OBS! Denna samling av matematiska definitioner och satser är inofficiell och gjorde av studenter.
Vi reserverar oss vid eventuella felskrivningar.

❦ Komplexbevis ❦

simjac

Oktober 2017

Innehåll

1 Sats 2.15 Cauchy-Riemanns ekvationer (CR) 3

2 Proposition 2.11 Satsen om konforma avbildningar 4

3 Sats 4.6 Uppskattning av kurvintegraler 4

4 Sats 4.18 Cauchys integralsats 5

5 Sats 4.24 Cauchys integralformel (v1) 6

6 Sats 5.1 Cauchys formel för derivator 7

7 Korollarie 5.13 Liouvilles sats 7

8 Sats 5.11 Algebrans fundamentalsats 8

9 Sats 8.2 Derivering av potensserier 8

10 Sats 8.8 Taylorutveckling 9

11 Sats 8.14 Klassifikation av nollställen 9

12 Sats 8.15 Identitetsprincipen 10

13 Sats 8.24 Laurentserieutveckling 10

14 Sats 4.1 R eller Prop. 9.5a Klassifikation av singulariteter 11

15 Sats 9.10 Residysatsen 12

16 Proposition 9.11a Beräkning av residyer 1 13

17 Proposition 1.3 R Beräkning av residyer 2 13

18 Proposition 9.14 Beräkning av residyer 3 14

19 Sats 3.2 R Argumentprincipen 14

20 Sats 9.18 Rouchés sats 15

1 Sats 2.15 Cauchy-Riemanns ekvationer (CR)

Definition: Låt G vara ett område i $\mathbb{C}$, och z_0 en punkt i G. En funktion $f : G \to \mathbb{C}$ kallas då *differentierbar* om gränsvärdet

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existerar, *holomorf* om gränsvärdet existerar i en omgivning till z_0 och *hel* om gränsvärdet existerar i hela $\mathbb{C}$. Gränsvärdet kallas f:s *derivata*.

Sats 2.15 (a)
Givet f differentierbar i $z_0 = x_0 + iy_0$ gäller att f:s partiella derivator existerar ($f \in C^1$) och uppfyller

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Sats 2.15 (b)
Givet att $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ existerar, är kontinuerliga i en omgivning till z_0, och uppfyller CR, då gäller att f är differentierbar vid z_0.

kommentar: I både (a) och (b) ges f' av

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$$

Bevis av (a): Vi observerar att definitionen ovan av derivata är analog med

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

I detta uttryck betraktar vi först Δz på den reella axeln ($\Delta z = \Delta x$), och sedan Δz på den imaginära axeln ($\Delta z = i\Delta y$)). Med notationen $f(z) = f(x, y)$ får vi:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta x) - f(z_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

samt

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(z_0 + i\Delta y) - f(z_0)}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Notera att vi i den andra uträkningen bryter ut $\frac{1}{i}$ från differenskvoten och att det är därför denna faktor förekommer i CR.

Bevis av (b): Vad vi vill visa: $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \exists f'(z_0)$.
Vi ställer upp differenskvoten för $f'(z_0)$ enligt:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\Big(f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)\Big) \\
&\overset{f \in C^1}{=} \frac{1}{\Delta z}\left(\Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \mathcal{O}(|\Delta z|^2)\right) \\
&\overset{CR}{=} \frac{1}{\Delta z}\left((\Delta x + i\Delta y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathcal{O}(|\Delta z|^2)\right) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathcal{O}(|\Delta z|) \xrightarrow{\Delta z \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

I rad två av beräkningen ligger en outskriven observationen att två $f(x_0, y_0)$-termer kancellerar varandra när vi serieutvecklar f kring (x_0, y_0). I rad tre har vi löst CR för $\frac{\partial f}{\partial y}$ och erhållit $\frac{\partial f}{\partial y} = i\frac{\partial f}{\partial x}$. I rad fyra har vi förkortat med $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$.

Vi ser nu att gränsvärdet $f'(z_0)$ är väldefinerat givet förutsättningarna i (b), vilket skulle visas. Vi ser också att vi visat vår kommentar om att detta gränsvärde ges av $\frac{\partial f}{\partial x}$.

2 Proposition 2.11 Satsen om konforma avbildningar

Definition: En parametriserad kurva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ kallas *glatt* om dess derivata $\gamma'(t)$ existerar och är nollskiljd.

Proposition 2.11
Givet f holomorf i $a \in \mathbb{C}$ s.a. $f'(a) \neq 0$. Låt γ_1 och γ_2 vara två glatta kurvor som skär varandra i a med en vinkel φ. Då gäller att bilden av γ_1 och γ_2 är två glatta kurvor som skär varandra i $f(a)$ med en vinkel φ.

Bevis av 2.11: Låt γ_1 och γ_2 vara parametriserade s.a. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$. Vinkeln mellan γ_1 och γ_2 i 0 kan uttryckas som vinkeln av deras tangenter $\gamma_1'(0)$ och $\gamma_2'(0)$ (denna vinkel är väldefinerad ty $\gamma_1', \gamma_2' \neq 0$), medan vinkeln mellan $f(\gamma_1)$ och $f(\gamma_2)$ i 0 kan beskrivas som vinkeln mellan bildens tangenter

$$\frac{d}{dt} f\left(\gamma_1(t)\right)\Big|_{t=0} = f'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = f'(a)\gamma_1'(0) \quad \text{och} \quad \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t))\Big|_{t=0} = f'(a)\gamma_2'(0)$$

Vi ser att båda tangenterna skalats med samma komplexa tal, $f'(a)$, dvs de har undergått samma rotation och dilatation, varför vinkeln mellan dem bevaras.

Vi ser även att eftersom argumentet för 0 inte är väldefinerat faller vårt resonemang för $f'(a) = 0$.

3 Sats 4.6 Uppskattning av kurvintegraler

Definition: För en glatt kurva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, och en funktion f som är kontinuerlig på γ är den komplexa *integralen* av f längs γ

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Definition: Längden av en kurva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, betecknat $|\gamma|$, beskrivs av integralen

$$\int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

Notera den subtila notationsskillnaden mellan längden av en kurva, $|\gamma|$, och absolutvärdet av en punkt på kurvan, $|\gamma(t)|$.

Sats 4.6 (d)
Givet att $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ är en styckvis glatt kurva, och f en kontinuerlig funktion på γ. Då gäller att

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \max_{z\in\gamma} |f(z)| \cdot |\gamma|$$

Bevis: Vi börjar med att uttrycka $\int_\gamma f(z)dz$ i polär form enligt:

$$\int_\gamma f(z)dz = \left|\int_\gamma f(z)dz\right| e^{\varphi i}$$

I följande resonemang använder vi nu att $e^{-i\varphi}\int_\gamma f(z)dz$ är reellt och positivt (har argumentet 0) tillsammans med definitionen av komplex integral:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = e^{-i\varphi}\int_\gamma f(z)dz = \text{Re}\left(e^{-i\varphi}\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right)$$

$$= \int_a^b \text{Re}\left(e^{-i\varphi}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right)dt \leq \int_a^b \left|e^{-i\varphi}f(\gamma(t))\gamma'(t)\right|dt$$

$$\leq \int_a^b \max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot|\gamma'(t)|dt = \max_{z\in\gamma}|f(z)|\int_a^b |\gamma'(t)|dt$$

$$= \max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot|\gamma|$$

I sista steget använder vi även definitionen av γ:s längd.

4 Sats 4.18 Cauchys integralsats

Definition: Två slutna kurvor γ_1 och γ_2 på ett område $G\subseteq\mathbb{C}$ sägs vara G-*homotopa*, $\gamma_1\sim_G\gamma_2$, om det existerar en kontinuerlig funktion $h:[0,1]^2\to G$ s.a

$$h(t,0)=\gamma_1(t)$$

$$h(t,1)=\gamma_2(t)$$

$$h(0,s)\equiv h(1,s)$$

Funktionen h kallas för en *homotopi*.

kommentar: Vad definitionen essentligen säger är att γ_1 skall kunna deformeras kontinuerligt till γ_2 genom G. Specifikt säger även den sista likheten att kurvan måste vara sluten genom hela deformationen.

Sats 4.18

Givet en funktion f, holomorf på $G\subseteq\mathbb{C}$. Låt γ_1 och γ_2 vara två styckvis glatta slutna G-homotopa kurvor, då gäller att

$$\oint_{\gamma_1} f = \oint_{\gamma_2} f$$

Bevis: Vi utför beviset under två ytterligare antaganden: f' är kontinuerlig och homotopin h har har styckvis kontinuerliga andraderivator.

Låt $\gamma_s(t)=h(t,s)$ och betrakta funktionen $I(s)=\oint_{\gamma_s} f$ (vi vill visa att $I'(s)\equiv 0$):

$$\frac{d}{ds}I(s) = \frac{d}{ds}\int_0^1 f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial t}dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s}\left(f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial t}\right)dt$$

$$= \int_0^1 f'(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} + f(h(t,s))\frac{\partial^2 h}{\partial s\partial t}dt$$

$$= \int_0^1 f'(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} + f(h(t,s))\frac{\partial^2 h}{\partial t\partial s}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}\right)dt$$

Här byter vi på första raden plats på integrerings- och differentieringsoperatorn, vilket är legalt enligt vårt antagande om f':s kontinuitet samt ändliga integralgränser. På andra raden använder vi både produkt- och kedjeregeln. På trejde raden använder vi vårt antagande om att h har kontinuerliga andraderivator för kunna säga att $\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial h} = \frac{\partial^2 h}{\partial h \partial s}$. På fjärde och sista raden identifierar vi integranden som $\frac{\partial}{\partial t}\left(f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}\right)$, detta inses lättast genom att gå baklänges från rad fyra till tre och använda produkt- och kedjeregeln som i steget mellan rad ett och två.

Vi upptäcker nu att vi integrerar och deriverar med avseende på samma variabel, och att vi genom att använda analysens fundamentalsats på imaginär- och realdel separat kan dra slutsatsen

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t}\left(f(h(t,s))\frac{\partial h}{\partial s}\right)dt = f(h(1,s))\frac{\partial h}{\partial s}(1,s) - f(h(0,s))\frac{\partial h}{\partial s}(0,s) \overset{h(1,s)\equiv h(0,s)}{=} 0$$

Vi kan nu använda en annan sats från envariabelanalysen som säger att om en funktions derivata är 0, så är funktionen konstant:

$$\frac{d}{ds}I(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad I(s) \equiv I_0$$

Speciellt är

$$\oint_{\gamma_1} f = I(0) = I(1) = \oint_{\gamma_2} f$$

Kommentar: Det finns ett något enklare bevis av Cauchys integralsats som bygger på att man beräknar $\oint_\gamma f dz$ med hjälp av Greens Formel och sedan förenklar till 0 med hjälp av CR. Detta bevis accepterar dock inte David på tentan.

5 Sats 4.24 Cauchys integralformel (v1)

Sats 4.24
Givet f holomorf på ett område G innehållande den slutna disken $\overline{D}[\omega, R]$, då gäller att

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C[\omega,R]} \frac{f(z)}{z-\omega}dz$$

Kommentar: I beviset nedan använder vi att

$$\oint_{C[0,r]} \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\theta}} \cdot ire^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i$$

Bevis: Att utföra beviset för $\omega = 0$ är ingen inskränkning då vi alltid kan definiera en funktion $g(z-\omega) = f(z)$.

Eftersom f är holomorf i G är integranden, $\frac{f(z)}{z}$, holomorf i ett område $H = G\backslash\{0\}$. Vi ser att i detta område är $C[0,R]$ homotop med varje mindre 0-centrerad cirkel $C[0,r]$, dvs

$$C[0,R] \sim_H C[0,r] \quad \text{för} \quad 0 < r < R$$

Vi använder nu Cauchys integralsats med vår tidigare kommentar:

$$\left|\oint_{C[0,R]} \frac{f(z)}{z}dz - 2\pi i f(0)\right| = \left|\oint_{C[0,r]} \frac{f(z)}{z}dz - f(0)\oint_{C[0,r]} \frac{1}{z}dz\right|$$

$$= \left|\oint_{C[0,r]} \frac{f(z)-f(0)}{z}dz\right| \overset{(4.6)}{\leq} \max_{z\in C[0,r]}\left|\frac{f(z)-f(0)}{z}\right| \cdot |C[0,r]|$$

$$= \max_{z\in C[0,r]} \frac{|f(z)-f(0)|}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi \max_{z\in C[0,r]} |f(z)-f(0)| \xrightarrow{r\to 0} 0$$

Här har vi i olikheten använt sats 4.6, om uppskattning av kurvintegraler. Eftersom det allra första uttrycket inte beror på r kan vi låta r vara godtyckligt litet. f:s kontinuitet medför att $f(z)-f(0) \longrightarrow 0$ när $r \longrightarrow 0$, varför $\left|\int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{z}dz - 2\pi i f(0)\right| \leq 0 \implies \int_{C[0,R]} \frac{f(z)}{z}dz = 2\pi i f(0)$. Vilket visar Cauchys integralformel.

6 Sats 5.1 Cauchys formel för derivator

Sats 5.1
Givet f holomorf på ett område G och γ är en positivt orienterad sluten enkel styckvis glatt kurva nollhomotop på G ($\mathrm{int}(\gamma) \subset G$). Om $\omega \in \mathrm{int}(\gamma)$ så gäller

$$f'(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^2} dz$$

Vidare existerar $f''(\omega)$ och ges av

$$f''(\omega) = \frac{1}{\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^3} dz$$

Kommentar: På tentan kräver David endast bevis för det första påståendet, angående $f'(\omega)$, så vi bevisar inte mer än så.
Kommentar: Som i beviset för Cauchys integralformel så låter vi $\omega = 0$ utan inskränkning.

Bevis: Med hjälp av Cauchys integralformel ser vi att vi kan uttrycka differenskvoten för $f'(0)$ som

$$\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-\Delta z}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z}dz\right)$$

$$\frac{1}{\Delta z}\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\Delta z f(z)}{z(z-\Delta z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z(z-\Delta z)}dz$$

Om vi nu går i gräns med Δz ser vi att i högerledet erhålls $f'(0)$, medan i vänsterledet erhålls $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z^2}dz$. Vilket är precis vad vi ville visa.
Innan vi är helt nöjda gör vi observationen att eftersom γ inte passerar genom 0 kan vi välja Δz tillräckligt litet för att Δz ska ligga helt inuti $\mathrm{int}(\gamma)$. Denna observation behövs för gränsvärdet av $\frac{f(z)}{z(z-\Delta z)}$ när $\Delta z \to 0$.

7 Korollarie 5.13 Liouvilles sats

Korollarie 5.13
Varje hel begränsad funktion är konstant.

Bevis: Givet $|f(z)| \leq M$ för alla $z \in \mathbb{C}$ kan vi applicera Cauchys formel för derivator i en punkt ω:

$$|f'(\omega)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C[\omega,R]} \frac{f(z)}{(z-\omega)^2}dz\right| \leq \frac{1}{2\pi}\max_{z\in C[\omega,R]}\left|\frac{f(z)}{(z-\omega)^2}\right| 2\pi R$$

$$\overset{|z-\omega|=R}{=} \max_{z\in C[\omega,R]} \frac{|f(z)|}{R} \leq \frac{M}{R} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Men $f'(\omega)$ beror inte på R, varför $f'(\omega) = 0$. Enligt sats gäller att $f'(\omega) = 0$ medför att f är en konstant funktion.

8 Sats 5.11 Algebrans fundamentalsats

Sats 5.11
Varje ej konstanta polynom har minst en rot i $\mathbb{C}$.

Bevis: Antag motsatsen till 5.11, att ett polynom p inte är konstant och inte har rötter i $\mathbb{C}$. Funktionen $f(z) = \frac{1}{p(z)}$ är då hel. Men $f(z) \overset{z\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (som i proposition 5.10 kan vi visa detta genom att bryta ut den högsta potensen ur nämnaren) medför att f är begränsad. Liouvilles sats säger då att f är konstant, varför p är konstant. Detta är en motsägelse.

9 Sats 8.2 Derivering av potensserier

Definition: *Konvergensradien* R för en *potensserie* $\sum_k c_k(z-z_0)^k$ är det reella tal för vilket:

1. $\sum_k c_k(z-z_0)^k$ absolutkonvergerar för $|z-z_0| < R$
2. $\sum_k c_k(z-z_0)^k$ konvergerar likformigt för $|z-z_0| \leq r < R$
3. $\sum_k c_k(z-z_0)^k$ divergerar för $|z-z_0| > R$

Existensen av R garanteras av sats 7.31.

Sats 8.2
Givet att $f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k$ har en konvergensradie $R > 0$, då gäller att

$$f'(z) = \sum_{k\geq 1} kc_k(z-z_0)^{k-1} \quad \text{för} \quad z \in D[z_0, R]$$

Dvs vi får derivera termvis.

Bevis: Vi låter, utan inskränkning, $z_0 = 0$.
Om $|z| < R$ är det en egenskap hos de reella talen att vi kan finna ett r s.a. $|z| < r < R$. Vi observerar nu att $\gamma = C[0, r]$ helt ligger i potensseriens konvergensområde, $D[0, R]$, och att z ligger helt i $\text{int}(\gamma)$. Eftersom f är holomorf på $D[0, R]$ kan vi använda Cauchys integralformel för derivator:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega-z)^2}d\omega = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{(\omega-z)^2}\sum_{k\geq 0} c_k\omega^k \; d\omega$$

$$= \sum_{k\geq 0} c_k \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{\omega^k}{(\omega-z)^2}d\omega = \sum_{k\geq 0} c_k \left.\frac{d}{d\omega}(\omega^k)\right|_{\omega=z}$$

$$= \sum_{k\geq 1} kc_k z^{k-1}$$

Här är vi mellan första och andra raden tillåtna att byta plats på summationen och integrationen p.g.a att potensserien konvergerar likformigt mot f på någon sluten mängd innehållande γ (proposition 7.27).

Vi behöver också argumentera för konvergensradien, R', av denna serie:

$$\frac{1}{R'} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{kc_k} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}\sqrt[k]{c_k} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} \cdot \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = \frac{1}{R}$$

eftersom $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$. Vi har nu att $R' = R$.

10 Sats 8.8 Taylorutveckling

Sats 8.8
Givet f holomorf på $D[z_0, R]$. Då kan f uttryckas som en potensserie centrerad kring z_0, med konvergensradie $R' \geq R$:

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} c_k (z - z_0)^k \quad \text{där} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega$$

för en positivt orienterad enkel sluten styckvis glatt kurva γ i $D[z_0, R]$ som omsluter z_0.

Bevis: Som i tidigare bevis betraktar vi utan inskränkning endast punkten $z_0 = 0$.
Givet $z \in D[0, R]$, definierar vi r enligt $|z| < r < R$ så att z ligger på insidan av $C[0, r]$. Av Cauchys integralformel får vi nu:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C[0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C[0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} d\omega$$

Vi ser att den högra faktorn i integranden kan uttryckas som en geometrisk serie ($\omega \in C[0, r] \implies \left|\frac{z}{\omega}\right| < 1$):

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k$$

Som konvergerar likformigt för $\omega \in C[0, r]$, varför vi kan byta plats på summationen och integrationen i följande beräkning:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C[0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega} \sum_{k\geq 0} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k d\omega = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C[0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega \right) z^k$$
$$= \sum_{k\geq 0} c_k z^k$$

Vilket visar vårt första påstående, att $f(z)$ kan uttryckas som en potensserie. För att visa vårt andra, formeln för c_k, gör vi observationen att $C[0, r]$ och γ är homotopa på $D[0, R] \setminus \{0\}$ och använder Cauchys sats:

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C[0,r]} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega$$

11 Sats 8.14 Klassifikation av nollställen

Sats 8.14
Givet f holomorf på ett område G, och har ett nollställe i $z_0 \in G$. Då gäller antingen

1. $f \equiv 0$ på G.
2. $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, m heltal ≥ 1, och g holomorf på G med $g(z_0) \neq 0$. Vi säger att z_0 är ett *nollställe av ordning m*.

Bevis: Som i tidigare bevis betraktar vi utan inskränkning endast punkten $z_0 = 0$.

Att G är ett område garanterar existensen av ett $r > 0$ s.a. $D[0, r]$ ligger helt i G. Vi kan då Taylorutveckla f kring 0 enligt

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} c_k z^k$$

Vi kan nu definiera $m = \min\{k : c_k \neq 0\}$, dvs den första nollskiljda koefficientens index. Vi ser att denna inte kan vara 0 då $c_0 = f(0) = 0$. Om denna inte existerar så gäller $f \equiv 0$ på $D[0, r]$ (märk skillnaden från 1), medan om den existerar ser vi att

$$f(z) = \sum_{k \geq m} c_k z^k = z^m \sum_{k \geq 0} c_{k+m} z^k = z^m g(z)$$

där $g(0) = c_m \neq 0$ p.g.a definitionen av m. Funktionen g är även holomorf i $D[0, r]$ enligt sats 8.1. Men $g(z) = \frac{f(z)}{z^m}$ säger även att g är holomorf på $G\backslash\{0\}$, varför g är holomorf på hela G. Detta svarar mot 2.

Vi vill nu visa att $f \equiv 0$ på $D[0, r]$ är ekvivalent med 1, dvs $f \equiv 0$ i G. Vi visar detta genom att anta $f \equiv 0$ på $D[0, r]$, för att sedan anta att det finns en punkt ω på G för vilken $f(\omega) \neq 0$. Betrakta nu kurvan γ i G som går från 0 till ω. Vi ser att vi kan definiera t_0 som det största möjliga t för vilket $s \leq t \implies \gamma(s) = 0$ och att $t_0 > 0$. Speciellt är också $f(\gamma(t_0)) = 0$.

Om vi nu klassificerar $\gamma(t_0)$ som nollställe till f ser vi att det ej är ett isolerat nollställe, alltså kan inte 2. gälla. Men vi har redan visat att om 2. inte gäller, så finns det en cirkelskiva $D[\gamma(t_0), r']$ där $f \equiv 0$. Detta är en motsägelse då vi definierat t_0 som det *största* t s.a. $s \leq t \implies \gamma(s) = 0$.

Vi har nu visat att $f \equiv 0$ på hela G. Detta svarar mot 1.

12 Sats 8.15 Identitetsprincipen

Sats 8.15

Givet f och g två holomorfa funktioner på G, om $f(z_n) = g(z_n)$ för en följd (z_n) av distinkta punkter i G som konvergerar mot z_∞ i G. Då är $f \equiv g$ på G.

Bevis: Låt $h = f - g$. h är då holomorf i G och $h(z_n) = 0$, speciellt är $h(z_\infty) = 0$ då h är kontinuerlig.

Om vi klassificerar z_∞ som nollställe till h ser vi att det ej är ett isolerat nollställe. Satsen om klassifikation av nollställen, 8.14, säger då att $h \equiv 0 \implies f \equiv g$.

13 Sats 8.24 Laurentserieutveckling

Definition: *Annulusen* $A[z_0, R_1, R_2]$ är mängden $\{z \in \mathbb{C} \text{ s.a. } R_1 < |z - z_0| < R_2\}$

Sats 8.24

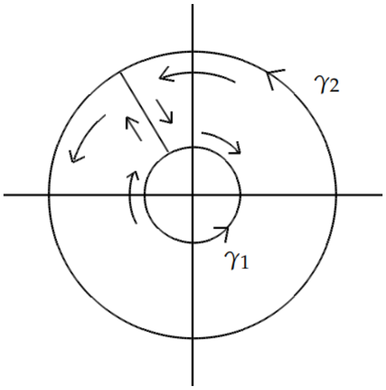
Givet f holomorf på en Annulus A. Då kan f uttryckas som en potensserie centrerad kring z_0 som konvergerar på A:

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k \quad \text{där} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{k+1}} d\omega$$

för en positivt orienterad enkel sluten styckvis glatt kurva γ i A som omsluter z_0.

Kommentar: Följande bevis är väldigt analogt beviset för Taylorserier.

Bevis: Som i tidigare bevis betraktar vi utan inskränkning endast punkten $z_0 = 0$.



Vi väljer r_1 och r_2 enligt $R_1 < r_1 < |z| < r_2 < R_2$, vilket är tillåtet då en annulus är en öppen mängd. Låt sedan $\gamma_1 = C[0, r_1]$ och $\gamma_2 = C[0, r_2]$, båda med positiv orientering. Definiera nu γ_0 som sammanslutningen av dessa två kurvor (se figur).

Att $\mathrm{int}(\gamma_0)$ helt ligger i A tillåter oss att använda Cauchys integralformel för att erhålla

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_0} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \frac{1}{2\pi i}\left(\oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega - \oint_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega\right)$$

Den högra integranden kan vi nu, helt analogt med beviset för Taylorserier, identifiera med en geometrisk serie ($\omega \in \gamma_2 \implies |\omega| > |z| \implies 1 > \frac{|z|}{|\omega|}$):

$$\oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega} \frac{1}{1 - \frac{z}{\omega}} d\omega = \oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z}{\omega}\right)^k d\omega = \sum_{k \geq 0} \left(\oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega\right) z^k$$

I det sista steget byter vi plats på integration och summation, vilket är tillåtet då serien konvergerar likformigt på γ_2.

Vi identifierar nu den vänstra integranden med en liknande geometrisk serie ($\omega \in \gamma_1 \implies |\omega| < |z| \implies 1 > \frac{|\omega|}{|z|}$):

$$\oint_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \oint_{\gamma_1} -\frac{f(\omega)}{z} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{z}} d\omega = -\oint_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{z} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{\omega}{z}\right)^k d\omega = -\sum_{k \geq 0} \left(\oint_{\gamma_1} f(\omega)\omega^k d\omega\right) z^{-k-1}$$

$$= -\sum_{k < 0} \left(\oint_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega\right) z^k$$

Där vi i sista ledet har manipulerat summationsindex en aning för att passa med vårt tidigare uttyck. Om vi nu återför dessa beräkningar på uttrycket för $f(z)$ erhåller vi

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k \geq 0} \left(\oint_{\gamma_2} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega\right) z^k + \sum_{k < 0} \left(\oint_{\gamma_1} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega\right) z^k\right)$$

Vi använder nu Cauchys sats för att deformera γ_1 och γ_2 till en och samma kurva γ, som då har de egenskaper vi beskrev i satsformuleringen (positivt orienterad enkel sluten styckvis glatt kurva som omsluter $z_0 = 0$):

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\omega)}{\omega^{k+1}} d\omega\right) z^k$$

Vilket visar satsen.

14 Sats 4.1 R eller Prop. 9.5a Klassifikation av singulariteter

Definition: Givet f holomorf på den *punkterade disken* $D[z_0, R]^\times$ kallar vi z_0 en *isolerad singularitet* till f. Singulariteten z_0 kallas även

1. *hävbar* om det finns en funktion g, holomorf på $D[z_0, R]$, s.a. $f = g$ på $D[z_0, R]^\times$,
2. en *pol* om $f(z) \overset{z \to z_0}{\longrightarrow} \infty$,
3. *väsentlig* annars.

Sats 9.5 (a)
Givet att f har en isolerad singularitet z_0 så är singulariteten hävbar om och endast om $(z-z_0)f(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$.

Bevis: Antag först z_0 hävbar, då existerar en funktion g holomorf i en disk, $D[z_0, R]$, innehållande z_0 s.a. $f = g$ på den punkterade disken $D[z_0, R]^\times$. Att g är kontinuerlig ger oss

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z) = g(z_0)\lim_{z\to z_0}(z-z_0) = 0$$

Antag nu istället att $(z-z_0)f(z) \overset{z\to z_0}{\longrightarrow} 0$ och att f är holomorf på $D[z_0, R]^\times$. Vi definierar nu $h : D[z_0, R] \to \mathbb{C}$ som

$$h(x) = \begin{cases} (z-z_0)^2 f(z) & \text{för } z \neq z_0 \\ 0 & \text{för } z = z_0 \end{cases}$$

Funktionen h är holomorf på $D[z_0, R]^\times$, men även på $D[z_0, R]$ då

$$h'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z-z_0)^2 f(z)}{z-z_0} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = 0$$

h kan då beskrivas av en Taylorserie centrerad kring z_0 med $c_0 = h(z_0) = 0$ och $c_1 = h'(z_0) = 0$, vi skriver:

$$h(z) = \sum_{k\geq 0} c_{k+2}(z-z_0)^{k+2} = (z-z_0)^2 \sum_{k\geq 0} c_{k+2}(z-z_0)^k$$

Vi ser nu att om vi definierar en funktion $g(z) = \sum_{k\geq 0} c_{k+2}(z-z_0)^k$ så har den de önskade egenskaperna: $(z-z_0)^2 f(z) = (z-z_0)^2 g(z) \implies f = g$ på $D[z_0, R]^\times$, samt att g är holomorf på $D[z_0, R]$.

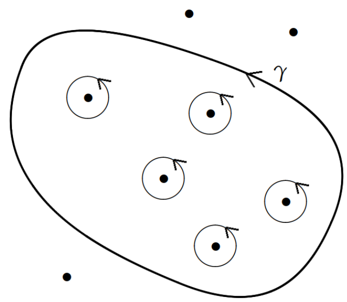
15 Sats 9.10 Residysatsen

Definition: Givet en isolerad sinularitet z_0 till en funktion f med Laurentsserie $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-z_0)^k$ kallar vi c_{-1} för *f:s residy vid z_0*, betecknat med $\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z))$.

Sats 9.10
Givet f holomorf överallt i ett område G förutom i isolerade singulariteter, γ en positivt orienterad sluten styckvis glatt kurva i G som undviker f:s singulariteter, samt γ nollhomotop på G. Då gäller

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z))$$

Bevis:



Vi börjar med att deformera γ genom $G\backslash\{z_k\}$ till små z_k-centrerade cirklar C_k enligt figuren som alla innehåller bara en singularitet. Cauchys sats säger då att integralen längs γ är summan av integralerna längs de små cirklarna:

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_k \oint_{C_k} f(z)dz$$

Men eftersom f är holomorf i punkterade diskar innehållande cirklarna C_k kan vi Laurentsutveckla f här:

$$\oint_{C_k} f(z)dz = \oint_{C_k} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(z-z_k)^l dz$$

Laurentsserien konvergerar då likformigt på en sluten mängd innehållande C_k, varför vi kan gå i gräns i vilken ordning vi önskar:

$$\oint_{C_k} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(z-z_k)^l dz = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \oint_{C_k} c_l(z-z_k)^l dz = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \cdot \begin{cases} 2\pi i & \text{för } l=-1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} = 2\pi i \cdot c_{-1} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z))$$

Sammanfattningsvis har vi

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_k \oint_{C_k} \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l(z-z_k)^l dz = \sum_k 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k}(f(z))$$

Vilket vi ville visa.

16 Proposition 9.11a Beräkning av residyer 1

Sats 9.11a
Givet att z_0 är en hävbar singularitet till f, så gäller

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = 0$$

Bevis: Att f är holomorf på en punkterad cirkelskiva centrerad i z_0, $D[r,z_0]^\times$, tillåter oss att Laurentsutveckla f här. z_0 hävbar $\implies$ det finns en funktion g holomorf hela cirkelskivan, $D[r,z_0]$. g har då en Taylorutveckling där. Eftersom $f = g$ på $D[r,z_0]^\times$ är då även f:s Laurentsutveckling en Taylorutveckling, speciellt är c_{-1}, vilket vi ville visa.

17 Proposition 1.3 R Beräkning av residyer 2

Sats 1.3 R
Givet f holomorf kring en punkt z_0 och z_0 en isolerad singularitet till f s.a.

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$$

med g holomorf i z_0. Då är

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}(f(z)) = \frac{g^{n-1}(z_0)}{(n-1)!}$$

Bevis: Vi kan Taylorutveckla g kring z_0 då hon är holomorf där. Laurentsutvecklingen till f ges då av

$$f(z) = \sum_{k\geq 0} \frac{c_k(z-z_0)^k}{(z-z_0)^n} = \sum_{k\geq -n} b_k(z-z_0)^k$$

där $b_k = c_{k+n}$. Residyn till f är då $b_{-1} = c_{n-1} = \frac{g^{n-1}(z_0)}{(n-1)!}$ enligt satsen om Taylorutvecklingar.

18 Proposition 9.14 Beräkning av residyer 3

Sats 9.14
Givet f och g holomorfa kring z_0, som är ett nollställe till g av multiplicitet 1. Då gäller

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Bevis: Observation: z_0 nollställe av multiplicitet 1 till g tillåter oss att skriva

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k}{\sum_{k\geq 1} b_k(z-z_0)^k} = \frac{\sum_{k\geq 0} c_k(z-z_0)^k}{(z-z_0)\sum_{k\geq 1} b_k(z-z_0)^{k-1}} = \frac{f(z)}{(z-z_0)h(z)}$$

där $\frac{f}{h}$ är holomorf i z_0 eftersom $b_1 \neq 0$. Sats 1.3 R (den direkt ovan) säger då att residyn av $\frac{f}{g}$ är

$$\frac{f(z_0)}{h(z_0)} = \frac{f(z_0)}{b_1} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

Vilket vi ville visa.

19 Sats 3.2 R Argumentprincipen

Definition: En funktion f kallas *meromorf* i G om den är holomorf där förutom poler.

Definition: Givet en sluten kurva γ i $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ kallar vi netto-antalet varv γ går runt 0 för γ:s *vindningstal*, $W(\gamma)$. Positiv riktning moturs.

Sats 3.2 R
Givet f meromorf i G, och γ styckvis glatt sluten enkel positivt orienterad kurva i G som är nollhomotop i G och som undviker f:s poler och nollställen. Då gäller att

$$W(f\circ\gamma) = N(f,\gamma) - P(f,\gamma)$$

där $N(f,\gamma)$ är antalet nollställen som γ omsluter, räknat med multiplicitet, och där $P(f,\gamma)$ är antalet poler som γ omsluter, också räknat med multiplicitet.

Bevis: Topologisk observation: $N(f,\gamma), P(f,\gamma) < \infty$ då $\text{int}(\gamma)$ är begränsad. Vi numrerar nollställena till f som omsluts av γ enligt $z_1, \ldots, z_N$ och låter n_k beteckna multipliciteten hos nollstället z_k. På samma sätt numrerar vi f:s poler enligt $w_1, \ldots, w_M$ med m_l som multipliciteten hos w_l.

Upprepad användning av klassifikation av nollställen/singulariteter tillåter oss att faktorisera f enligt

$$f(z) = \prod_{k=1}^{N} (z - z_k)^{n_k} \cdot \prod_{l=1}^{M} (z - w_l)^{-m_l} \cdot g(z)$$

där g är holomorf och nollskiljd inuti γ. Av produktregeln följer att

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{(z - z_k)} - \sum_{l=1}^{M} \frac{m_l}{(z - w_l)} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Där den sista termen, $\frac{g'}{g}$, är holomorf på int(γ) p.g.a att g är holomorf och nollskiljd där.

Vi vill nu konstruera en funktion som räknar vårt vindningstal och observerar att

$$2\pi i \cdot W(f \circ \gamma) = \oint_{f(\gamma)} \frac{1}{z} dz = \int_a^b \frac{1}{(f \circ \gamma)(t)} (f \circ \gamma)'(t) dt = \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz$$

På detta kan vi återföra vårt uttryck för $\frac{f'}{f}$ och erhålla

$$\oint_{\gamma} \frac{f'}{f} dz = \oint_{\gamma} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{(z - z_k)} - \sum_{l=1}^{M} \frac{m_l}{(z - w_l)} + \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz$$

$$= \oint_{\gamma} \sum_{k=1}^{N} \frac{n_k}{(z - z_k)} dz - \oint_{\gamma} \sum_{l=1}^{M} \frac{m_l}{(z - w_l)} dz + \oint_{\gamma} \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

$$\overset{\frac{g'}{g}\text{ holo}}{=} 2\pi i \sum_{k=1}^{N} n_k - 2\pi i \sum_{l=1}^{M} m_l = 2\pi i (N(f, \gamma) - P(f, \gamma))$$

$$\implies W(f \circ \gamma) = N(f, \gamma) - P(f, \gamma)$$

Vilket vi ville visa.

20 Sats 9.18 Rouchés sats

Sats 9.18
Givet f och g holomorfa i G, γ styckvis glatt enkel sluten positivt orienterad kurva nollhomotop i G, samt $|f(z)| > |g(z)|$ på γ. Då har f och $f + g$ lika många nollställen inuti γ.

Bevis: Låt $s \in [0, 1]$. Vi har då enligt omvända triangelolikheten att

$$|f(\gamma(t))| > |g(\gamma(t))| \implies |f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t))| \geq |f(\gamma(t))| - s|g(\gamma(t))| > 0$$

Speciellt är $f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t)) \neq 0$. Dvs $f(\gamma(t)) + sg(\gamma(t))$ är en homotopi mellan $f \circ \gamma$ och $(f + g) \circ \gamma$ i $\mathbb{C} \backslash \{0\}$. Argumentprincipen implicerar då att $N(f, \gamma) = N(f + g, \gamma)$ ($P(f, \gamma) = P(f + g, \gamma) = 0$ p.g.a f och $f + g$ holomorfa).