



Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 5 juni 2025 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 27:e juni 2025 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; $20p \leq$ Betyg 3 < 30p ; $30p \leq$ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 $\geq$ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

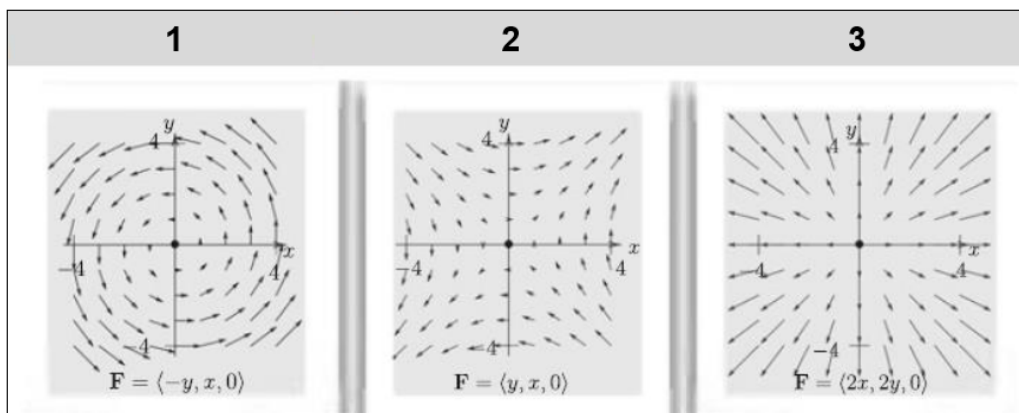
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Tensor som beskriver den lokala deformationstakten i en fluid (hur snabbt formen hos ett fludelement förändras)
- b) Ett skalärt mått på den genomsnittliga inre (mikroskopiska) energin hos partiklarna i ett material till följd av deras oordnade, termiska rörelse
- c) Tensor som karakteriserar nuvarande (verkliga) inre krafter i ett kontinuerligt material per enhet nuvarande (deformerad) area
- d) Materialegenskap som beskriver hur mycket ett material tvärkontraherar när det töjs i en riktning, och är förhållandet mellan tvärgående och längsgående töjning
- e) Tensor som beskriver hur ett materialelement deformeras genom både sträckningar (volymförändring) och vinkelförändringar (formförändring) när deformationerna är små

deformationsgradienttensorn, $\mathbf{F}$
 förflyttningsgradienttensorn, $\mathbf{H}$
 vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, $\mathbf{B}$
 högra Cauchy-Green deformationstensorn, $\mathbf{C}$
 styvhetstensorn, $\mathbb{C}$
 hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{L}$
 symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{D}$
 antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{W}$
 materiederivatan, D/Dt
 Eulerska töjningstensorn, $\mathbf{e}$
 Lagrangeska töjningstensorn, $\mathbf{E}$
 infinitesimala töjningstensorn, $\boldsymbol{\epsilon}$
 Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$
 första Piola-Kirchoff spänningstensorn, $\mathbf{P}$
 andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, $\mathbf{S}$
 hastighetsvektorn, $\mathbf{v}$
 förflyttningsvektorn, $\mathbf{u}$
 värmeffluxvektorn, $\mathbf{q}$
 spänningsvektorn, $\mathbf{t}$
 Cauchys högra töjningstensor, $\mathbf{U}$
 Cauchys vänstra töjningstensor, $\mathbf{V}$
 rotationstensorn, $\mathbf{R}$
 deformationsmappningen, χ
 temperaturen, T
 trycket, p
 skjuvspänningstensorn, $\boldsymbol{\tau}$
 dissipationsfunktionen, Φ
 viskositeten, μ
 densiteten, ρ
 Youngs modul, E
 Poissonration, ν
 skjuvmodulen, G
 värmekonduktiviteten, k
 specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
 bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

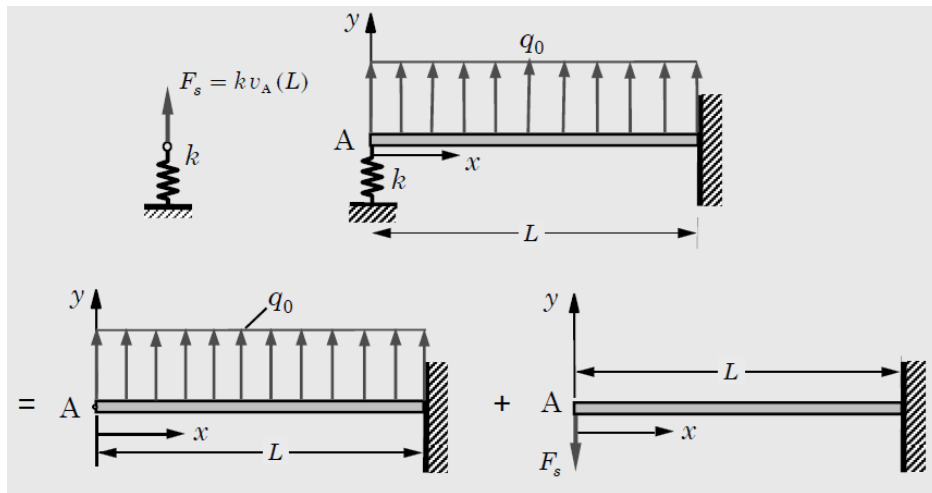
- a) I figuren nedan återfinns tre enkla strömningsfält, kallade 1 ($v_x = -y$, $v_y = x$), 2 ($v_x = y$, $v_y = x$) och 3 ($v_x = 2x$, $v_y = 2y$). Vilket/vilka av dessa situationer är exempel på inkompressibel strömning? Vilket/vilka av dessa situationer är exempel på rotationsfri strömning? Motivera ditt svar!



- b) En konstruktionsdetalj med en tvärsnittsarea av 30 cm^2 (i odeformerat tillstånd) utsätts för en axiell belastning (normalt mot tvärsnittet) på 600 kN och töjs då 0.1% . Detaljen är tillverkad av ett av materialen i tabellen nedan – vilket? Motivera ditt svar.

Material	Elasticitetsmodul (GPa)
Aluminium	69
Betong	17
Brons	110
Diamant	1220
Ek	11
Grafen	1000
Högdensitetspolyetylenplast	0.8
Stål	200

- c) En viss rörelse/deformation är sådan att en materialpartikel som initialt befinner sig i (X_1, X_2, X_3) är vid tiden t istället befinner sig i position $x_1 = X_1 + k(X_1 + X_2)t$, $x_2 = X_2 + k(X_1 + X_2)t$, $x_3 = X_3$. Vilken hastighet har den materialpartikel som i referenskonfigurationen befann sig i $(1, 1, 0)$ när tiden är $t = 2$? Vilken hastighet har den materialpartikel som befinner sig i $(1, 1, 0)$ vid $t = 2$?
- d) En ingenjör vill analysera deformation av en balk som belastas transversellt av en utspridd last, q_0 , och i ena änden av en punktlast från en fjäder, F_s . Hen funderar över möjligheten att analysera effekterna av de två olika lasterna var för sig och addera ihop svaren för att erhålla en lösning till det kompletta problemet (se figur nedan). Vad krävs för att detta ska vara möjligt?



- e) Reynoldsdekomponering innebär att hastighetsvektorn kan skrivas som summan av ett medelvärde och en fluktuation: $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$. Det går att försöka bestämma $\bar{\mathbf{v}}$ med utgångspunkt i antingen Navier-Stokes ekvationer eller i Reynoldsmedelvärderade Navier-Stokes ekvationer (RANS-ekvationerna). Vad är skillnaden mellan dessa två sätt att försöka bestämma $\bar{\mathbf{v}}$? Vad är $\mathbf{v}'$ på en solid vägg (och varför)?

- f) Ett element värmer upp luften i ett rum. En ingenjör mäter hur snabbt värmen sprider sig i rummet och finner att det går snabbare än vad som skulle vara möjligt om värmen endast spreds i den stillastående luften genom ledning. Förklara vilken mekanism som dominerar denna snabbare värmespridning samt hur den uppkommer!

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Spänningstensorn $\boldsymbol{\sigma}$ i ett (x_1, x_2, x_3) -system har följande utseende i en punkt P i den deformerade kroppen:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{ psi}$$

Bestäm spänningsvektorn $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$ och dess normala och tangentiella komponenter i P i planet $\phi(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \text{const}$ som passerar genom punkten.

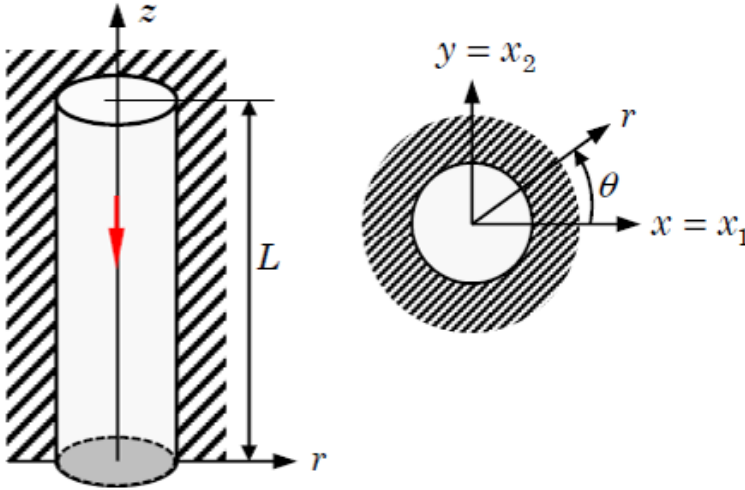
(Enheten psi (*pound per square inch*) är definierad så att $1 \text{ psi} = 0.0068947573 \text{ MPa}$. Du kan fritt välja vilken enhet du vill svara med.)

4. Elasticitetsproblem (5p)

Sidoytorna på en homogen, isotrop, cirkulär cylinder (ljusgrå i figuren nedan) är fästa vid ett omgivande orörligt material (streckat i figuren nedan). Cylindern har radie a , längd L och densitet ρ , och den är tillverkad av ett linjärt elastiskt material. Cylinderns toppyta och bottenyta (vid $z = L$ och $z = 0$) är helt obelastade.

Bestäm hur förflyttningsfältet ser ut inuti cylindern vid steady state då cylindern belastas av sin egenvikt!

Det är rimligt att ansätta $u_r = 0$, $u_\theta = 0$ samt $u_z = U(r)$ (uppgiften går då alltså ut på att bestämma $U(r)$ vid de givna betingelserna).



Ledning: I cylindriska koordinater är komponenterna i töjningstensorn:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \\ \epsilon_{z\theta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}$$

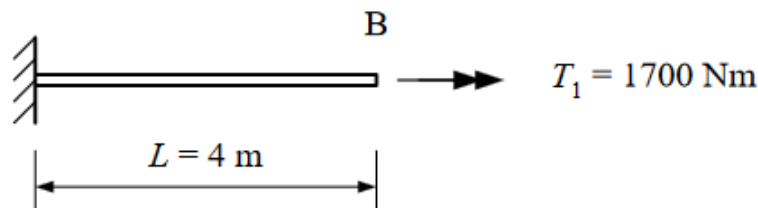
5. Strömningsproblem (7p)

Betrakta stationär, laminär och inkompressibel strömning av en Newtonsk fluid i ett (oändligt) långt rör med cirkulärt tvärsnitt. Strömningen drivs av en tryckgradient. Antag att den enda nollskilda hastighetskomponenten är den i huvudströmriktningen, samt att gravitationens inverkan är försumbar.

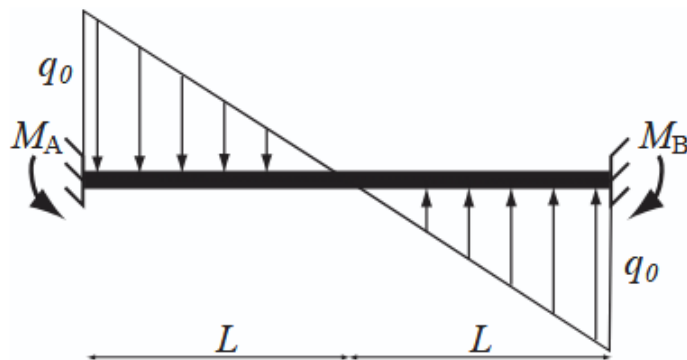
- a) Visa att skjuvspänningen i denna strömningskonfiguration är som störst vid rörväggen.
- b) Ta fram ett uttryck som anger hur skjuvspänningen vid väggen beror av den pålagda tryckgradienten som driver strömningen och radien på röret.

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

- a) En stång av längd L är tillverkad av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul E). Den är fast inspänd i båda ändar, som hålls på ett avstånd $L - \delta$, där $\delta > 0$. Stången är alltså något längre än avståndet mellan väggarna och trycks därför ihop. Tvärsnittsarean är A . Vad är normalkraften inuti stången? (2p)
- b) Samma stång som i (a) har en temperaturutvidgningskoefficient $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Hur stor spänning uppstår inuti stången om den är fast inspänd i båda ändar på ett avstånd L men värms upp 35 grader? Antag $E = 200 \text{ GPa}$. (2p)
- c) En axel i stål ($G = 80 \text{ GPa}$) med längd $L = 4 \text{ m}$ utsätts för ett vridande moment $T_1 = 1700 \text{ Nm}$ i sin fria ände B (se figur nedan). Bestäm diametern som krävs för att vinkeländringen ska bli maximalt 3 grader vid den fria änden B . (2p)

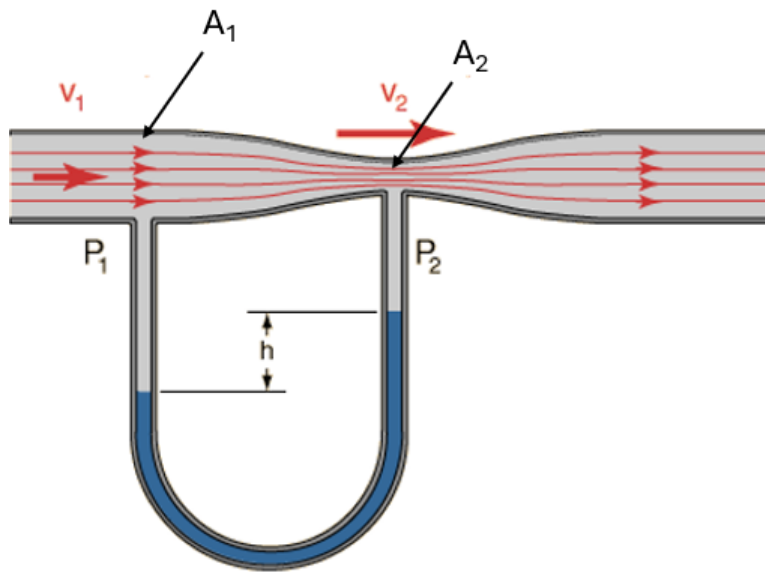


- d) En balk med längden $2L$ och böjstyvheten EI är fast inspänd i bägge ändar och belastad med en utbredd last enligt figur nedan. Bestäm stödmomenten M_A och M_B ! (4p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) En venturimeter (se bild nedan) är en konstruktion för att mäta hastigheten av ett flöde. Genom att mäta tryckskillnaden som uppstår mellan två tvärsnitt för vilket areakvoten A_1/A_2 är känd, kan man bestämma hastigheten v_1 . Fluiden som strömmar är i detta exempel vatten och U-röret är fyllt med (stillastående) kvicksilver. Höjdskillnaden h kan användas för att bestämma tryckskillnaden mellan de två tvärsnitten. Ta fram ett uttryck för v_1 som funktion av enbart h , g (gravitationsaccelerationen), A_1/A_2 och eventuella materialegenskaper för de inblandade fluiderna. (Notera att för eventuella materialegenskaper i uttrycket måste det framgå vilken fluid det handlar om). (4p)



- b) Vid strömning runt en cylinder uppstår typiskt virvlar bakom cylindern som släpper från cylinderytan med en viss genomsnittlig frekvens, f (Hz). Några ingenjörer finner att för ett givet värde på Reynolds tal $Re = UD/\nu$, så gäller att Strouhallet $St = fD/U = 0.2$. Om denna information kommer från en simulering där $U = 1$ m/s, $D = 1$ cm och fluiden är vatten ($\nu = 1 \cdot 10^{-6}$ m²/s), vad är då den dimensionsbärande frekvensen för virvelavkastningen hos en cylinder med $D = 1$ dm i luft ($\nu = 2 \cdot 10^{-5}$ m²/s) under dynamiskt lika förhållanden? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, $\mathbf{v}$ är vektor, $\mathbf{A}$ är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$$\mathbf{A}^S \text{ symmetrisk: } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, A_{ij} = A_{ji}$$

$$\mathbf{A}^A \text{ anti-symmetrisk: } \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, A_{ij} = -A_{ji}, A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} (\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \Big|_{M = \text{fix}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \, \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# \, dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \, \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot dA \, \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

Töjning

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}, \, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, \, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spenningsformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spänningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr} [\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} [\sigma])^2 - \text{tr} ([\sigma]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\sigma|$$

Piola-Kirchoffs spänningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial \kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}] \{\epsilon\}, \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{pmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonska fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotropt medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \text{ (isotropt medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1-\nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmetransportproblem

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{DT}{Dt} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h \\
\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h
\end{aligned}$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx} \\ -\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) &= K_x A \end{aligned}$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$K_v = 2\pi r^3 h \text{ (tunnväggigt tvärsnitt)}$$

$$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2 \text{ (tjockväggigt tvärsnitt)}$$

Axels differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \quad \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad \sigma_x = E\epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: fluider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalor

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} - \rho \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

5 juni 2025

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Grundläggande begrepp (5p)

a) symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{D}$

b) temperaturen, T

c) Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$

d) Poissonration, ν

e) infinitesimala töjningstensorn, $\boldsymbol{\epsilon}$

2. Teori (12p)

- a) Inkompressibel strömning kräver $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$. För strömningsfält 1 är $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, för strömningsfält 2 är $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ och för strömningsfält 3 är $\nabla \cdot \mathbf{v} = 2 + 2 = 4 \neq 0$. Strömningsfält 1 och 2 är exempel på inkompressibel strömning. Rotationsfri strömning kräver $\nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{e}}_x + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{e}}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$. För strömningsfält 1 är $\nabla \times \mathbf{v} = 0\hat{\mathbf{e}}_x + 0\hat{\mathbf{e}}_y + 2\hat{\mathbf{e}}_z \neq \mathbf{0}$, för strömningsfält 2 är $\nabla \times \mathbf{v} = 0\hat{\mathbf{e}}_x + 0\hat{\mathbf{e}}_y + 0\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$ och för strömningsfält 3 är $\nabla \times \mathbf{v} = 0\hat{\mathbf{e}}_x + 0\hat{\mathbf{e}}_y + 0\hat{\mathbf{e}}_z = \mathbf{0}$. Strömningsfält 2 och 3 är exempel på rotationsfri strömning.
- b) Töjning i 1D: $\sigma = F/A = E\epsilon \rightarrow E = \frac{F}{A\epsilon} = 200 \text{ GPa}$, vilket matchar stål i tabellen.
- c) Vi söker hastigheten $v_1 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial t} \right)_{X_i \text{ fix}} = k(X_1 + X_2)$, $v_2 = \left(\frac{\partial x_2}{\partial t} \right)_{X_i \text{ fix}} = k(X_1 + X_2)$, $v_3 = 0$. För partikeln som startar i $(X_1, X_2, X_3) = (1, 1, 0)$ har vi att hastigheten vid $t = 2$ är $\mathbf{v} = 2k\hat{\mathbf{e}}_1 + 2k\hat{\mathbf{e}}_2 + 0\hat{\mathbf{e}}_3$. För partikeln i $(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, 0)$ vid $t = 2$ kan vi lösa ut att den måste ha börjat i $(X_1, X_2, X_3) = \left(\frac{1}{1+4k}, \frac{1}{1+4k}, 0 \right)$ (eftersom $1 = (1 + 2k)X_1 + 2kX_2$ och $1 = (1 + 2k)X_2 + 2kX_1$). Insättning i uttrycket för hastigheten ger $\mathbf{v} = \frac{2k}{1+4k}\hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{2k}{1+4k}\hat{\mathbf{e}}_2 + 0\hat{\mathbf{e}}_3$.
- d) Den så kallade *superpositionsprincipen* som stipulerar att det är möjligt att addera lösningarna till två delproblem för att erhålla den kompletta lösningen kräver att problemet kan beskrivas med linjär elasticitetsteori (linjära PDEer) samt att deformationerna är små (vanligen ett krav för linjäriseringen, men också nödvändigt för att inte ränderna ska förflyttas i den deformation som beskrivs av delproblemen).
- e) Navier-Stokes: man löser för $\mathbf{v}$ och behöver medelvärdena för att erhålla $\bar{\mathbf{v}}$. RANS: man löser direkt för $\bar{\mathbf{v}}$ (men behöver en modell för Reynolds-spänningarna). Eftersom både $\mathbf{v}$ och $\bar{\mathbf{v}}$ är $\mathbf{0}$ på en solid vägg, måste också $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$ vara $\mathbf{0}$ där ($\mathbf{v}$ är $\mathbf{0}$ eftersom detta är ett randvillkor på väggen, $\bar{\mathbf{v}}$ är $\mathbf{0}$ eftersom den är medelvärdet av ett fält som alltid är $\mathbf{0}$ där).
- f) Uppvärmningen av luften närmast elementet (genom ledning) sänker luftens densitet, vilket sätter luften i rörelse (naturlig konvektion) då

den lättare luften stiger uppåt och ersätts av kall luft. Den makroskopiska rörelsen i luften (makroskopisk hastighet) transporterar värme mycket mer effektivt än enbart ledning i stillastående luft (slumpmässig molekylär rörelse).

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Med givna data:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix} \text{ psi}$$

Vi ska hitta spänningsvektorn för ett givet snitt (definierat av ett plan), så vi behöver enhetsytnormalen för planet $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \text{const.}$ Planet $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ har normalen $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, alltså: $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{3}\{1, 2, 2\}$.

Cauchys spänningsformel ger $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$:

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} 1600 \\ 400 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ psi}$$

Spänningsvektorn normal mot planet är: $\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} = \frac{2600}{9}\hat{\mathbf{n}} = \frac{2600}{27}(\hat{\mathbf{e}}_1 + 2\hat{\mathbf{e}}_2 + 2\hat{\mathbf{e}}_3) \text{ psi}$.

Spänningsvektorn i planet är: $\mathbf{n}_{ns} = \mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{t}_{nn} = \frac{100}{27}(118\hat{\mathbf{e}}_1 - 16\hat{\mathbf{e}}_2 - 43\hat{\mathbf{e}}_3) \text{ psi}$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

Randvillkoren är:

Vid $z = 0, L$: $\sigma_{zz} = 0, \sigma_{zr} = 0, \sigma_{z\theta} = 0$.

Vid $r = a$: $u_r = 0, u_\theta = 0, u_z = 0$.

Volymkraften är $-\rho g$.

Det är angett att lösningen har formen $u_z = U(r)$ och att $u_r = u_\theta = 0$.

Den nollskilda töjningen i denna situation är $\epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \frac{dU}{dr}$. Den nollskilda spänningen är $\sigma_{zr} = \mu \frac{dU}{dr}$.

Den enda av ekvationerna i rörelselagen som inte är trivialt uppfylld under dessa förutsättningar är nu:

$$\frac{d\sigma_{zr}}{dr} + \frac{1}{r}\sigma_{zr} - \rho g = 0$$

vilket innebär att:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) = \frac{\rho g}{\mu}$$

Integrera två gånger:

$$r \frac{dU}{dr} = \frac{\rho g}{\mu} \frac{r^2}{2} + C_1$$

$$U(r) = \frac{\rho g}{\mu} \frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

Integrationskonstanterna C_1 och C_2 bestäms mha randvillkoren: $U(r)$ är finit vid $r = 0$ och $U(a) = 0$. Vi har att $C_1 = 0$ och $C_2 = -(\rho g/4\mu)a^2$. Det sökta svaret är:

$$u_z = -\frac{\rho g a^2}{4\mu} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

5. Strömningsproblem (7p)

a)- och b)-uppgifterna är mycket nära kopplade.

N-S i cylindriska koordinater i z -riktningen:

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\ = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

Antag: laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid, stationärt, försumbar gravitation, fullt utvecklad strömning, $v = v_z(r)$ (på grund av given information + symmetri). I så fall:

$$\frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \frac{dp}{dz}$$

Integrera två gånger:

$$\begin{aligned} r \frac{dv_z}{dr} &= \frac{r^2}{2\mu} \frac{dp}{dz} + C_1 \rightarrow \frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2\mu} \frac{dp}{dz} + \frac{C_1}{r} \\ v_z &= \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz} - C_1 \ln r + C_2 \end{aligned}$$

Tillämpa randvillkor:

$$\begin{aligned} v_z(r = R) &= 0 \\ v_z(r = 0) &= \text{finit} \end{aligned}$$

för att bestämma integrationskonstanterna, och vi erhåller:

$$v_z = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} [R^2 - r^2]$$

Skjuvspänningen är (endast en komponent i $\boldsymbol{\tau}$ som är nollskild!):

$$\tau = \mu \frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dp}{dz}$$

Skjuvspänningen är noll i rörets mitt ($r = 0$), och eftersom $0 \leq r \leq R$ så

är skjuvspänningen som störst då $r = R$, det vill säga vid väggen, QED.
(Notera att skjuvspänningen i fluiden vid väggen är riktad mot huvudströmriktningen).

Vid väggen gäller sålunda:

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{dp}{dz}$$

vilket är det sökta uttrycket i b)-uppgiften.

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

- a) Stång med konstanta egenskaper i längdriktningen och ingen volymlast
 $\rightarrow N = \sigma A = E\bar{\epsilon}A = \frac{-\delta EA}{L}$. Normalkraften är negativ, vilket indikerar inre trycknormalkraft (stången trycks ihop). Detta stämmer bra med vår förväntan för en stång som hålls på plats genom att tryckas ihop.
- b) Termisk expansion: $\epsilon = \alpha\Delta T = 4.2 \cdot 10^{-4}$. Stången är fast inspänd i bägge ändar på ett avstånd lika stort som dess längd innan den termiska expansionen. Eftersom den inte kan utvidgas uppstår en spänning $\sigma = E(-\epsilon) = -84$ MPa. (Notera att spänningen även i denna situation måste vara negativ då stången upplever att den trycks ihop.)

- c) Relation mellan yttre vridande moment och vinkelförändring:

$$M_2^e = \frac{GK_v}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

där $G = 80$ GPa, $L = 4$ m, $M_2^e = T_1 = 1700$ Nm, $\varphi_1^e = 0$, $\varphi_2^e = 3^\circ = 3 \frac{\pi}{180} \approx 0.05236$. Lös ut $K_v \approx 1.623 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$, ur vilket vi erhåller $r = (2K_v/\pi)^{1/4} \approx 31.9$ mm. Svaret är sålunda $d = 2r \approx 64$ mm.

- d) Elastiska linjens ekvation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

E och I_y är oberoende av x . Lasten kan beskrivas som $q(x) = -q_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right)$ ($x = 0$ placerad längst till vänster, q positiv i positiv z -riktning).

Integrera fyra gånger:

$$w(x) = \frac{1}{EI_y} \left(\frac{q_0 x^5}{120L} - q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4 \right)$$

Randvillkor:

Vid $x = 0$ gäller att $w = 0$ och $dw/dx = 0 \rightarrow C_3 = C_4 = 0$

Vid $x = 2L$ gäller att $w = 0$ och $dw/dx = 0 \rightarrow C_1 = \frac{48}{120}q_0L$ och
 $C_2 = -\frac{8}{120}q_0L^2$

Nu är $w(x)$ känd. Momentet ges av:

$$M(x) = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{q_0}{30L} (5x^3 - 15x^2L + 12L^2x - 2L^3)$$

Eftersökt är stödmomenten (det yttre moment som uppstår i stödet för att tillse att balken inte roterar), vilka kan erhållas ur momenten i ändarna på balken:

$$M_A = M(0) = \frac{q_0 L^2}{15}$$

$$M_B = M(2L) = -\frac{q_0 L^2}{15}$$

7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) För inkompressibel stationär strömning gäller $v_1 A_1 = v_2 A_2$.
Bernoullis ekvation för en strömlinje rakt genom venturimetern ($z_1 = z_2$) säger att $\frac{p_2 - p_1}{\rho_{H_2O}} + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) = 0$.

Kombinera dessa uttryck för att eliminera v_2 och erhålla att

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho_{H_2O} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}.$$

Tryckskillnaden kan avläsas ur höjdskillnaden h , som enligt hydrostatiken motsvarar $p_1 - p_2 = \rho_{H_2O} g h$ (trycket är högre i position 1).

Sammantaget har vi alltså att $v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_{H_2O} g h}{\rho_{H_2O} \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}.$

- b) Dynamiskt lika förhållanden innebär att Reynoldstalet ska vara samma: $Re_1 = \frac{U_1 D_1}{\nu_1} = Re_2 = \frac{U_2 D_2}{\nu_2}$. Detta ger att $U_2 = U_1 D_1 \nu_2 / \nu_1 D_2 = 2$ m/s. Eftersom dynamiskt lika förhållanden innebär att *alla* relevanta dimensionslösa tal ska vara samma, måste även St vara samma i bägge situationerna. Lös ut $f = StU/D = 4$ Hz.