



Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 31 maj 2024 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 24:e juni 2024 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; 20p ≤ Betyg 3 < 30p ; 30p ≤ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 ≥ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

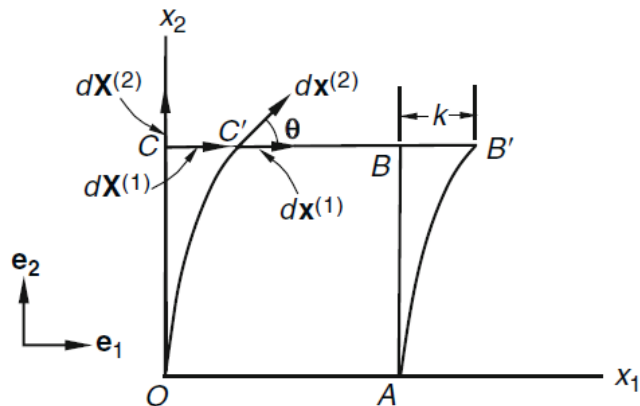
Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Tensor som tar ett materiallinjeelement på referenskonfigurationen och mappar det till den nuvarande konfigurationen
- b) Den andra ordningens tensor som resulterar när ∇ opererar på den vektor som karakteriserar makroskopisk medelhastighet hos materialpartiklarna i en punkt
- c) Spänningstensor som karakteriserar nuvarande (verklig) kraft per enhet nuvarande (deformerad) area
- d) Funktion som beskriver hur viskös friktion i en fluid överför energi från ordnad rörelse till oordnad rörelse
- e) Materialegenskap som är definierad som pålagt tryck delat med relativ volymförändring, och alltså karakteriserar ett materials motståndskraft mot kompression när ett yttre tryck verkar på alla dess sidor

deformationsgradienttensorn, \mathbf{F}
 förflyttningsgradienttensorn, \mathbf{H}
 vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, \mathbf{B}
 högra Cauchy-Green deformationstensorn, \mathbf{C}
 styvhetstensorn, \mathbb{C}
 hastighetsgradienttensorn, \mathbf{L}
 symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, \mathbf{D}
 antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, \mathbf{W}
 materiederivatan, D/Dt
 Eulerska töjningstensorn, \mathbf{e}
 Lagrangeska töjningstensorn, \mathbf{E}
 infinitesimala töjningstensorn, $\boldsymbol{\epsilon}$
 Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$
 första Piola-Kirchoff spänningstensorn, \mathbf{P}
 andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, \mathbf{S}
 hastighetsvektorn, \mathbf{v}
 förflyttningsvektorn, \mathbf{u}
 värmeffluxvektorn, \mathbf{q}
 spänningsvektorn, \mathbf{t}
 Cauchys högra töjningstensor, \mathbf{U}
 Cauchys vänstra töjningstensor, \mathbf{V}
 rotationstensorn, \mathbf{R}
 deformationsmappningen, $\boldsymbol{\chi}$
 temperaturen, T
 trycket, p
 skjuvspänningstensorn, $\boldsymbol{\tau}$
 dissipationsfunktionen, Φ
 viskositeten, μ
 densiteten, ρ
 Youngs modul, E
 Poissonration, ν
 skjuvmodulen, G
 värmekonduktiviteten, k
 specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
 bulkmodulen, κ

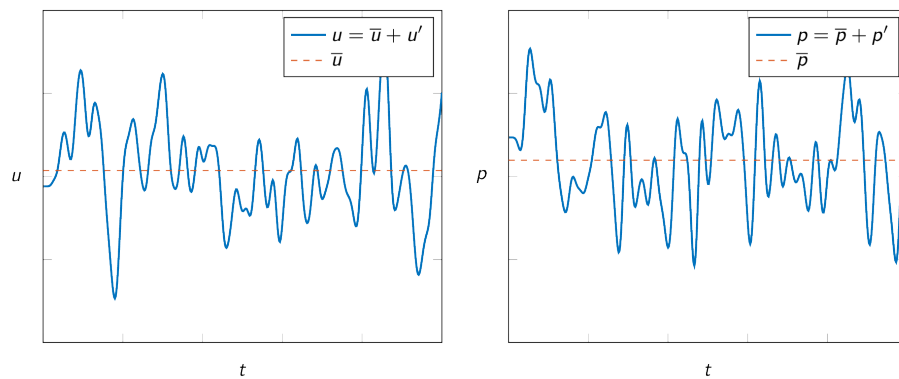
2. Teori (12p)

- a) Vid inkompressibel strömning förenklas den lokala kontinuitetsekvationen för den nuvarande konfigurationen till $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Härled ett uttryck för $\nabla \cdot \mathbf{v}$ (från den lokala kontinuitetsekvationen för den nuvarande konfigurationen) som är giltigt då man *inte* kan anta inkompressibel strömning. Vad är den fysikaliska tolkningen av det uttryck för $\nabla \cdot \mathbf{v}$ som resulterar?
- b) Givet förflyttningsfältet $u_1 = kX_2^2$, $u_2 = u_3 = 0$ kommer en enhetskvadrat $OABC$ att deformeras såsom illustrerat i figuren nedan. Ta fram uttrycket för materiallinjeelementet $d\mathbf{x}^{(2)}$ i den nuvarande konfigurationen som resulterar när $d\mathbf{X}^{(2)}$ i C i referenskonfigurationen deformeras och flyttas till C' på detta sätt.



- c) Visa att huvudspänningarna och huvudtöjningarna i en linjär isotrop elastisk solid verkar i samma riktning.
- d) En klassisk skollinjal är mycket svårare att böja om den står på högkant än om den ligger plant. Hur mycket svårare? Antag att linjalens bredd är tio gånger större än dess tjocklek och att den kan beskrivas som en isotrop elastisk solid i ett balkböjningsscenario.

- e) Turbulens har nyligen uppmärksammats i media i samband med allvarliga flygolyckor där människor ombord skadats i samband med kraftiga och oväntade fluktuationer i luftmassors rörelse. I figuren nedan visas en hastighets- och en trycksignal i en punkt i ett turbulent flöde uppdelad i tre olika delar (u , \bar{u} och u' , respektive p , \bar{p} och p'). Vad representerar dessa tre delar? I RANS-ekvationerna ingår en term $\nabla \cdot (-\rho \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle)$. Från vilken term i den lokala rörelsemängdsbalansen härstammar denna term?



- f) Ett rum värms upp av ett element. Elementet innehåller varmvatten som cirkuleras med hjälp av en pump. Systemet kan betraktas som stationärt, då pumpen arbetar vid konstant flödeshastighet och värmeförlusterna genom fönster och väggar i rummet precis balanserar den tillförda värmen genom elementet. Utgå från $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h$ och ange vilken/vilka termer som dominerar värmetransporten: 1) från vattnet till elementets insida, 2) genom elementet materialet, och 3) från elementets utsida till luften i rummet. Om konvektiva termer är relevanta, var också tydlig med att ange vad som orsakar strömningen.

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Spänningstensorn $\boldsymbol{\sigma}$ i ett (x_1, x_2, x_3) -system har följande utseende i en punkt P i den deformerade kroppen:

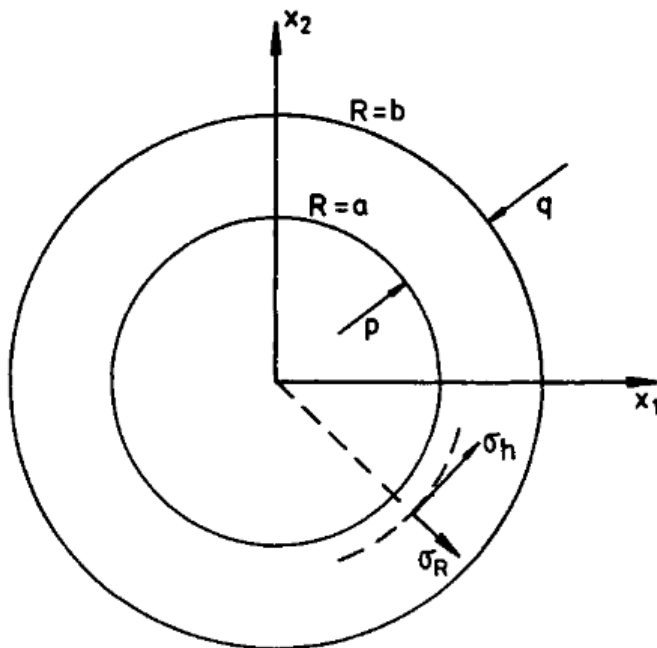
$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Bestäm spänningsvektorn $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}})$ i P på ett snitt parallellt med planet $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Bestäm även vinkeln mellan \mathbf{t} och $\hat{\mathbf{n}}$.

Ledning: För tensorn $\boldsymbol{\sigma}$ definierad ovan gäller (med godtagbar numerisk noggrannhet) att invarianterna $I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 5$, $I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \text{tr } (\boldsymbol{\sigma}^2)] = -36$, och $I_3 = |\boldsymbol{\sigma}| = -147$, samt att egenvärdena är $\lambda_1 = -5.738$, $\lambda_2 = 3.578$, $\lambda_3 = 7.161$ och egenvektorerna $\mathbf{x}^{(1)} = \{0.402, -0.533, -0.745\}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \{-0.762, -0.646, 0.052\}$, och $\mathbf{x}^{(3)} = \{0.509, -0.546, 0.666\}$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

Ett (oändligt) långt, rakt rör med cirkulärt tvärsnitt är tillverkat av ett linjärt elastiskt material. Det har en innerradie a och en yterradie b . Innehållet i röret utverkar ett jämnt tryck p över hela innerytan, och omgivningen utanför röret utverkar ett tryck q ($\neq p$) över hela den yttre ytan. I denna analys försummas inverkan av volymkrafter. Bilden nedan visar röret i tvärsnitt.



Vid symmetrisk deformation av en elastisk kropp kring x_3 -axeln på detta sätt gäller för förflyttningsvektorn \mathbf{u} att $\mathbf{u} = u(R)\hat{\mathbf{e}}_R$ ($R \neq 0$), där $R^2 = x_1^2 + x_2^2$ och $\hat{\mathbf{e}}_R$ är enhetsvektorn i radiell riktning. Mera specifikt gäller att $u(R) = AR + B/R$ (där A och B är konstanter) uppfyller Lamé-Naviers ekvationer vid jämvikt och utan volymkraft. Vidare gäller för normalspänningen σ_R att $\sigma_R = \lambda u/R + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dR}$.

Ta fram uttryck för hur deformationen av materialet i rörväggen \mathbf{u} varierar mellan a och b . Ange också huruvida materialet i väggen upplever utdragande eller komprimerande radiell spänning för det specialfall då det yttre trycket $q = 0$.

5. Strömningsproblem (7p)

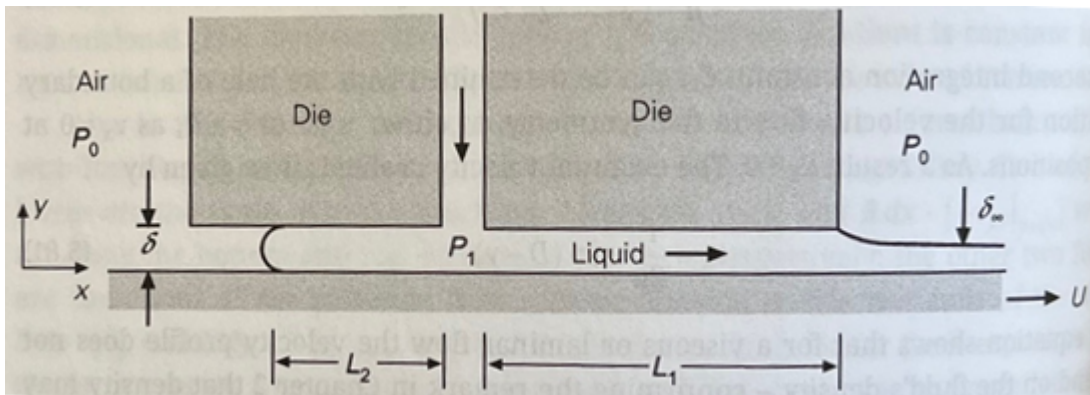
Bilden nedan illustrerar geometrin i en maskin för formbeläggning (så kallad *slot-die coating*). En högviskös Newtonsk fluid kommer mellan de två formdelarna märkta *Die* och träffar ett rullande band som rör sig till höger i bild med hastighet U . Trycket P_1 är högre än det omgivande atmosfärstrycket P_0 , vilket får fluiden att röra sig åt bägge håll (både till vänster och höger) när den når bandet. Den huvudsakliga rörelsen är dock i bandets riktning, och det slutgiltiga resultatet – en tunn beläggning på bandet (i figuren utmärkt med tjocklek δ_∞) – kan endast observeras på den högra sidan.

Antag att maskinen används vid stationära betingelser och att inga gradienter föreligger i dimensionen in/ut ur papprets plan (z -riktningen). Antag vidare att strömningen mellan den högra formdelen och bandet (sträckan som är märkt L_1 i figuren) är fullt utvecklad, inkompressibel, och laminär, samt att gravitationens inverkan på strömningen kan försummas.

a) Ta fram ett uttryck för hastighetsprofilen $v_x(y)$ i sektionen märkt L_1 som är giltigt under dessa förhållanden.

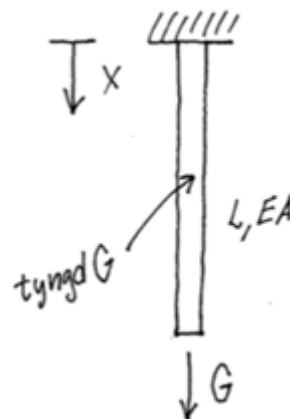
b) Det visar sig att kvoten $\frac{\delta_\infty}{\delta}$ är en funktion av parametern $\Gamma = \frac{(P_1 - P_0)\delta^2}{\mu U L_1}$.
Ta fram hur denna relation ser ut!

Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du löser uppgiften.

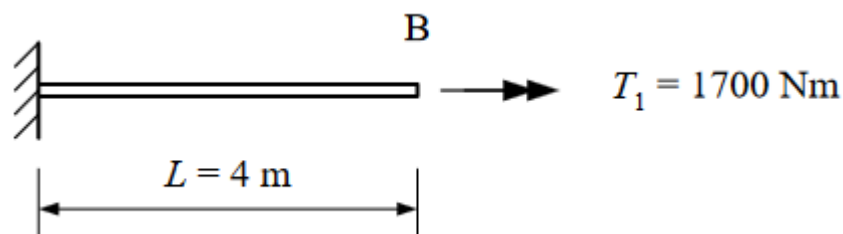


6. Approximativa lösningar: solider (10p)

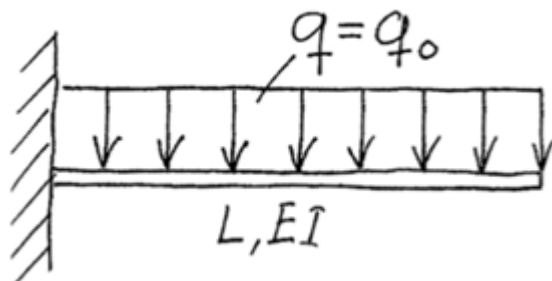
- a) En jämntjock stång tillverkad av ett linjärt elastiskt material (elasticitetsmodul E) har längd L , tvärsnittsarea A , tyngd G och är fäst i ett tak enligt figur. Stången belastas utöver sin egentyngd även med en lika stor yttre kraft G i fria änden. Vad blir stångens förlängning i x -riktningen? (4p)



- b) En axel i stål ($G = 80$ GPa) med diameter $d = 60$ mm och längd $L = 4$ m utsätts för ett vridande moment $T_1 = 1700$ Nm i sin fria ände B (se figur nedan). Beräkna vinkeländringen vid den fria änden B . (2p)

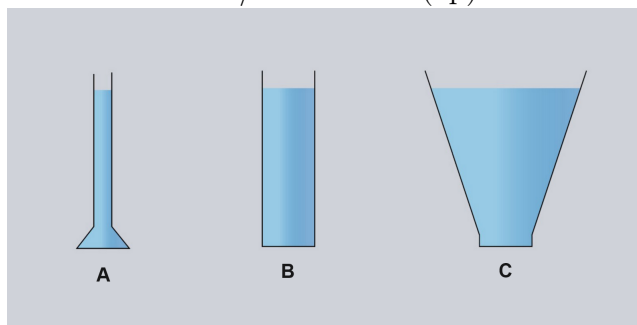


- c) En balk är fast inspänd vid en vägg och belastas med en konstant utbredd last $q(x) = q_0$ (se figur nedan). Hur stor blir nedböjningen av balken i den fria änden? (4p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) En stor vattenreservoar hålls vid konstant övertryck p jämfört med omgivande atmosfärstryck. Ett rör från reservoaren är öppet mot atmosfären och försett med en ventil. Vattenflödet ut ur reservoaren genom röret och ventilen beror av ventils inställning, och är lägre då ventilen är nära stängning än då ventilen är helt öppen. Förklara hur ventilläget kan påverka vattenflödet! (2p)
- b) Betrakta de tre kärlen A, B, och C i bilden nedan. A innehåller vatten ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$), B innehåller etanol ($\rho = 789 \text{ kg/m}^3$), och C innehåller glycerol ($\rho = 1261 \text{ kg/m}^3$). Vätskenivån är samma i alla kärl, men kärlets volym varierar enligt $V_A < V_B < V_C$. I vilket kärl är trycket högst på botten? Motivera ditt svar! Om man vill sänka ned en tryckmätare, som mäter trycket genom en öppning längst fram (se bild nedan till höger), spelar det då någon roll i vilken riktning öppningen är riktad? Varför/varför inte? (2p)



- c) Ingenjörer har testat en sfär av diameter $D = 8 \text{ cm}$ i strömmande vatten, varvid sfären upplevde en formmotståndskraft ($F = \rho V^2 D^2 C_D$) på 5 N då den relativa hastigheten mellan sfär och vatten V var 2 m/s . Detta var en nedskalad modell för vad som egentligen är en väderballong av diameter 1.5 m , som ska användas i luft under dynamiskt lika förhållanden. Vilken relativ hastighet mellan väderballong och luft motsvarar modellprovet? Vad kommer kraften på ballongen att vara under dessa förhållanden? Antag $\rho_{H_2O} = 998 \text{ kg/m}^3$, $\mu_{H_2O} = 0.001 \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho_{luft} = 1.2255 \text{ kg/m}^3$, och $\mu_{luft} = 1.78 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, \mathbf{v} är vektor, \mathbf{A} är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

\mathbf{A}^S symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $A_{ij} = A_{ji}$

\mathbf{A}^A anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M), \mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatans och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \left. \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} \right|_{M = \text{fix}} \\ \left. \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{X} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$
$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot dA \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

Töjning

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$(t_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}(\lambda_{\max} - \lambda_{\min})$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spenningsformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spenningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr} [\boldsymbol{\sigma}] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr} [\boldsymbol{\sigma}])^2 - \text{tr} ([\boldsymbol{\sigma}]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\boldsymbol{\sigma}|$$

Piola-Kirchoffs spenningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F dv + \int_{\partial \kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, dA$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbb{C}] \{\boldsymbol{\epsilon}\}, \{\boldsymbol{\epsilon}\} = [S] \{\boldsymbol{\sigma}\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotropt medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \text{ (isotropt medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \quad \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1 + \nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1 - \nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& \quad = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& \quad = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& \quad = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmetransportproblem

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h$$

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \Phi + \rho r_h$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& \quad = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v} = -p(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \Phi$$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\epsilon = \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = K_x A$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$$K_v = 2\pi r^3 h \text{ (tunnväggigt tvärsnitt)}$$

$$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2 \text{ (tjockväggigt tvärsnitt)}$$

Axels differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \quad \frac{dT}{dx} + q = 0, \quad \frac{dM}{dx} = T, \quad \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \quad \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad \sigma_x = E\epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, \quad M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: fluider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalor

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}, u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} - \rho\langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

31 maj 2024

LÖSNINGSFÖRSLAG

1. Grundläggande begrepp (5p)

- a) deformationsgradienttensorn, \mathbf{F}
- b) hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{L} = \nabla \mathbf{v}$
- c) Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$
- d) dissipationsfunktionen, Φ
- e) bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

- a) Utgående från $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ har vi att $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$. HL representerar förändringen av densiteten (egentligen en normaliserad förändring) som upplevs av en observatör som följer en materialpartikel och just nu är placerad i den punkt för vilken vi vill bestämma $\nabla \cdot \mathbf{v}$. Förändring av densiteten ger upphov till nollskild divergens i hastighetsfältet.
- b) Med givet förflyttningsfält har vi att $x_1 = kX_2^2 + X_1$, $x_2 = X_2$, och $x_3 = X_3$. Detta ger oss (ty $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$):

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 2kX_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

vilket i C ($X_1 = X_3 = 0$, $X_2 = 1$) är:

$$[F] = \begin{bmatrix} 1 & 2k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har att:

$$d\mathbf{X}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ dX_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

samt att $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F}d\mathbf{X}^{(2)}$, så att $d\mathbf{x}^{(2)} = dX_2(2k\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{\mathbf{e}}_2)$.

- c) Vi vet att riktningen av huvudspänningar och huvudtöjningar ges av egenvektorerna till spänningstensorn och töjningstensorn. Vi ombuds alltså visa att egenvektorerna för dessa två tensorer pekar i samma riktning i en linjär isotrop elastisk solid. Huvudtöjningarna ges av egenvärdena (säg Λ) och egenvektorerna (säg \mathbf{a}) till $\boldsymbol{\epsilon}$, alltså har vi $\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{a} = \Lambda\mathbf{a}$ (per definition). För linjär isotrop elastisk solid gäller att $\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}$. Vad blir $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}$? Jo: $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon}\mathbf{a} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}\mathbf{a} = 2\mu\Lambda\mathbf{a} + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{a} = (2\mu\Lambda + \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}))\mathbf{a}$. Här gäller att uttrycket inom

den sista parentesen är en skalär, dvs vektorn $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}$ är kolinjär med \mathbf{a} , vilket innebär att \mathbf{a} är en egenvektor för $\boldsymbol{\sigma}$ och $\boldsymbol{\epsilon}$. Huvudtöjningarna och huvudspänningarna för linjär isotrop elastisk solid verkar alltså i samma riktning, V.S.V.

- d) Balkböjning, och det enda som skiljer högkant från plant scenario är $I_y = \int_A z^2 dA$ (ytttröghetsmomentet). Antag tjocklek t och bredd $10t$ enligt uppgift. Plant scenario: $I_y = 2 \cdot 10t \int_0^{t/2} z^2 dz = 20t \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{t/2} = \frac{5}{6}t^4$.

Högkant: $I_y = 2 \cdot t \int_0^{5t} z^2 dz = 2t \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{5t} = \frac{250}{3}t^4$. Skillnaden är en faktor

$$\frac{250/3}{5/6} = 100.$$

- e) u (och p) representerar instantana värden, \bar{u} (och \bar{p}) representerar medelvärderade värden, och u' (och p') representerar fluktuationer (definierade som differensen mellan medelvärdet och det instantana värdet). Den omnämnda termen (divergensen av Reynoldsspänningarna) härstämmer från den konvektiva (icke-linjära) termen $(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}$; efter Reynoldsdekomponering och medelvärdering av ekvationerna kvarstår just denna term.
- f) De dominerande termerna är: 1) påtvingad konvektion (driven av tryckgradient som åstadkommes av pumpen) $\mathbf{v} \cdot \nabla T$; 2) konduktion (värmeledning) $\nabla \cdot (k \nabla T)$; 3) naturlig konvektion (driven av densitetsgradienter i luften [volymkraften i rörelsemängdsbalansen] på grund av uppkomna temperaturgradienter pga värmetransporten) $\mathbf{v} \cdot \nabla T$.

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Med givna data:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Snitt parallellt med planet $2x_1 + x_2 - x_3 = 1$. Vi behöver alltså enhetsytnormalen $\hat{\mathbf{n}}$. Planet $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ har normalen $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$, alltså: $\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\{2, 1, -1\}$.

Cauchy's spänningsformel ger $\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$:

$$[\mathbf{t}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{3}{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Vinkeln mellan två vektorer erhålles ur skalärprodukten: $\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \|\mathbf{t}\| \|\hat{\mathbf{n}}\| \cos \theta$, så att

$$\theta = \arccos \frac{\sqrt{3/2}\{1, 3, 1\} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\{2, 1, -1\}}{\sqrt{33/2}} \approx 1.1 \text{ rad } (61^\circ).$$

4. Elasticitetsproblem (5p)

Under de givna förutsättningarna vet vi att $\mathbf{u} = u(R)\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}}$, samt att $u(R) = AR + B/R$ och $\sigma_R = \lambda u/R + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dR}$.

För att ta fram \mathbf{u} behöver vi alltså bestämma A och B . Dessa bestäms ur randvillkor. Tillämpliga randvillkor är:

$$\begin{aligned}\sigma_R &= -p \text{ vid } R = a \\ \sigma_R &= -q \text{ vid } R = b\end{aligned}$$

För givet $u(R)$ gäller att $\frac{du}{dR} = A - B/R^2$, så att: $\sigma_R = \lambda u/R + (\lambda + 2\mu)\frac{du}{dR} = 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/R^2$.

Randvillkoren ger nu ett ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta:

$$\begin{aligned}2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/a^2 &= -p \\ 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B/b^2 &= -q\end{aligned}$$

från vilket vi erhåller:

$$A = \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p - b^2 q}{2(b^2 - a^2)}, \quad B = \frac{1}{\mu} \frac{a^2 b^2 (p - q)}{2(b^2 - a^2)}$$

Vi kan nu ta fram:

$$u(R) = \frac{1}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p - b^2 q}{2(b^2 - a^2)} R + \frac{1}{\mu} \frac{a^2 b^2 (p - q)}{2(b^2 - a^2)} \frac{1}{R},$$

och

$$\sigma_R = \frac{a^2 p - b^2 q}{2(b^2 - a^2)} - \frac{a^2 b^2 (p - q)}{2(b^2 - a^2)} \frac{1}{R^2}.$$

$$\text{För } q = 0 \text{ blir } \sigma_R = \frac{a^2 p}{b^2 - a^2} \left[1 - \frac{b^2}{R^2} \right].$$

Eftersom $a < b$ och $R \leq b$ så måste vi ha $\sigma_R \leq 0$ i materialet, dvs materialet upplever en komprimerande radiell spänning.

5. Strömningsproblem (7p)

a)-uppgiften:

N-S i x -riktningen:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

Antag: laminärt, inkompressibelt, Newtonsk fluid, stationärt, försumbar gravitation, fullt utvecklad strömning. I så fall:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x}$$

Integrera två gånger + tillämpa randvillkor:

$$\begin{aligned} v_x(y=0) &= U \\ v_x(y=\delta) &= 0 \end{aligned}$$

för att bestämma integrationskonstanterna, och vi erhåller:

$$v_x = U \left(1 - \frac{y}{\delta} \right) - \frac{y(\delta - y)}{2\mu} \frac{dp}{dx}$$

b)-uppgiften:

Nu söker vi kvoten $\frac{\delta_\infty}{\delta}$. Vi behöver ett samband mellan vad som händer i fluiden i L_1 -segmentet och utanför till höger. Vid stationära betingelser måste vi ha samma massflöde i bägge dessa segment. Eftersom densiteten är konstant räcker det att sätta volymflödena lika. Hastighetsprofilen i L_1 -segmentet är känd från a)-uppgiften, och hastigheten i filmen till höger är U genom hela filmen (bandet rör sig med hastigheten U och den inbromsande väggen har försvunnit på ovansidan, vi kan alltså anta $\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx 0$ vid fasgränssytan, och det föreligger inte längre någon tryckskillnad i x -riktning då trycket är P_0 ovanför hela fasgränssytan och bandet är horisontellt).

$$\int_0^\delta v_x dy = \int_0^{\delta_\infty} U dy$$

Insättning av uttryck från a)-uppgiften och integrering ger:

$$\frac{1}{2}U\delta - \frac{1}{12\mu} \frac{dp}{dx} \delta^3 = U\delta_\infty$$

vilket innebär:

$$\frac{\delta_\infty}{\delta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \frac{dp}{dx} \frac{\delta^2}{\mu U}$$

Vill vi identifiera den i uppgiften angivna parametern Γ så behöver vi inse att tryckgradienten dp/dx (en konstant) kan beskrivas som $dp/dx = \Delta P/\Delta x = (P_0 - P_1)/L_1$. Med detta infört kan vi skriva:

$$\frac{\delta_\infty}{\delta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \Gamma$$

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

a) Stångens differentialekvation:

$$-\frac{d}{dx} \left[EA \frac{du}{dx} \right] = K_x A$$

K_x är volymlast [N/m³], A är area [m²], produkten är kraft/längd [N/m], med andra ord kommer egentyngd in som:

$$K_x A = G/L$$

Så att:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{G}{LEA}x + C_1$$

$$u(x) = -\frac{G}{LEA} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

Randvillkor:

$$u(0) = 0$$

$$\sigma(L) = G/A$$

vilket ger:

$$C_1 = \frac{2G}{EA}, C_2 = 0.$$

dvs:

$$u(x) = \frac{GL}{EA} \left(2 - \frac{x}{2L} \right) \frac{x}{L}$$

b) Relation mellan yttre vridande moment och vinkelförändring:

$$M_2^e = \frac{GK_v}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

där $G = 80$ GPa, $L = 4$ m, $M_2^e = T_1 = 1700$ Nm, $\varphi_1^e = 0$, $K_v = \pi r^4/2$ med $r = d/2 = 30$ mm. Sätt in och vi erhåller $\varphi_2^e \approx 3.83^\circ$.

c) Elastiska linjens ekvation:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

E och I_y är oberoende av x . Lasten är konstant $-q_0$. Integrera fyra gånger:

$$\frac{d}{dx} \left(EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = -q_0 x + C_1$$

$$EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

$$EI_y \frac{dw}{dx} = -q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI w = -q_0 \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Randvillkor:

$$w(0) = 0 \text{ ger } C_4 = 0$$

$$dw/dx = 0 \text{ vid } x = 0 \text{ ger } C_3 = 0$$

$$T = dM/dx = 0 \text{ vid } x = L \text{ ger } C_1 = q_0 L$$

$$M = 0 \text{ vid } x = L \text{ ger } C_2 = -\frac{1}{2} q_0 L^2$$

så att:

$$EIw = -\frac{q_0x^4}{24} + q_0L\frac{x^3}{6} - q_0L^2\frac{x^2}{4}$$

$$\text{Sökt är } -w(L) = \frac{q_0L^4}{8EI}$$

7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Ställ upp Bernoullis ekvation med förluster. Vi kan tänka oss att följa en strömlinje från reservoaren genom ventilen till rörets mynning. Eventuell höjdskillnad är fix och kan inte påverkas av ventilläget. Trycken är givna och hålls konstanta, och kan därför inte heller påverkas av ventilen. Hastigheten i reservoaren är ≈ 0 då reservoaren är stor (mycket större tvärsnitt för flöde än i röret). Sålunda erhåller vi att hastigheten vid rörets mynning beror av förlusttermen. Vad ventilen gör är alltså att inducera förluster av kinetisk energi (dissipation till inre energi i fluiden), och ventilläget påverkar hur stora dessa förluster är. Helt öppen = små förluster, nästan stängd = stora förluster.
- b) Trycket i en stillastående fluid varierar endast i den koordinatriktning i vilken gravitationen verkar (balans råder mellan volymkrafter och tryckkrafter): $\frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$. Sålunda har varken form eller storlek på kärl någon påverkan på tryckfältet, endast vätskehöjd och densitet. Då vätskenivån är densamma i alla kärl och trycket vid vätskeytan också är detsamma, måste trycket på botten vara störst i C och lägst i B, A intar ett mellanläge. Eftersom trycket är en skalär finns inget riktningsberoende i trycket. Om det inte finns någon rörelse i fluiden spelar det då ingen roll åt vilket håll öppningen på tryckmätaren är riktad.
- c) Dynamiskt lika förhållanden innebär att Reynoldstalet ska vara samma i test och i verkligt fall: $Re_1 = \frac{\rho_1 U_1 D_1}{\mu_1} = Re_2 = \frac{\rho_2 U_2 D_2}{\mu_2}$. I så fall är C_D (den dimensionslösa kraften) också densamma i test och i verkligt fall: $C_{D,1} = \frac{F_1}{\rho_1 U_1^2 D_1^2} = C_{D,2} = \frac{F_2}{\rho_2 U_2^2 D_2^2}$. Vi har att $Re_1 \approx 1.6 \cdot 10^5$, från vilket vi kan lösa ut $U_2 \approx 1.55$ m/s. Vi har att $C_{D,1} \approx 0.196$, från vilket vi kan lösa ut $F_2 \approx 1.3$ N.