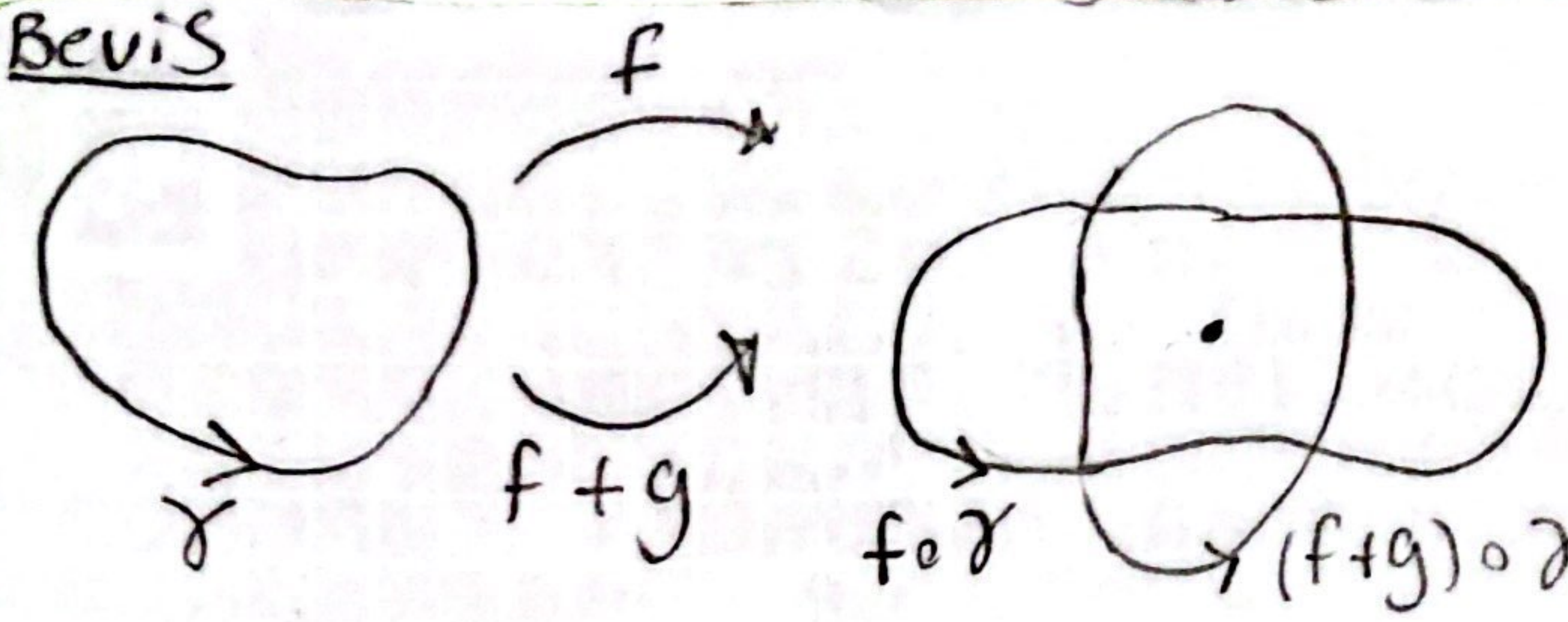
$N(f, \mathrm{int}(\gamma)) - P(f, \mathrm{int}(\gamma))$

Scanned with CamScanner

Rouchés sats

Antag f, g holo i G, γ enkel pos. or. nollhomotop kurva i G. Antag också $|f(z)| > |g(t)|$ på γ.
Då har f och $f+g$ lika många nollställen i $\mathrm{int}(z)$.

Bevis



Notera att $(f+sg)\circ\gamma$, $s\in[0,1]$, är homotopi mellan $f\circ\gamma$ & $(f+g)\circ\gamma$ i $\mathbb{C}$. Korsar dessa kurvor någonsin 0?

$$|f(\gamma(t))+sg(\gamma(t))| \underset{\text{omv. }\Delta\geq}{\geq} |f(\gamma(t))|-s|g(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))|-|g(\gamma(t))| \underset{\text{enligt antagandet}}{>} 0$$

$\Rightarrow$ korsar aldrig 0

$\Rightarrow f\circ\gamma \sim_{\mathbb{C}\setminus\{0\}} (f+g)\circ\gamma$

$$N(f,\operatorname{int}(\gamma)) \underset{\text{AP}}{=} W(f\circ\gamma) \underset{f\circ g\sim_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}(f+g)\circ\gamma}{=} W((f+g)\circ\gamma) \underset{\text{AP}}{=} N(f+g,\operatorname{int}(\gamma))$$

Har inga poler ty holo

Klassifikation av isolerade singulariteter (sats 4.1, 4.2 R)

14

Antag a isolerad singularitet till f. Då är a

a) hävbar omm $\lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$

b) en pol omm $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$; $D(a,R)^*$, $m \geq 1$,

g holo : $D(a,R)$, $g(a) \neq 0$.

m kallas polens ordning/multiplicitet

Bevisa a)

$\boxed{\Rightarrow}$: a hävbar sing., kan alltså utvidga f till en holo funktion i $D(a,R)$, alltså $f(z)$ kontinuerlig i a. Så

$$(z-a)f(z) \xrightarrow[z \to a]{} (a-a)f(a) = 0$$

$\boxed{\Leftarrow}$: Låt $h(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(z) & , z \in D(a,R)^\times \\ 0 & , z = a \end{cases}$

h holo i $D(a,R)^\times$, är h holo i $D(a,R)$?

$$\frac{h(z)-h(a)}{z-a} = \frac{(z-a)^2 f(z)}{(z-a)} = (z-a)f(z) \xrightarrow[z \to 0]{} 0$$

dvs h komplext deriverbar i a, så h holo i $D(a,R)$. Notera också $h'(a)=0$.

$$h(z) \underset{\text{TU}}{=} \sum_0^\infty c_k (z-a)^k = \left[c_0 = h(a) = 0, c_1 = h'(a) = 0\right] =$$

$$= (z-a)^2 \sum_0^\infty c_{k+2}(z-a)^k = (z-a)^2 g(z) \text{ där}$$

g holo i $D(a,R)$.

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^2} = g(z) \text{ i } D(a,R)^\times, \text{ så g holo}$$

utvidgning av f till $D(a,R)$ så a är en hävbar singularitet.