



Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 29 augusti 2024 kl 14:00-18:00

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematiska handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 15:00 och kl 17:00

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 19:e september 2024 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; $20p \leq$ Betyg 3 < 30p ; $30p \leq$ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 \geq 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

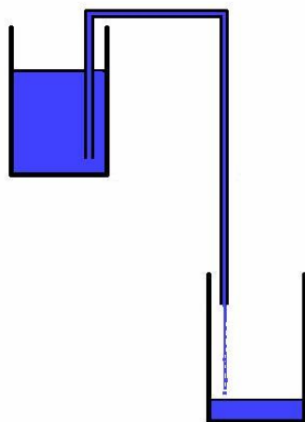
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Den totala tidsderivatan som följer materian
- b) Fjärde ordningens tensor som relaterar spänning till töjning i den generaliserade versionen av Hookes lag
- c) Vektor som pekar från en materialpartikels position i referenskonfigurationen till dess nuvarande position i den deformerade konfigurationen
- d) Symmetrisk spänningstensor som karakteriserar transformerad nuvarande kraft per enhet odeformerad area
- e) Tensor som representerar rotation när en deformation dekomponeras i en ren töjning åtföljd av en ren rotation

deformationsgradienttensorn, \mathbf{F}
 förflyttningsgradienttensorn, \mathbf{H}
 vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, \mathbf{B}
 högra Cauchy-Green deformationstensorn, \mathbf{C}
 styvhetstensorn, \mathbb{C}
 hastighetsgradienttensorn, \mathbf{L}
 symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, \mathbf{D}
 antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, \mathbf{W}
 materiederivatan, D/Dt
 Eulerska töjningstensorn, \mathbf{e}
 Lagrangeska töjningstensorn, \mathbf{E}
 infinitesimala töjningstensorn, $\boldsymbol{\epsilon}$
 Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$
 första Piola-Kirchoff spänningstensorn, \mathbf{P}
 andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, \mathbf{S}
 hastighetsvektorn, \mathbf{v}
 förflyttningsvektorn, \mathbf{u}
 värmeffluxvektorn, \mathbf{q}
 spänningsvektorn, \mathbf{t}
 Cauchys högra töjningstensor, \mathbf{U}
 Cauchys vänstra töjningstensor, \mathbf{V}
 rotationstensorn, \mathbf{R}
 deformationsmappningen, $\boldsymbol{\chi}$
 temperaturen, T
 trycket, p
 skjuvspänningstensorn, $\boldsymbol{\tau}$
 dissipationsfunktionen, Φ
 viskositeten, μ
 densiteten, ρ
 Youngs modul, E
 Poissonration, ν
 skjuvmodulen, G
 värmekonduktiviteten, k
 specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
 bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

- a) Härled ett uttryck för $\frac{DJ}{Dt}$ (materiederivatan av determinanten av deformationsgradienttensorn). $\frac{DJ}{Dt}$ ska uttryckas som en funktion av J och \mathbf{v} .
- b) En hävert är ett rör eller en slang som används bland annat inom byggt teknik, hembryggning och bensinslangning för att överföra vätska från en behållare till en annan. Den mottagande änden måste vara placerad på lägre nivå än den nivå på vilken behållaren vätskan ska skickas ifrån är, och överföringen kan då ske utan pump. Förklara hur en hävert fungerar!



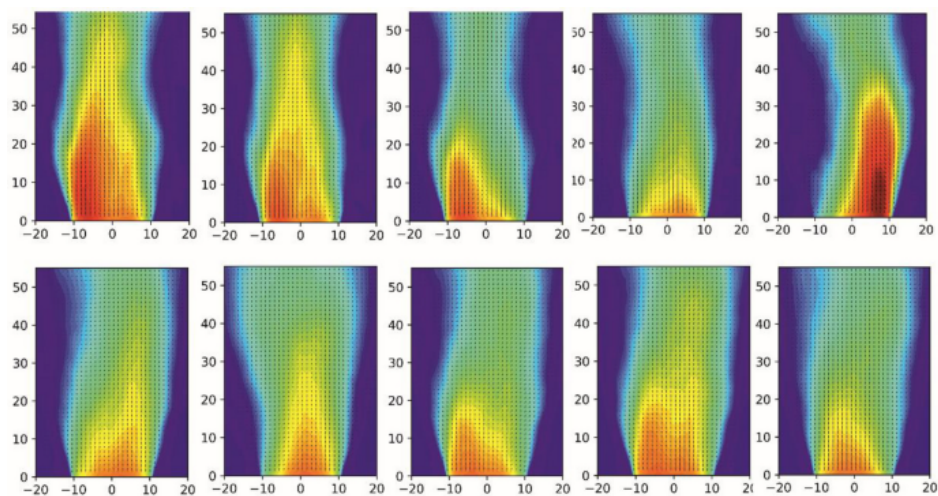
- c) Vad är superpositionsprincipen och hur kan man använda den till sin fördel i problem som involverar de linjäriserade elastiska rörelselagarna? Superpositionsprincipen fungerar endast i undantagsfall för strömningsproblem. Vilken typ av strömning möjliggör användandet av superpositionsprincipen?

- d) Stavhopp är en friidrottsgren som går ut på att med hjälp av en stav hoppa över en så högt placerad ribba som möjligt. Armand Duplantis slog nyss sitt eget världsrekord från OS-finalen i stavhopp på Diamond League-galan i Polen, där han klarade höjden 6.26 m. Sportens tekniska utveckling är baserad på användandet av moderna glasfiberstavar, som deformeras i hoppet (se nedanstående foto) men återgår till sin ursprungliga form efteråt. Vad kallas denna typ av deformation? Kan du använda den linjäriserade elasticitetsteorin som vi tar fram inom ramen för denna kurs för att analysera deformationen av en stavhoppstav i ett världsrekordsförsök? Varför/varför inte?



- e) Om man bränt sig på ett finger kan det ibland kännas bättre att blåsa på det. Om man fryser om händerna en kall vinterdag kan man också blåsa på händerna för att värma dem, men då blåser man typiskt på ett annat sätt. Förklara hur olika sätt att blåsa kan antingen kyla eller värma!

- f) Genom mätningar av en turbulent flamma i en förbränningsprocess med förnybart bränsle har ett stort antal ögonblicksbilder av hastighetsfältet insamlats (se bild nedan för illustration av $|\mathbf{u}|$ i några av ögonblicksbilderna). Givet att man har tillgång till ett stort antal ögonblicksbilder av alla tre hastighetskomponenter, ge förslag på hur kan man ta fram en uppskattning av den genomsnittliga storleken på de turbulenta fluktuationerna i flammen!



3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Betrakta en rörelse på följande form:

$$x_1 = -2X_1 + X_2 \quad (1)$$

$$x_2 = -X_1 - 2X_2 \quad (2)$$

$$x_3 = X_3 \quad (3)$$

Bestäm, för denna rörelse:

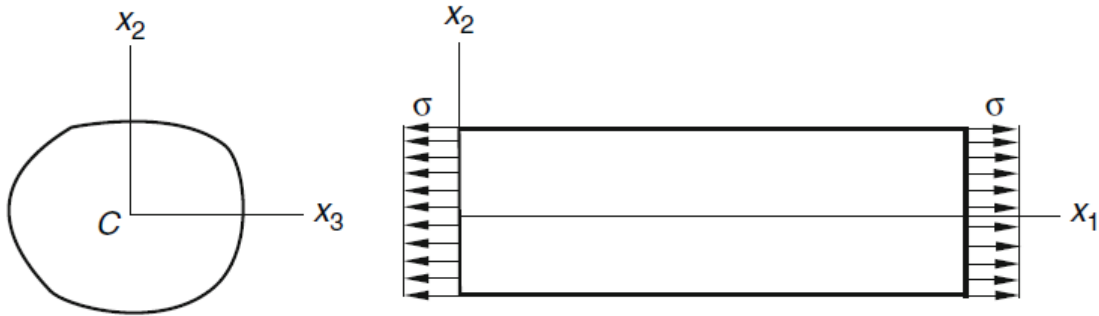
a) utseendet på den Lagrangeska töjningstensorn \mathbf{E}

b) Cauchys högra töjningstensor \mathbf{U}

Uttryck dessa tensorer på matrisform i ditt svar.

4. Elasticitetsproblem (5p)

En cylindrisk stång av godtyckligt tvärsnitt belastas av lika stora och motriktade normalspänningar σ med uniform fördelning över dess ändar (se figur). Mantelytan är spänningsfri och inga volymkrafter är aktiva. Materialet kan beskrivas som en linjär elastisk isotrop solid.



För denna situation förväntar vi oss följande utseende på den infinitesimala töjningstensorn:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= \frac{\sigma}{E}, \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_{33} = -\frac{\nu\sigma}{E}, \\ \epsilon_{12} &= \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0.\end{aligned}$$

Om dessa uttryck integreras upp erhålles följande förflyttningsfält:

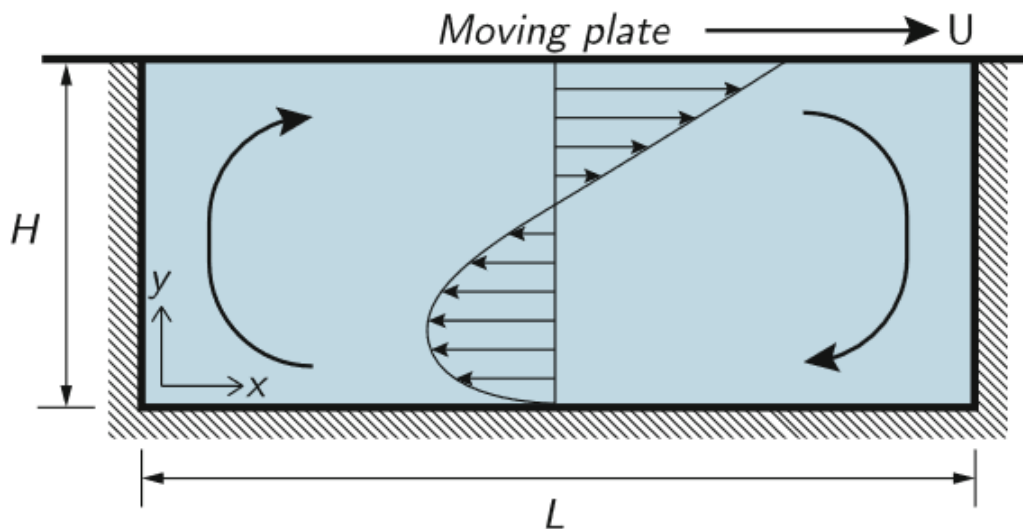
$$\begin{aligned}u_1 &= (\sigma/E)x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + c_2, \\ u_2 &= -(\nu\sigma/E)x_2 + b_3x_3 - b_1x_1 + c_3, \\ u_3 &= -(\nu\sigma/E)x_3 - b_2x_1 - b_3x_2 - c_4.\end{aligned}$$

a) Visa att samtliga termer med obestämda konstanter ($b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, c_4$) tillsammans beskriver en fastkroppsrörelse.

b) Antag att tvärsnittsarean på stängen är A så att σ kan relateras till en kraft P genom $P = \sigma A$. Ta fram uttryck för stängens förlängning $\Delta\ell$ i x_1 -riktning och Δd i transvers riktning (x_2 - och x_3 -riktningarna). Dessa uttryck bör vara funktioner av P, A, E och ν samt de odeformerade längderna ℓ (i x_1 -riktningen) och d (i de transversa riktningarna).

5. Strömningsproblem (7p)

Bilden nedan illustrerar strömning i ett hålrum som drivs av ett rörligt lock. Ovansidan rör sig åt höger med konstant hastighet U , medan resterande ränder är solida väggar. Locket kommer att skapa en rörelse i fluiden åt höger, som måste balanseras av en motsatt rörelse åt andra hållet längre ned i hålrummet.



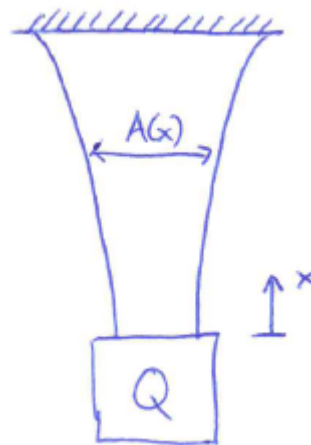
Antag att strömningssituationen är stationär, inkompressibel och laminär, samt att inga gradienter föreligger i dimensionen in/ut ur papprets plan (z -riktningen). Antag vidare att $L \gg H$ så att det är rimligt att studera endast mitten på hålrummet och försumma ändeffekter (till höger och vänster). Antag även att gravitationens inverkan på strömningen kan försummas.

- Ta fram ett uttryck för tryckgradienten dp/dx i mitten av L .
- Ta även fram ett uttryck för hastighetsprofilen $v_x(y)$ i mitten av L .

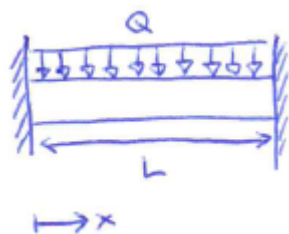
Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du löser uppgiften.

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

- a) En stång tillverkad av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul E) har varierande tvärsnittsarea $A(x)$ och är fäst i ett tak enligt figur. Stången belastas utöver sin egentyngd även med den yttre kraften Q i fria änden. Man vill säkerställa att normalspänningen i stången inte överstiger det tillåtna värdet σ_t . Ta därför fram ett uttryck för $A(x)$ så att normalspänningen blir exakt σ_t (konstant) genom stången. (4p)

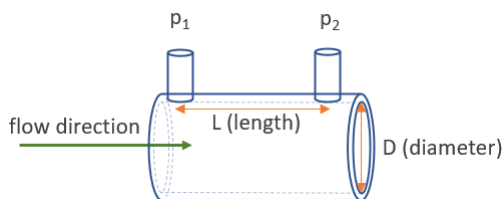


- b) Ett tunnväggigt elastiskt cirkulärt rör med medelradien a och godstjockleken h belastas med det yttre vridande momentet M_v i bägge ändar. Vad är skjuvspänningen i rörets tvärsnitt och vad är normalspänningen i rörets axiella riktning? Uttryck som funktion av M_v , a och h . (2p)
- c) En balk av längd L (elasticitetsmodul E , yttröghetsmoment I) är fast inspänd mellan två väggar och belastas med en konstant utbredd last Q (se figur nedan). Hur stor blir nedböjningen av balken i mitten? Utgå från elastiska linjens ekvation när du tar fram din lösning. (4p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Vatten strömmar stationärt genom ett långt rör med konstant diameter. På två ställen längs med röret finns möjlighet att mäta det statiska trycket (se bild nedan). Kommer tryckmätningen visa $p_1 > p_2$, $p_1 < p_2$ eller $p_1 = p_2$? Motivera ditt svar! (1p)



- b) Rökgaser från en förbränningsugn leds till en hög skorsten som utgår från marknivå. Skorstenens diameter är konstant. Rökgaserna håller konstant temperatur (227°C , $\rho = 0.65 \text{ kg/m}^3$), och såväl värmeförluster som viskös dissipation är försumbara i skorstenen. Trycket utanför skorstenen på marknivå är 1 bar och trycket inne i skorstenen på motsvarande nivå är 250 Pa lägre. Omgivande luft håller överallt 20°C , så att $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$. Hur hög är skorstenen? (3p)
- c) Weber-talet är ett dimensionslöst tal definierat som kvoten mellan formmotståndskraften på en droppe och den sammanhållande ytspänningskraften. Det kan användas för att prediktera om en droppe går sönder eller ej när den utsätts för påverkan av ett omgivande strömningsfält. Dess definition är $We = \rho U^2 D / \sigma$, där ρ är omgivande fluids densitet, U är den relativa hastigheten mellan droppe och omgivande fluid, D är droppens diameter, och σ är ytspänningen. En tumregel är att en droppe bryts upp i flera mindre droppar om $We \geq 12$. Om en vattendroppe i luft ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\sigma = 72 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$) är stabil upp till en storlek om $D = 1 \text{ cm}$, hur stor kan då en droppe av heptan ($\sigma = 20 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$) vara i samma strömningssituation utan att brytas upp? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, \mathbf{v} är vektor, \mathbf{A} är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

\mathbf{A}^S symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $A_{ij} = A_{ji}$

\mathbf{A}^A anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \right|_{M = \text{fix}} \\ \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-\text{T}} \cdot dA \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

Töjning

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\text{T}} \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\text{T}}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spenningsformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spenningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}])^2 - \text{tr} ([\boldsymbol{\sigma}]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}|$$

Piola-Kirchoffs spenningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial \kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbb{C}] \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \{\boldsymbol{\epsilon}\} = [S] \{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\operatorname{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\operatorname{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotropt medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \text{ (isotropt medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \quad \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1 - \nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
\mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y &= \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
\mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z &= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0 \\
\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
&= \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
&= \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
&= \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmetransportproblem

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
\left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
= W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Thermal expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = K_x A$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$K_v = 2\pi r^3 h \text{ (tunnväggigt tvärsnitt)}$$

$$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2 \text{ (tjockväggigt tvärsnitt)}$$

Axels differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \quad \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad \sigma_x = E\epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: fluider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalor

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} - \rho\langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

29 augusti 2024

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Grundläggande begrepp (5p)

a) materiederivatatan, $\frac{D}{Dt}$

b) styvhetstensorn, \mathbb{C}

c) förflyttningsvektorn, \mathbf{u}

d) andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, \mathbf{S}

e) rotationstensorn, \mathbf{R}

2. Teori (12p)

- a) Använd definitionen $J = \det \mathbf{F}$ och Jacobis formel $\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} \mathbf{F}^{-1} \right]$. Detta ger $\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{tr} \left(\frac{D\mathbf{F}}{Dt} \mathbf{F}^{-1} \right)$. Eftersom \mathbf{X} är oberoende av t har vi att $\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \mathbf{L}\mathbf{F}$. Sålunda är $\frac{D\mathbf{F}}{Dt} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{L}$ och $\frac{DJ}{Dt} = J \operatorname{div} \mathbf{v}$.
- b) Bernoullis ekvation utan förluster kan användas för en första analys. Följ en tänkt strömlinje från vätskeytan i den övre behållaren ①, ned till hävertens inlopp, upp genom häverten och hela vägen till utloppet över den nedre behållaren ②. Vi vet då att $p_1 = p_2 = p_{atm}$ samt att $v_1 \approx 0$ (stor behållare). Med $H = z_1 - z_2$ erhålles $v_2 = \sqrt{2gH}$. Det är alltså vätskepelaren motsvarande höjdskillnaden H som driver flödet genom häverten, och vi måste ha $H > 0$ ($z_1 > z_2$) för att det ska fungera.
- c) De linjäriserade elastiska rörelselagarna är just linjära, vilket innebär att om man kombinerar (adderar) en giltig lösning av ett problem till en giltig lösning av ett annat problem, så erhåller man fält som utgör en giltig lösning till ett tredje problem. Om randvillkoren är oberoende av deformationen, kan man dela upp dem i flera bidrag/fördelningar och lösa en serie av enklare problem, varefter den slutgiltiga lösningen för de summerade randvillkoren erhålles som summan av de individuella lösningarna. Strömningsproblem är generellt sett icke-linjära, med undantag av problem som enbart involverar laminär strömning.
- d) Deformationen av en stavhoppstav är ett exempel på elastisk deformation. Man kan dock inte analysera denna deformation med den linjäriserade elasticitetsteorin, eftersom den är begränsad till små deformationer.
- e) Om man vill kyla (t ex blåsa på ett bränt finger) brukar man forma läpparna så att luften får hög hastighet. Tanken är att skapa effektiv värmetransport från ytan man blåser på (fingret) till den omgivande luften, för att på så sätt sänka temperaturen vid ytan. Om man vill värma (t ex blåsa på kalla händer) brukar man öppna munnen mycket mer, vilket ger lägre hastighet på luften. Syftet är här att den (relativt sett) varma utandningsluften ska komma i kontakt med ytan som

ska värmas (händerna) och på så sätt öka temperaturen där genom värmeöverföring.

- f) Ögonblicksbilderna ger information om \mathbf{v} . Om man medelvärderar alla ögonblicksbilder erhåller man medelvärdet $\bar{\mathbf{v}}$. När $\bar{\mathbf{v}}$ är känd kan man erhålla fluktuationerna i varje ögonblicksbild som $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$. Notera att om man medelvärderar \mathbf{v}' så får man bara 0. Ett bättre mått på den genomsnittliga storleken på fluktuationerna är därför t ex standardavvikelsen av \mathbf{v}' (eller liknande).

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

a) Vi har att $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, så vi behöver ta fram \mathbf{C} . Eftersom $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ innebär detta att vi behöver \mathbf{F} . Med givna data:

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

så att:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}]^T [\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Detta ger:

$$[\mathbf{E}] = \frac{1}{2}([\mathbf{C}] - [\mathbf{I}]) = \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Här utnyttjar vi att $\mathbf{U}^2 = \mathbf{U}\mathbf{U} = \mathbf{C}$. I detta exempel är $[\mathbf{C}]$ en diagonal matris, så att $[\mathbf{U}]$ kan erhållas genom att ta roten ur elementen i $[\mathbf{C}]$:

$$[\mathbf{U}] = [\sqrt{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Elasticitetsproblem (5p)

a) Vi vill visa att:

$$\begin{aligned}u_1 &= b_1x_2 + b_2x_3 + c_2, \\u_2 &= b_3x_3 - b_1x_1 + c_3, \\u_3 &= -b_2x_1 - b_3x_2 - c_4\end{aligned}$$

representerar en fastkroppsrörelse. Fastkroppsrörelse (ren translation och/eller stelkroppsrotation) som ingår i \mathbf{u} sätter inga spår i \mathbf{F} , eftersom sådan rörelse inte ger upphov till spänningar i kroppen. Rent matematiskt garanteras detta genom att $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$, d v s att $\boldsymbol{\varepsilon}$ är den symmetriska delen av \mathbf{H} – den antisymmetriska delen ($\frac{1}{2}(\mathbf{H} - \mathbf{H}^T)$) innehåller fastkroppsrörelsen. Således har vi ombetts visa att $\mathbf{H} = \nabla\mathbf{u}$ är antisymmetrisk för rörelsen ovan. Ta fram \mathbf{H} :

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & b_3 \\ -b_2 & -b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser att $\mathbf{H} = -\mathbf{H}^T$, d v s \mathbf{u} enligt ovan representerar fastkroppsrörelse.

b) Notera att $\varepsilon_{11} = \frac{\Delta\ell}{\ell} = \frac{\sigma}{E}$ och $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{\Delta d}{d} = -\frac{\nu\sigma}{E}$. Med $\sigma = P/A$ kan vi lösa för $\Delta\ell$ och Δd och får då:

$$\begin{aligned}\Delta\ell &= \frac{P\ell}{AE} \\ \Delta d &= -\frac{\nu Pd}{AE}\end{aligned}$$

5. Strömningsproblem (7p)

a)-uppgiften: Utgå från N-S i x -riktningen:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Antag: laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid, stationärt, försumbar gravitation, fullt utvecklade strömning. I så fall:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Analogt för y - och z -riktningarna:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

d v s $p = p(x)$. Integrera två gånger + tillämpa randvillkor:

$$\begin{aligned} v_x(y=0) &= 0 \\ v_x(y=H) &= U \end{aligned}$$

för att bestämma integrationskonstanterna, och vi erhåller:

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} y^2 + \left(\frac{U}{H} - \frac{H}{2\mu} \frac{dp}{dx} \right) y$$

Hur kan vi bestämma dp/dx ? Jo, vi vet också att det totala massflödet som passerar linjen i y -riktningen i mitten av L måste vara 0 (det ackumuleras inte massa på endera sidan av systemet under rådande betingelser). Detta innebär att:

$$\bar{v}_x = \frac{1}{H} \int_0^H v_x dy = \frac{U}{2} - \frac{dp}{dx} \frac{H^2}{12\mu} = 0 \rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6U\mu}{H^2}$$

b)-uppgiften: Vi har redan ett uttryck för $v_x(y)$ med dp/dx som enda okända. Sätt in:

$$v_x(y) = \frac{3U}{H^2} y^2 - \frac{2U}{H} y.$$

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

a) Stångens differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] = -\frac{d}{dx} [\sigma A] = K_x A$$

K_x är volymlast [N/m^3], A är area [m^2], produkten är kraft/längd [N/m], med andra ord kommer egentygnd in som:

$$K_x = -mg/V = -\rho g$$

Med varierande area $A = A(x)$:

$$\frac{d}{dx} [\sigma_t A(x)] - \rho g A(x) = 0$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\rho g}{\sigma_t} A(x)$$

$$A(x) = C \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_t} x\right)$$

Randvillkor:

$$\sigma(x=0) = \frac{N(x=0)}{A(x=0)} = \frac{Q}{A(0)} = \sigma_t \Leftrightarrow A(0) = \frac{Q}{\sigma_t}$$

vilket ger:

$$A(x) = \frac{Q}{\sigma_t} \exp\left(\frac{\rho g}{\sigma_t} x\right).$$

b) Vi har att $\tau = \frac{M_v r}{K_v}$ och $K_v = 2\pi r^3 h$, så att $\tau = \frac{M_v}{2\pi a^2 h}$ (ty $r = a$).

För normalspänningen σ_z kan man snitta i mitten och ställa upp jmv:

$$-\sigma_z A = 0 \rightarrow \sigma_z = 0.$$

c) Elastiska linjens ekvation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

E och I_y är oberoende av x . Lasten är konstant $-Q$. Integrera fyra gånger:

$$\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -Qx + C_1$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -Q \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -Q \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI_y w = -Q \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Randvillkor:

$$w = 0 \text{ vid } x = 0 \text{ och } x = L$$

$$dw/dx = 0 \text{ vid } x = 0 \text{ och } x = L$$

så att:

$$w(x) = -\frac{Qx^4}{24EI_y} + \frac{QLx^3}{12EI_y} - \frac{QL^2x^2}{24EI_y}$$

$$\text{Sökt är } -w(x = L/2) = -\frac{QL^4}{384EI_y}$$

7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Ställ upp Bernoullis ekvation med förluster. Rörets diameter förändras inte mellan ① och ②, så hastigheten är oförändrad. Det föreligger heller ingen höjdskillnad. Sålunda gäller att $p_1 = p_2 + \rho g h_f$. Eftersom det måste finnas förluster (friktion mellan fluid och rörvägg) mellan ① och ② vet vi att $h_f > 0 \rightarrow \rho g h_f > 0$, vilket innebär att $p_1 > p_2$.
- b) Vi får försumma värmeförluster och viskös dissipation i skorstenen, så det räcker med Bernoullis ekvation utan förluster. Följ en strömlinje från skorstenens inlopp ① till dess utlopp ②. Skorstenen har höjden H . Trycket vid marken är p_{atm} , så att trycket vid ① är $p_{atm} - 250$ Pa. Trycket vid skorstenens utlopp är $p_{atm} - \rho_{luft} g H$. Rökgasernas hastighet i skorstenen kan antas konstant då temperaturen inte ändras. Sålunda har vi att:

$$\frac{p_{atm} - 250 \text{ Pa}}{\rho_{rokgaser}} - \frac{p_{atm} - \rho_{luft} g H}{\rho_{rokgaser}} - g H = 0$$

Allt är känt utom H , så vi kan lösa ut:

$$H = \frac{250 \text{ Pa}}{(\rho_{luft} - \rho_{rokgaser})g} = 46 \text{ m.}$$

- c) Samma strömningssituation = dynamiskt lika förhållanden, vilket innebär att Weber-talet ska vara samma för vattendroppen som för heptandroppen. Vi är här intresserade av gränsen $We = 12$. För vattendroppen är allt utom U känt, och vi kan lösa ut $U \approx 8.49$ m/s. För heptandroppen är då allt känt utom D , och vi kan lösa ut $D \approx 2.8$ mm.