Teori för komplex analys

Teknisk fysik, Chalmers tekniska högskola - Sverige

Robin Andersson

22 oktober 2013

Innehåll

Notation

En vanlig skrift i denna samling med bevis är att en funktion f är holomorf i ett område $D \subseteq \mathbb{C}$ där D är enkelt sammanhängade om inget annat anges. För att slippa upprepning av detta så skrivs istället $f \in \mathcal{H}(D)$.

1 Uppskattning av kurvintegral

Sats: 1

Kurvintegralen av en funktion f längs en kurva γ kan uppskattas enligt

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \sup_\gamma |f(z)| \cdot |\gamma| \ .$$

Bevis: 1

$$\left|\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b \underbrace{\sup_\gamma}_{=C} |f| \cdot |\dot{\gamma}|\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sup_\gamma |f(z)| \cdot |\gamma(t)| \qquad \square \ .$$

2 Cauchy-Riemanns ekvationer (Nödvändigt villkor)

Sats: 2

Antag att $f(u,v) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$ och att $\exists f'(z_0)$. Då gäller det att $f(u,v)$ uppfyller Cauchy-Riemanns differentialevkation

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \ .$$

Bevis: 2

Låt $h \in \mathbb{R}$, det gäller att

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}, \quad z_0 = x_0 + iy_0 \ .$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ .$$

Låt nu $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$, det gäller att

$$f'(z_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(z_0+ik)-f(z_0)}{ik} = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{ik} =$$

$$= \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \therefore \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \square \, .$$

3 Cauchy-Riemanns ekvationer (Tillräckligt villkor)

Sats: 3
Låt $f(u,v) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, $f \in \mathcal{C}^1$ nära en punkt z_0, antag också att $u(x,y)$ och $v(x,y)$ uppfyller *Cauchy-Riemanns ekvationer*.

$$\Rightarrow \exists f'(z_0) \, .$$

Bevis: 3
Låt $h = a + ib$ och $z_0 = x_0 + iy_0$, eftersom $f \in \mathcal{C}^1$ fås

$$f(z_0+h) - f(z_0) = f(x_0+a,y_0+b) - f(x_0,y_0) =$$

$$= a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + \mathcal{O}(\sqrt{a^2+b^2}) \overset{C.R}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(a+ib) + \mathcal{O}(|h|) \, .$$

$$\therefore \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + \underbrace{\frac{\mathcal{O}(|h|)}{h}}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0} \therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) \, \square \, .$$

4 Cauchys integralsats

Sats: 4
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$ och γ en enkelt sluten kurva som omsluter ett område $\Omega \subseteq D$,

$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \, .$$

Bevis: 4
Eftersom f är analytisk uppfyller den *Cauchy-Riemanns differentialekvation*, vi får då med hjälp av *Greens formel* för en komplexvärd funktion att,

$$\Rightarrow \oint_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = i\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad \square \, .$$

5 Cauchys integralformel

SATS: 5
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$ och låt γ vara en enkelt sluten kurva som omsluter ett område $\Omega \subseteq D$. Med $a \in \Omega$ gäller,

$$\Rightarrow f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z\ .$$

BEVIS: 5
Låt $\gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r, 0 < r < 1\} \subseteq D$ och $a \in D$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z\ .$$

Men vi vet också att

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - f(a) \right|}_{=A} \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z - \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z \right) \right| \leq\ , \tag{1}$$

ty,

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a}\,\mathrm{d}z = 1\ .$$

Vi fortsätter från ekvation (1) och får då

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|z-a|=r} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,\mathrm{d}z \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2\pi} \ell \cdot \max \underbrace{\left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right|}_{=f'(a),\ \text{ty holomorf}}}_{=B},$$

där ℓ är längden av cirkeln $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| = r\}$, d.v.s. $\ell = 2\pi r$.

$$\therefore \lim_{r\to 0} A \leq \lim_{r\to 0} B = \lim_{r\to 0} r|f'(a)| = 0 \qquad \square\ .$$

6 Liouvilles sats

SATS: 6
Antag att f är en hel och holomorf funktion samt

$$\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}\ \Rightarrow f(z) \equiv C \in \mathbb{C}\ .$$

Bevis: 6
Låt $g(z) = \frac{f(z)-f(0)}{z}$, g holomorf i hela $\mathbb{C}$ ty,

$$f(z) = a_0 + a_1 z + ... = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \ , \qquad f(0) = a_0 \ ,$$

$$g(z) = \frac{a_0 + a_1 z + ... - a_0}{z} = a_1 + a_2 z + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n \ .$$

Med *Cauchys integralformel* fås

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=R} \frac{g(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \qquad R > |z| \ .$$

Vi vill nu visa att $g \equiv 0$.

$$|g(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{|w|=R} \frac{g(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w \right| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R \cdot \max_{|w|=R} \left| \frac{g}{w-z} \right| \ .$$

Observera också att följande gäller enligt triangelolikheten,

$$|g(w)| \leq \frac{|f(w) - f(0)|}{|w|} \leq \frac{2M}{R} \therefore \frac{1}{|w-z|} \leq \frac{1}{|w| - |z|} \leq \frac{1}{R - |z|}$$

$$\therefore |g(z)| \leq \frac{R \cdot 2M}{R} \cdot \frac{1}{R - |z|} \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} 0 \therefore g(z) \equiv 0 \Rightarrow f(z) = f(0) \quad \square \ .$$

7 Taylorutveckling

Sats: 7
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$ och $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subseteq D$.

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \ , \quad a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0|} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \ .$$

Bevis: 7
Tag $z_0 : |z - z_0| = s < r$, det följer då att

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, \mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} \, \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} \ .$$

Men det gäller att

$$\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{1 - w} = \sum_{k=0}^{\infty} w^k \,, \qquad \left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{s}{r} < 1 \ .$$

Eftersom en geometrisk serie konvergerar likformigt gäller det att

$$\therefore f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \,, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, \mathrm{d}\zeta \ .$$

8 Laurentutveckling

Sats: 8

Låt $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ för något r,$R \geq 0$,

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \,, \forall z \in D \ .$$

Bevis: 8

Tag $r_1,\ R_1 : r < r_1 < |z| < R_1 < R$ och $z_0 = 0$, vi får då med *Cauchys integralformel*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w - \int\limits_{|w| = r_1} \frac{f(w)}{w - z} \, \mathrm{d}w \right) = f_1 + f_2 \ .$$

Men eftersom $|z| < |w|$ och en geometrisk serie konvergerar likformigt följer

$$f_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)}{1 - \frac{z}{w}} \frac{\mathrm{d}w}{w} = \int\limits_{|w| = R_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{w^{n+1}} \right) f(w) \, \mathrm{d}w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} f(w) \frac{z^n}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \,, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = R_1} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, \mathrm{d}w \ .$$

Analogt följer för f_2 att

$$f_2 = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{|w| = r_1} f(w) \frac{w^n}{z^{n+1}} \, \mathrm{d}w = \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n \,, \, a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w| = r_1} f(w) w^{-(n-1)} \, \mathrm{d}w \ \Box$$

9 Satsen om en analytisk funktions nollställen

Sats: 9
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$ och $z_0 \in D : f(z_0) = 0$,

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : f(z) \neq 0 \forall z \in K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} \ .$$

Bevis: 9
Taylorutveckling av f kring z_0 för något $m \geq 1$ ger

$$f(z) = a_m(z-z_0)^m + a_{m+1}(z-z_0)^{m+1} + ... = (z-z_0)^m(\underbrace{a_m + a_{m+1}(z - z_0) + ...}_{g(z)})$$

Det gäller att $g \in \mathcal{H}(K)$ ty $g(z_0) = a_m \neq 0 \Rightarrow g(z) \neq 0 \forall z \in K$. Alltså $f(z) = (z - z_0)^m \cdot \underset{\neq 0}{g(z)}$ i K. Låt nu $a \in K$,

$$a : 0 < |a - z_0| < \varepsilon; \ f(a) = (\underset{\neq 0}{a - z_0})^m \underset{\neq 0}{g(a)} \neq 0$$

$$\Rightarrow f(z) \neq 0 \forall z \in K \quad \square$$

10 Riemanns sats om hävbara singulariteter

Sats: 10
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, samt antag också

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \ ,$$

då har f en hävbar singularitet i z_0.

Bevis: 10
Vi gör följande ansats,

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z), & z \neq z_0 \ , \\ 0 \qquad\qquad , & z = z_0 \ . \end{cases}$$

Då gäller

$$g'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0 \ .$$

Alltså är $g(z)$ holomorf över z_0 och $g(z_0) = g'(z_0) = 0$.

$$g(z) = \underbrace{a_0}_{=0} + a_1 \underbrace{(z - z_0)}_{=0} + a_2(z-z_0)^2 + ... \therefore f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2} = a_2 + a_3(z-z_0) + ...$$

$$\Rightarrow f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(z-z_0)^k \ ,$$

d.v.s. $f(z)$ har en potensserieutveckling i $D \cup \{z_0\} \Leftrightarrow f \in \mathcal{H}(D \cup \{z_0\}) \quad \square$.

11 Karakterisering av pol

Låt $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$,

$$\text{om } \exists n \in \mathbb{N} \wedge g(z) : \mathcal{H}(D) \longrightarrow \mathbb{C} : \forall z \in D \backslash \{z_0\} \text{ gäller } f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n} \ ,$$

så kallas z_0 en pol till f av ordning n.

12 Karakterisering av väsentlig singularitet

En punkt z_0 sägs vara en väsentlig singularitet om den är varken hävbar eller en pol till f. Ekvivalent med: *En punkt z_0 är en väsentlig singularitet om och endast om principaldelen till laurentserieutvecklingen är en oändlig summa.* D.v.s. principaldelen till f kring z_0 kan skrivas

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k \ .$$

13 Argumentprincipen

Sats: 11
Låt $f \in \mathcal{H}(D) \backslash K$ där $K = \{a_k, b_j \in D : k = 1, ..., N, \ j = 1, ..., P\} : K \cap \partial D = \emptyset$ där a_k, b_j är ett nollställe respektive en pol till f. Låt också $\gamma = \partial D$ vara en enkel sluten kurva

$$\Rightarrow \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = 2\pi i(N - P) \ ,$$

där N och P är antalet nollställen och poler räknat lika många gånger som dess ordning.

Bevis: 11
Låt z_N vara ett nollställe till f av ordning k, vi kan alltså skriva $f(z) = (z - z_N)^k g(z)$ där $g(z_N) \neq 0$. Vi får då

$$f'(z) = k(z - z_N)^{k-1} g(z) + (z - z_n)^k g'(z) \ ,$$

$$\therefore \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_N} + \frac{g'(z)}{g(z)} \ .$$

Eftersom $g(z_N) \neq 0$ har $g'(z)/g(z)$ inga singulariteter och är därför analytisk över z_N, vilket ger att

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_N\right) = k \ .$$

Låt nu z_P vara en pol till f av ordning m. Vi kan nu skriva $f(z) = (z - z_P)^{-m} h(z)$ och analogt följer

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z - z_p} + \frac{h'(z)}{h(z)} \ ,$$

Som tidigare är $h'(z)/h(z)$ analytisk över z_P och nu istället fås

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}, z_P\right) = -m \ .$$

Med *residysatsen* vet vi att kurvintegralen längs en kurva C som omsluter alla nollställen z_N och alla poler z_P är produkten av $2\pi i$ och summan av residyerna innanför γ. Alltså, summan av alla k för varje nollställe z_N är antalet nollställen räknat med multiplicitet, analogt gäller det för polerna och vi får alltså att

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = 2\pi i(N - P) \ . \quad \square$$

14 Rouchés sats

Sats: 12
Låt $f,g \in \mathcal{H}(D \cup \gamma)$, där $\gamma = \partial D$ är en enkelt sluten kurva, samt

$$f(z) \neq 0 \ , g(z) \neq 0 \forall z \in \partial D \ .$$

Om $|g(z)| < |f(z)| \forall z \in \gamma$ så har f lika många nollställen i D som $f + g$.

Bevis: 12
Låt $f_t = f + tg : t \in (0,1)$, $f_0 = f$, $f_1 = f + g$, samt låt N_t vara antalet nollställen till f_t, N_0 antalet nollställen till f och N_1 antal nollställen till $f + g$. Vill visa att $N_0 = N_1$. Vi vet sedan innan att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f_t'(z)}{f_t(z)}\,\mathrm{d}z = N_t\ .$$

Observera att $|f_t| \geq |f| - t|g| > 0$ på γ, samt att N_t är en kontinuerlig heltalsvärd funktion av t.

Alltså, $N_t = c$, beror ej på t, ty, den är heltalsvärd och samtidigt kontinuerlig.

$$\Rightarrow N_0 = N_1\ . \qquad \square$$

15 Algebrans fundamentalsats

Sats: 13
Varje polynom $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ där $n > 0$ och $\{a_k\}_{k=0}^{n} \in \mathbb{C}$ har n stycken nollställen.

Bevis: 13
Låt $\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$. Med följande ansättningar; $f(z) = z^n$ och $h(z) = a_0 + ... + a_{n-1}z^{n-1}$, fås, på γ_R

$$|h(z)| \leq |a_0| + ... + |a_{n-1}||z^{n-1}| = |a_0| + ... + |a_{n-1}|R^{n-1} < R^n = |z^n| = |f|.$$

Med *Rouchés sats* fås att $f(z)$ och $f(z) + h(z) = p(z)$ har lika många nollställen, d.v.s. n stycken. $\square$

16 Satsen om konforma avbildningar

Sats: 14
Om $f \in \mathcal{H}(D)$ där $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ och om $f'(z_0) \neq 0$, då är f konform i z_0.

Bevis: 14
Låt kurvorna γ_1 och γ_2 vara deriverbara kurvor och

$$\begin{cases} \gamma_1 :\ z_1(t);\ t \in [a,b]\ , \\ \gamma_2 :\ z_2(s);\ s \in [c,d]\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} z_0 = z_1(t_0) = z_2(s_0)\ , \\ z_1'(t_0) \neq 0,\ z_2'(s_0) \neq 0\ . \end{cases}$$

Låt nu också

$$\begin{cases} \Gamma_1: \ w_1(t) = f(z_1(t)); \ t \in [a,b] \ , \\ \Gamma_2: \ w_2(s) = f(z_2(s)); \ s \in [c,d] \ . \end{cases}$$

Eftersom f är analytisk gäller det att

$$\begin{cases} w_1'(t_0) = f'(z_0) z_1'(t_0) \neq 0 \ , \\ w_2'(s_0) = f'(z_0) z_2'(s_0) \neq 0 \ . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \arg w_2'(s_0) - \arg w_1'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z_2'(s_0) - \arg f'(z_0) - \arg z_1'(t_0) =$$

$$= \arg z_2'(s_0) - \arg z_1'(t_0). \square$$

17 Laplacetransform av derivator

SATS: 15

Låt $u(t)$ vara deriverbar n gånger och $t \geq 0$. Laplacetransformen av $u'(t)$ i en punkt s är då

$$\mathcal{L}(u^{(n)}(t)(s) = s^n \mathcal{L}(u(t))(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} f^{(n-k)}(0) \ .$$

BEVIS: 15

Vi använder definitionen för laplacetransformen av en funktion u i en punkt s och får

$$\mathcal{L}(u'(t))(s) = \int_0^\infty u'(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t = \left[u(t) e^{-st} \right]_{t=0}^{\infty} + s \int_0^\infty u(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t = s\mathcal{L}(u(t))(s) - u(0) \ .$$

Analogt för $u''(t)$ följer

$$\mathcal{L}(u''(t))(s) = \int_0^\infty u''(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t = [u'(t) e^{-st}]_{t=0}^{\infty} + s \int_0^\infty u'(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t =$$

$$= -u'(0) - su(0) + s^2 \mathcal{L}(u(t))(s) \ .$$

Fortsätter man med derivatan av ordning n fås

$$\mathcal{L}(u^{(n)}(t))(s) = s^n \mathcal{L}(u(t))(s) - s^{n-1} u(0) - s^{n-2} u'(0) - ... =$$

$$= s^n \mathcal{L}(u(t))(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1} u^{(n-k)}(0) \quad \square$$

18 z-transform av faltning

Sats: 16
Om $\{c_n\}$ är faltningen av $\{a_n\}$ och $\{b_n\}$, så gäller

$$\Rightarrow \mathcal{Z}(\{c_n\}) = \mathcal{Z}(\{a_n\})\mathcal{Z}(\{b_n\}) \ .$$

Bevis: 16
Vi börjar med högerledet och per definition följer att

$$\mathcal{Z}(\{a_j\})\mathcal{Z}(\{b_j\}) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{z^i}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{z^k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \mathcal{Z}(\{c_n\}) \ , \quad \square$$

19 Theorem on shifting (z-transform)

Sats: 17
Om talföljden $\{a_n\}$ shiftas och bildar en ny talföljd $\{b_j\}$ enligt $b_j = a_{j+1}$, $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, så gäller

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = z[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - a_0] \ .$$

Allmänt, låt $N \in \mathbb{N}$, $b_j = a_{j+N}$ så gäller

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = z^N \left[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{z^k}\right] \ ,$$

där det allmäna bevisas analogt med beviset vi nedan (mha. iteration).

Bevis: 17
Det gäller att (per definition)

$$\mathcal{Z}(\{b_j\}) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + ... = a_1 + \frac{a_2}{z} + \frac{a_3}{z^2} + ... = z\left[a_0 + \frac{a_1}{z} + ... - a_0\right] =$$

$$z[\mathcal{Z}(\{a_j\}) - a_0] \ , \quad \square$$

20 Maximumprincipen

Sats: 18
Låt D vara en öppen mängd samt $f \in \mathcal{H}(D) : f \not\equiv C$.

$$\Rightarrow f : D \longrightarrow D, \ \text{en holomorf bild.}$$

Bevis: 18
Låt $z_0 \in D$, $f(z_0) = w_0$ och antag också $f \not\equiv C$. Låt också

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z) \neq 0, \quad g \in \mathcal{H}(D) \ .$$

Alltså om $(z - z_0) \leq r << 1$ så gäller också att $g(z) \neq 0$.

$$\therefore |f(z) - w_0| = |z - z_0|^m |g(z)| \neq 0, \text{ om } |z - z_0| = r \ .$$

$$\therefore |f(z) - w_0| \geq \varepsilon, \text{ för något } \varepsilon > 0, \text{ om } |z - z_0| = r \ .$$

Tag $a \in \mathbb{C} : |a| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - w_0| \geq \varepsilon > |a|$ om $|z - z_0| = r$. Vi får nu med *Rouches sats* att $f(z) - w_0$ och $f(z) - w_0 - a$ har lika många nollställen i $|z - z_0| = r$. Därmed eftersom $f(z) - w_0$ har minst ett nollställe, så har också $f(z) - w_0 - a$ minst ett nollställe

$$\Rightarrow f(z) = w_0 + a \text{ har minst en lösning, alltså } f(D) \text{ är öppen.} \ \square$$

21 Schwarz lemma

Sats: 19
Låt $f \in \mathcal{H}(D)$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Låt också $f(z)$ vara kontinuerlig på $D \cup \partial D$ och $|f(z)| \leq 1$ då $|z| = 1$ samt $f(0) = 0$.

$$\Rightarrow |f(z)| \leq |z| \, \forall z \in D \ .$$

Bevis: 19
Låt $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, där $g(z) \in \mathcal{H}(D)$.

$$|z| = 1 \Rightarrow |g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1,$$

varav följande följer enligt *maximum modulus principle*,

$$|g(z)| \leq 1, \text{ om } |z| \leq 1 \therefore |f(z)| \leq |z| \ .$$