



## Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 11 oktober 2024 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

**OBS!** Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 1:e november 2024 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ;  $20p \leq$  Betyg 3 < 30p ;  $30p \leq$  Betyg 4 < 40p ; Betyg 5  $\geq$  40p.

**LYCKA TILL!**

1. Grundläggande begrepp (5p)

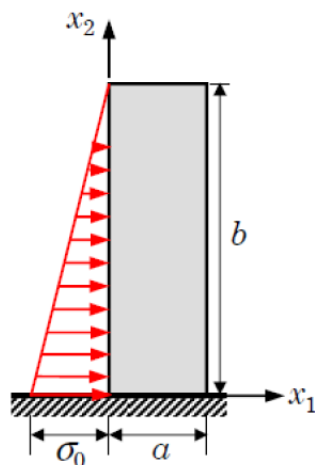
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(e):

- a) Spänningstensor som karakteriserar nuvarande kraft per deformerad area
- b) Materialegenskap som relaterar spänning till töjning i ett dragprov
- c) Skalar som representerar kraft per enhetsarea vinkelrätt mot en yta
- d) Töjningstensor som karakteriserar hur mycket den högra Cauchy-Green deformationstensor avviker från identitetstensor
- e) Fysikalisk egenskap hos vätskor och gaser som betecknar deras interna motstånd mot flöden, och kan ses som ett mått på friktion i fluiden

deformationsgradienttensorn,  $\mathbf{F}$   
 förflyttningsgradienttensorn,  $\mathbf{H}$   
 vänstra Cauchy-Green deformationstensorn,  $\mathbf{B}$   
 högra Cauchy-Green deformationstensorn,  $\mathbf{C}$   
 styvhetstensorn,  $\mathbb{C}$   
 hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{L}$   
 symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{D}$   
 antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn,  $\mathbf{W}$   
 materiederivatan,  $D/Dt$   
 Eulerska töjningstensorn,  $\mathbf{e}$   
 Lagrangeska töjningstensorn,  $\mathbf{E}$   
 infinitesimala töjningstensorn,  $\boldsymbol{\epsilon}$   
 Cauchys spänningstensor,  $\boldsymbol{\sigma}$   
 första Piola-Kirchoff spänningstensorn,  $\mathbf{P}$   
 andra Piola-Kirchoff spänningstensorn,  $\mathbf{S}$   
 hastighetsvektorn,  $\mathbf{v}$   
 förflyttningsvektorn,  $\mathbf{u}$   
 värmeffluxvektorn,  $\mathbf{q}$   
 spänningsvektorn,  $\mathbf{t}$   
 Cauchys högra töjningstensor,  $\mathbf{U}$   
 Cauchys vänstra töjningstensor,  $\mathbf{V}$   
 rotationstensorn,  $\mathbf{R}$   
 deformationsmappningen,  $\boldsymbol{\chi}$   
 temperaturen,  $T$   
 trycket,  $p$   
 skjuvspänningstensorn,  $\boldsymbol{\tau}$   
 dissipationsfunktionen,  $\Phi$   
 viskositeten,  $\mu$   
 densiteten,  $\rho$   
 Youngs modul,  $E$   
 Poissonration,  $\nu$   
 skjuvmodulen,  $G$   
 värmekonduktiviteten,  $k$   
 specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck),  $c_p$   
 bulkmodulen,  $\kappa$

2. Teori (12p)

- a) Materiederivatan av hastigheten kan skrivas som summan av ett lokalt bidrag och ett konvektivt bidrag, där det sistnämnda kan uttryckas  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{v}$ . Skriv ut alla de ingående bidragen (elementen) i  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{v}$  för ett tredimensionellt kartesiskt koordinatsystem.
- b) Ange, för figuren nedan, vilka randvillkor som är tillämpliga på de fyra sidorna (vid  $x_1 = 0$ ,  $x_1 = a$ ,  $x_2 = 0$ , och  $x_2 = b$ ). Antag att systemet är tvådimensionellt.



- c) Om man duschar länge i varmt med ett fönster öppet kan man få uppleva att duschdraperiet drar sig inåt mot fötterna och benen och i värsta fall "klistrar sig fast" mot kroppen. Förklara hur duschens varma vatten kan orsaka att duschdraperiets nederkant rör sig inåt mot den som duschar! Vilken roll spelar det om ett fönstret står öppet eller ej i duschrummet?
- d) En ingenjör ska använda en vindtunnel för att mäta kraften på en omströmmad cylinder. Flödet i testsektionen drivs av en tryckskillnad mellan inlopp och utlopp. Kommer medelhastigheten på flödet i tunneln att öka, minska, eller förbli konstant efter att cylindern placerats i den initialt tomma tunneln? Motivera ditt svar!

- e) Ett material belastas genom drag i dess ändar såsom illustrerat i figuren nedan. Det finns initialt en reva/spricka till vänster i materialets mitt (se figur). Sannolikheten är stor att belastningen kommer att kunna ge upphov till att sprickan växer åt höger i bild – varför? Ge också förslag på åtgärder som skulle kunna medföra att spricktillväxten motverkas.



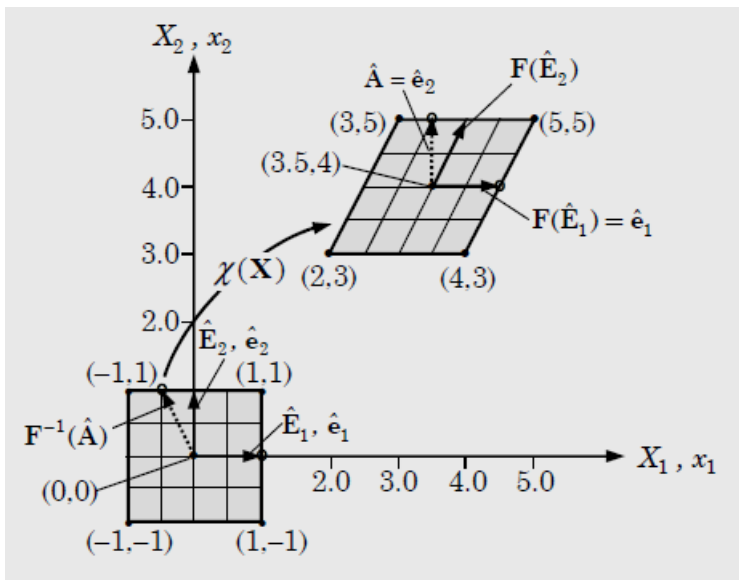
- f) Vid härledningen av Reynolds-medelvärderade Navier-Stokes ekvationer införs Reynoldsdekomponering ( $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$  samt  $p = \bar{p} + p'$ ) i rörelsemängdsbalansen, varefter hela ekvationen medelvärderas. En term av särskilt intresse är  $\langle \nabla \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \rangle$ . Skriv isär denna term som summan av fyra bidrag och visa vilket/vilka bidrag som är identiskt lika med noll och vilket/vilka bidrag som kan vara nollskilda. Motivera ditt svar!  $\langle \rangle$  representerar här medelvärdering (såsom definierat i formelsamlingen under Reynoldsdekomponering).

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Betrakta den uniforma deformationen av ett kvadratisk block med sidan 2 enheter som initialt är placerad i  $\mathbf{X} = (0, 0)$ . Deformationen beskrivs av följande mappning:

$$\chi(\mathbf{X}) = (3.5 + X_1 + 0.5X_2)\hat{e}_1 + (4 + X_2)\hat{e}_2 + X_3\hat{e}_3 \quad (1)$$

och illustreras i figuren nedan.



Bestäm, för denna deformation:

- deformationsgradienttensorn  $\mathbf{F}$
- förflyttningsvektorn  $\mathbf{u}$
- den högra Cauchy-Green deformationstensorn  $\mathbf{C}$
- den Lagrangeska töjningstensorn  $\mathbf{E}$

Uttryck tensorerna på matrisform i dina svar.

4. Elasticitetsproblem (5p)

Betrakta följande spänningstillstånd i en tjockväggig elastisk cylinder:

$$\sigma_{rr} = A + \frac{B}{r^2},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = A - \frac{B}{r^2},$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{zz} = 0,$$

där  $A$  och  $B$  är konstanter.

a) Visa att det ovan angivna spänningstillståndet uppfyller de relevanta rörelselagarna om jämvikt råder och inga volymkrafter är aktiva.

b) Ta fram ett uttryck för spänningsvektorn på en cylindrisk yta vid  $r = a$ .

c) Givet att spänningen vid den inre ytan (vid  $r = r_i$ ) är ett uniformt tryck  $p_i$  och att den yttre ytan (vid  $r = r_o$ ) är spänningsfri, bestäm konstanterna  $A$  och  $B$ .

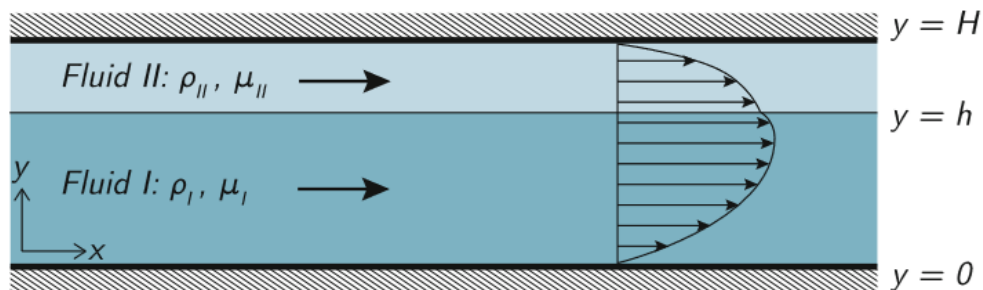
### 5. Strömningsproblem (7p)

Bilden nedan illustrerar stationär, inkompressibel och laminär strömning av två oblandbara Newtonska vätskor ( $I$  och  $II$ ) mellan två oändliga plattor vars inbördes avstånd är  $H$ . Fasgränssytan är placerad vid  $y = h$ . Strömningen drivs av en tryckgradient.

Antag att inga gradienter föreligger i dimensionen in/ut ur papprets plan ( $z$ -riktningen), samt att strömningen är fullt utvecklade (inga ändeffekter). Antag även att gravitationens inverkan på strömningen kan försummas.

Ta fram uttryck för hastighetsprofilerna i de två vätskorna! Hastighetsprofilerna ska uttryckas som funktioner av fluidegenskaper ( $\rho$  och  $\mu$ ), tryckgradienten, samt de geometriska parametrarna ( $h$  och  $H$ ) i problembeskrivningen.

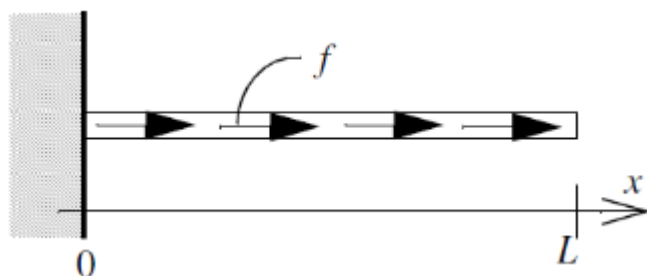
Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du löser uppgiften.



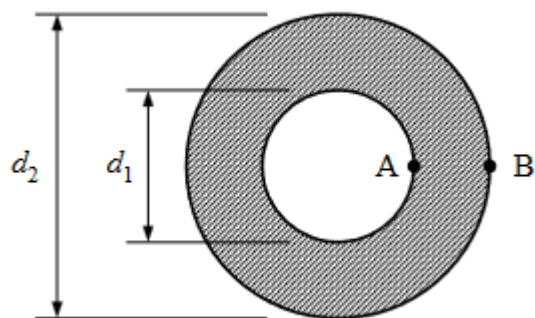


6. Approximativa lösningar: solider (10p)

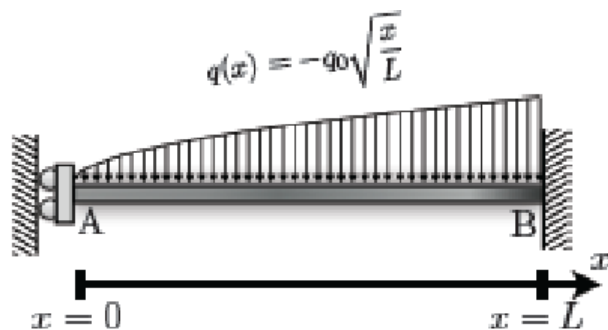
- a) En stång tillverkad av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul  $E$ ) har längd  $L$  och är fixerad i sin vänstra ände. Stången belastas med en friktionslast med konstant intensitet (kraft/längd)  $f$  utmed hela sin längd. Bestäm stångens tvärsnittsarea  $A(x)$  så att spänningen  $\sigma(x)$  varierar linjärt mellan  $\sigma(0) = fL/A_0$  vid inspänningen och  $\sigma(L) = 0$  vid den fria änden.  $A_0$  är tvärsnittsarean vid  $x = 0$ . (3p)



- b) Ett rör med yttre diameter  $d_2 = 90$  mm och inre diameter  $d_1 = 64$  mm utsätts för ett vridande moment  $T = 5500$  Nm. Beräkna skjuvspänningarna som verkar vid inre och yttre ytor (punkter A och B). (2p)

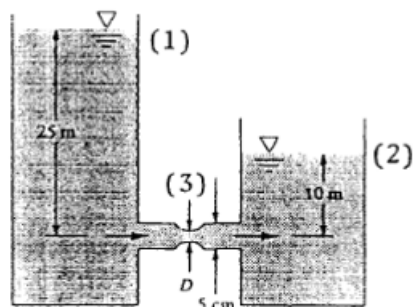


- c) En balk av längd  $L$  mellan  $A$  och  $B$  i figuren nedan (elasticitetsmodul  $E$ , yttröghetsmoment  $I$ ) är i  $B$  fast inspänd i en stel och orubblig vägg. I änden  $A$  är balken fri att röra sig i vertikalriktningen, men med fixerad lutning, såsom figuren antyder. Balken belastas med en utbredd last av formen  $q(x) = -q_0\sqrt{x/L}$ . Hur stor blir utböjningen (positiv uppåt) av balken som funktion av koordinaten  $x$ ? Utgå från elastiska linjens ekvation när du tar fram din lösning. (5p)

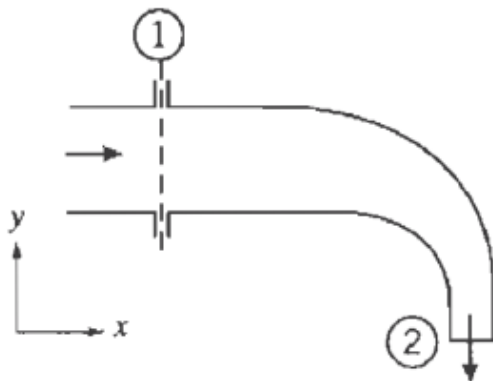


7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Vatten som håller  $40^\circ\text{C}$  strömmar genom en förträngning som skiljer två stora reservoarer åt (se bild nedan). Bägge reservoarerna är öppna upp till. Vattenflödet är  $40\text{ m}^3/\text{h}$  och förträngningens diameter  $D = 30\text{ mm}$ . Hur stora är förlusterna i denna strömningssituation? (3p)



- b) Vatten strömmar stationärt genom en  $90^\circ$  rörböj med reducerande tvärsnittsarea (se figur nedan). Vid inloppet (1) är absoluttrycket  $220\text{ kPa}$  och tvärsnittsarean  $0.01\text{ m}^2$ . Vid utloppet (2) är tvärsnittsarean  $0.0025\text{ m}^2$  och vattnets hastighet  $16\text{ m/s}$ . Vattnet som lämnar vid utloppet åker rakt ut i fria luften. Uppskatta den kraft som krävs för att hålla rörböjen på plats! Du kan anta att atmosfärstrycket är  $101\text{ kPa}$ , att inverkan av vikten av böj+vatten kan försummas, samt att  $\rho = 998\text{ kg/m}^3$ . (4p)



## Formelsamling

---

### Matematik

$s$  är skalär,  $\mathbf{v}$  är vektor,  $\mathbf{A}$  är andra ordningens tensor

*Jacobis formel*

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[ \frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

*Symmetriska och antisymmetriska tensorer*

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

$$\mathbf{A}^S \text{ symmetrisk: } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, A_{ij} = A_{ji}$$

$$\mathbf{A}^A \text{ anti-symmetrisk: } \mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, A_{ij} = -A_{ji}, A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$$

*Deviatorisk (avvikande) tensor*

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr} (\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

*Identitetstensor*

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

*Divergensteoremet*

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

---

## Kinematik

### Definitioner

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

### Materiederivatans och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \right|_{M = \text{fix}} \\ \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

### Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

### Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot dA \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

*Töjning*

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

---

## Spänningar

*Spänningsvektorer*

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

*Cauchys lemma*

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

*Cauchys spenningsformel*

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

*Cauchys spenningstensor*

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}])^2 - \text{tr} ([\boldsymbol{\sigma}]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}|$$

*Piola-Kirchoffs spenningstensorer*

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

---

**Mekaniklagar**

*Massa*

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

*Massbalans - integral form för referenskonfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

*Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

*Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen*

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

*Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

*Reynolds transportteorem*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial \kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

*Rörelsemängd*

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

*Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen*

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

*Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

*Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen*

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

*Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

*Energi*

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

*Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen*

$$\int_{\kappa} \left( \rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

*Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen*

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

### Konstitutiva samband

*Generalisering av Hookes lag till 3D*

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbb{C}] \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \{\boldsymbol{\epsilon}\} = [S] \{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

*Isotrop elastisk solid*

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

*Newtonsk fluid, inkompressibel strömning*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

*Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

*Fouriers lag*

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotropt medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \text{ (isotropt medium)}$$

---

## Linjäriserade elasticitetsproblem

*Linjäriserade beskrivningen*

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

*Töjning-förflyttning*

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1 - \nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

*Plantöjningsproblem - jämvikt*

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

*Planspänningsproblem - jämvikt*

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

## Strömningsproblem

*Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid*

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& \quad = \rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

*Hydrostatik*

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

---

## Värmetransportproblem

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h$$

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h$$

*1D-problem*

$$\begin{aligned}
& \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left( e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& \quad = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

*Dissipation, Newtonsk fluid*

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[ \left( \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

*Boussinesq approximation*

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

*Thermal expansion*

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

## Approximativa lösningar: solider

*Stång*

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

*Stångens differentialekvation*

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx} \left( EA \frac{du}{dx} \right) = K_x A$$

*Axel*

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$K_v = 2\pi r^3 h \text{ (tunnväggigt tvärsnitt)}$$

$$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2 \text{ (tjockväggigt tvärsnitt)}$$

*Axels differentialekvation*

$$\frac{d}{dx} \left( GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

*Balk*

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \quad \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad \sigma_x = E\epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

*Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)*

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

## Approximativa lösningar: fluider

*Bernoullis ekvation*

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

## Turbulens



*Kolmogorovs skalor*

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

*Reynoldsdekomponering*

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

*Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer*

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} - \rho\langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

# Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

11 oktober 2024

## LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Grundläggande begrepp (5p)

a) Cauchys spänningstensor,  $\boldsymbol{\sigma}$

b) Youngs modul,  $E$

c) trycket,  $p$

d) Lagrangeska töjningstensorn,  $\mathbf{E}$

e) viskositeten,  $\mu$

2. Teori (12p)

a) Med  $[\mathbf{v}] = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$  och  $[\mathbf{L}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$

så har vi att  $[\mathbf{L} \cdot \mathbf{v}] = \begin{Bmatrix} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Bmatrix}$ .

- b) Randvillkoren är  $u_1 = u_2 = 0$  på  $x_2 = 0$ ,  $t_1 = t_2 = 0$  på  $x_1 = a$  och  $x_2 = b$ , samt  $t_1 = -\sigma_0 \left(1 - \frac{x_2}{b}\right)$ ,  $t_2 = 0$  på  $x_1 = 0$ .
- c) Det varma vattnet värmer luften i duschen, så att den blir varmare än luften utanför. Den varma luften har lägre densitet än den kalla luften, och börjar stiga uppåt. Den måste då ersättas av (kall) luft som kommer strömma in under den nedre kanten och ta med sig duschdraperiet in mot fötterna och benen på den som duschar. Om duschrummet är stängt kommer all luft värmas upp och effekten mattas av över tid. Med ett öppet fönster kan varm luft lämna duschutrymmet och ersättas av utifrån kommande kall luft, varvid effekten kvarstår längre.
- d) Använd t ex Bernoullis ekvation med förluster för detta resonemang. Strömningen över cylindern innebär förluster för flödet. Med samma drivande tryckskillnad (givet) och samma hastighet in och ut ur tunneln (kontinuitet) så måste alltså hastigheten vara lägre med cylindern på plats jämfört med när tunneln är tom.
- e) Sprickan ger upphov till en spänningskoncentration alldeles till höger om sprickan. Detta inses genom att dra tänkta strömlinjer från papprets överkant till dess nederkant; dessa linjer måste då ligga tätare när de passerar i höjd med sprickan. Spricktillväxten skulle kunna motverkas genom att lokalt förstärka pappret i området där spänningskoncentrationen är aktiv.

f) Vi noterar först och främst att  $\langle \nabla (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') \rangle = \langle \nabla \bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}} \rangle + \langle \nabla \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}' \rangle + \langle \nabla \mathbf{v}' \bar{\mathbf{v}} \rangle + \langle \nabla \mathbf{v}' \mathbf{v}' \rangle$ . Första termen kan skrivas  $\bar{\mathbf{v}} \bar{\mathbf{v}}$ , eftersom medelvärdet av ett medelvärde bara är medelvärdet självt. Detta faktum, i kombination med att medelvärdet av en fluktuation är identiskt lika med noll per definition, ger att de efterföljande två termerna måste vara noll, d v s  $\langle \nabla \bar{\mathbf{v}} \mathbf{v}' \rangle = \nabla \bar{\mathbf{v}} \langle \mathbf{v}' \rangle = 0$  och  $\langle \nabla \mathbf{v}' \bar{\mathbf{v}} \rangle = \langle \nabla \mathbf{v}' \rangle \bar{\mathbf{v}} = 0$ . Den sista termen representerar ett medelvärde av en produkt av fluktuerande komponenter och kan alltså vara nollskild (i själva verket vet vi att det är denna term som representerar inverkan av turbulens).

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

a) Med givna data:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

b) Vi har att  $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} = (3.5 + 0.5X_2)\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$

$$\text{c) } [\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.00 & 0.50 & 0.00 \\ 0.50 & 1.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 1.00 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } [\mathbf{E}] = \frac{1}{2} ([\mathbf{C}] - [\mathbf{I}]) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0.00 & 0.50 & 0.00 \\ 0.50 & 0.25 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}$$

4. Elasticitetsproblem (5p)

a) Eftersom alla spänningskomponenter utom  $\sigma_{rr}$  och  $\sigma_{\theta\theta}$  är noll, och  $\sigma_{\theta\theta}$  endast beror av  $r$  (ej av  $\theta$ ) så är den enda relevanta rörelselagen att kolla den i  $r$ -riktning:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

Använd kunskapen om vilka komponenter som är noll + utnyttja att jämvikt råder och inga volymkrafter är aktiva:

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0$$

Med givna uttryck för  $\sigma_{rr}$  och  $\sigma_{\theta\theta}$ :

$$\frac{-2B}{r^3} + \frac{2B}{r^3} = 0$$

Med andra ord uppfyller det angivna spänningstillståndet rörelselagarna.

b) Vi har att  $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ , och vi känner  $\boldsymbol{\sigma}$ ; sålunda behövs endast  $\hat{\mathbf{n}}$ . För en cylindrisk yta vid  $r = a$  har vi att ytnormalen pekar (utåt) så att  $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{e}_r$ :

$$\begin{Bmatrix} t_r \\ t_\theta \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{eller } \mathbf{t} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r = \left( A + \frac{B}{a^2} \right) \mathbf{e}_r.$$

c) Givet att vid  $r = r_o$  så är  $\sigma_{rr} = 0$  och vid  $r = r_i$  så är  $\sigma_{rr} = -p_i$ :

$$A + \frac{B}{r_o^2} = 0, \quad A + \frac{B}{r_i^2} = -p_i$$

vilket motsvarar:

$$A = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2}, \quad B = -\frac{p_i r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2}$$

5. Strömningsproblem (7p)

Utgå från N-S i  $x$ -riktningen:

$$\mu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Antag: laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid, stationärt, försumbar gravitation, fullt utvecklade strömning. I så fall:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analogt för  $y$ - och  $z$ -riktningarna:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

d v s  $p = p(x)$ . Detta gäller i bägge fluider, samtidigt som tryckgradienten måste vara densamma, varför:

$$\begin{aligned} \mu_I \frac{\partial^2 v_{I,x}}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \\ \mu_{II} \frac{\partial^2 v_{II,x}}{\partial y^2} &= \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned}$$

Integrera två gånger:

$$\begin{aligned} v_{I,x} &= \frac{1}{2\mu_I} \frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2 \\ v_{II,x} &= \frac{1}{2\mu_{II}} \frac{dp}{dx} y^2 + C_3 y + C_4 \end{aligned}$$

Tillämpa randvillkor:

$$\text{Vid } y = 0: v_{I,x} = 0$$

$$\text{Vid } y = H: v_{II,x} = 0$$

$$\text{Vid } y = h: v_{I,x} = v_{II,x}$$

$$\text{Vid } y = h: \tau_{I,xy} = \tau_{II,xy} \iff \mu_I \frac{\partial^2 v_{I,x}}{\partial y^2} = \mu_{II} \frac{\partial^2 v_{II,x}}{\partial y^2}$$

för att bestämma integrationskonstanterna,

och vi erhåller:

$$v_{I,x} = \frac{H^2}{2\mu_I} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left[ \frac{y}{H} \frac{(1-k)^2\mu_I + k^2\mu_{II}}{(1-k)\mu_I + k\mu_{II}} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 \right]$$
$$v_{II,x} = \frac{H^2}{2\mu_{II}} \left( -\frac{dp}{dx} \right) \left[ \left( \frac{y}{H} + 1 \right) \frac{(1-k)^2\mu_I + k^2\mu_{II}}{(1-k)\mu_I + k\mu_{II}} - \left( \frac{y}{H} \right)^2 + 1 \right]$$

där  $k = h/H$ .



6. Approximativa lösningar: solider (10p)

a) Stångens differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[ EA \frac{du}{dx} \right] = -\frac{d}{dx} [\sigma A] = f$$

Spänningen varierar linjärt:

$$\sigma(x) = \frac{fL}{A_0} \left( 1 - \frac{x}{L} \right)$$

Insättning ger:

$$\frac{dA}{dx} + A \left( \frac{1}{x-L} \right) = \frac{A_0}{x-L}$$

Denna differentialekvation har lösningen:

$$A(x) = \frac{A_0 x + C}{x-L}$$

Randvillkor:

$$A(0) = A_0$$

vilket ger:

$$A(x) = A_0 \text{ (konstant).}$$

b) Vi har att  $\tau = \frac{Tr}{K_v}$  och  $K_v = \frac{\pi}{2} [(d_2/2)^4 - (d_1/2)^4]$ , så att  $\tau = \frac{2Tr}{\pi [(d_2/2)^4 - (d_1/2)^4]}$ .

Sätt in  $r = d_1/2$  (A) samt  $r = d_2/2$  (B) och vi erhåller  $\tau_A = 36.7$  MPa respektive  $\tau_B = 51.6$  MPa.

c) Elastiska linjens ekvation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

$E$  och  $I_y$  är oberoende av  $x$ . Lasten är  $q(x) = -q_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$ . Med andra ord:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = -\frac{q_0}{EI_y} \sqrt{\frac{x}{L}}$$

Integrera fyra gånger:

$$w(x) = -\frac{16q_0 x^4 \sqrt{x}}{945 EI_y \sqrt{L}} + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$$

Randvillkor:

$$T = 0 \text{ vid } x = 0$$

$$w = 0 \text{ vid } x = L$$

$$dw/dx = 0 \text{ vid } x = 0 \text{ och } x = L$$

så att:

$$w(x) = -\frac{4q_0 \left( 5L^4 - 9L^2 x^2 + 4x^4 \sqrt{x/L} \right)}{945 EI_y}$$

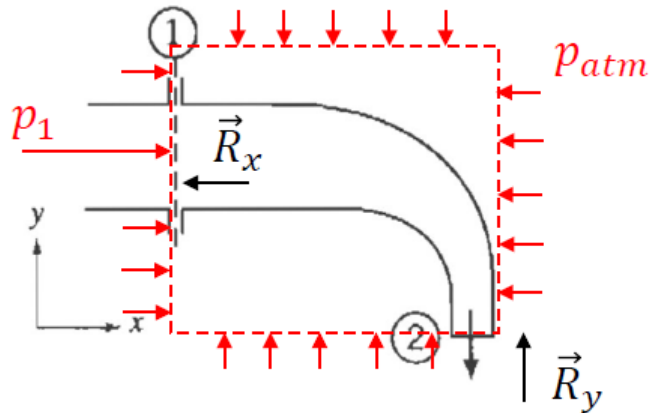
7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Ställ upp Bernoullis ekvation med förluster. Följ en strömlinje från vätskeytan i den höga tanken (1) till den låga (2). Trycket är detsamma (atmosfärstryck) och hastigheten är ungefär noll på bägge ställen. Sålunda gäller att förlusttermen måste motsvara höjdskillnaden:  $h_f = h_1 - h_2 = 25 - 10 \text{ m} = 15 \text{ m}$ . Informationen om själva förträngningen (som orsakar största delen av förlusten) behöver vi inte använda.
- b) Använd kontrollvolymstekniken. Rörelsemängdsbalans:

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \mathbf{v} dV + \int_{CS} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA$$

Kontrollvolymen ändrar inte storlek och problemet är beskrivet såsom varandes steady-state, så  $\frac{d}{dt} \int_{CV} \rho \mathbf{v} dV = 0$ .

Rita:



Vi söker  $\mathbf{R}$ . Rörelsemängdsbalansen ger:

$$R_x + (p_1 - p_{atm})A_1 = -\rho v_1^2 A_1$$

$$R_y = -\rho v_2^2 A_2$$

$v_1$  är okänd men kan erhållas ur  $\mathbf{v}$  via massbalans:

$$\int_{CS} \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dA = -\rho v_1 A_1 + \rho v_2 A_2 = 0$$

$$v_1 = v_2 A_2 / A_1 = 4 \text{ m/s}$$

Insättning ger svaret:

$$R_x = -1350 \text{ N}$$

$$R_y = -638 \text{ N}$$

(Att komponenterna är negativa innebär att reaktionskraften är motriktad jämfört med hur den är inritad i figuren ovan.)