MODELLTENTA 2
Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 2 juni 2023 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelsidigt) papper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 23:e juni 2023 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:
Betyg U $<$ 20p ; 20p $\leq$ Betyg 3 $<$ 30p ; 30p $\leq$ Betyg 4 $<$ 40p ; Betyg 5 $\geq$ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

a) Vektor som karaktäriserar en materialpartikels positionsförändring från referenskonfigurationen till den nuvarande konfigurationen

b) Materialegenskap som multiplicerad med den lokala temperaturgradienten (tagen negativ) returnerar den lokala värmefluxvektorn

c) Tvåpunktstensor som beskriver förhållandet mellan ett materiallinjeelement före en deformation och den linje som samma material beskriver efter deformationen

d) Tensor som ingår i det konvektiva bidraget till den totala materialaccelerationen (det vill säga det konvektiva bidraget i $D\mathbf{v}/Dt$)

e) Materialegenskap som, när den multipliceras med böjtröghetsmomentet I_y (som för en balk beskriver tvärsnittets förmåga att ta hand om den normalspänning som uppstår när balken böjs), representerar en balks böjstyvhet (balkens förmåga att motstå deformationen)

deformationsgradienttensorn, $\mathbf{F}$
förflyttningsgradienttensorn, $\mathbf{H}$
vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, $\mathbf{B}$
högra Cauchy-Green deformationstensorn, $\mathbf{C}$
styvhetstensorn, $\mathbb{C}$
hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{L}$
symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{D}$
antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, $\mathbf{W}$
materiederivatan, D/Dt
Eulerska töjningstensorn, $\mathbf{e}$
Lagrangeska töjningstensorn, $\mathbf{E}$
infinitesimala töjningstensorn, $\boldsymbol{\epsilon}$
Cauchys spänningstensor, $\boldsymbol{\sigma}$
första Piola-Kirchoff spänningstensorn, $\mathbf{P}$
andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, $\mathbf{S}$
hastighetsvektorn, $\mathbf{v}$
förflyttningsvektorn, $\mathbf{u}$
värmefluxvektorn, $\mathbf{q}$
spänningsvektorn, $\mathbf{t}$
Cauchys högra töjningstensor, $\mathbf{U}$
Cauchys vänstra töjningstensor, $\mathbf{V}$
rotationstensorn, $\mathbf{R}$
deformationsmappningen, $\boldsymbol{\chi}$
temperaturen, T
trycket, p
skjuvspänningstensorn, $\boldsymbol{\tau}$
dissipationsfunktionen, Φ
viskositeten, μ
densiteten, ρ
Youngs modul, E
Poissonration, ν
skjuvmodulen, G
värmekonduktiviteten, k
specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

a) Givet hastighetsfältet $v_1 = kx_2$, $v_2 = v_3 = 0$, ta fram $\mathbf{D}$ (den symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn = deformationshastighetstensorn).

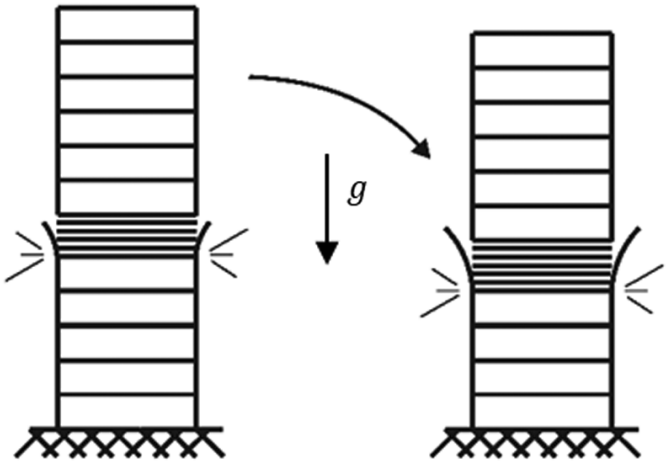
b) Utgå från sambandet $\frac{D}{Dt}(\rho J) = 0$, där $J = |\mathbf{F}|$, materiederivatan av J är $\frac{DJ}{Dt} = J(\nabla \cdot \mathbf{v})$ och $\mathbf{F}$ är deformationsgradienttensorn, och visa att detta leder till den lokala rumsliga formen av massbalansen (kontinuitetsekvationen).

c) Cauchys spänningsformel säger att $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Vad är den fysikaliska tolkningen av denna formel?

d) När man löser elasticitetsproblem behöver man randvillkor i varje punkt på varje rand. Spänningsfördelningar kan vara svåra att veta punktvis; det kan t ex vara lättare att ha kunskap om medelkraften (= den integrerade spänningen över en yta). Vad händer om man ändrar ett randvillkor från en punktvis specifikation till en statistiskt ekvivalent beskrivning (= samma nettokraft/nettomoment)? Vilka problem kan uppstå och vad kan man säga om dess konsekvenser?

e) Kollapsen av World Trade Center-tornen den 11 september 2001 skedde till följd av en kedja av händelser. Flyplanen skadade bärande element i konstruktionen då de flög in i byggnaderna. Därefter initierades enorma bränder då flygplanens bränsle antändes. När vinkelklämmorna som höll fast bjälklaget på de värst brinnande våningarna gick sönder på grund av materialpåverkan vid branden, föll den ovan belägna delen av byggnaden ned på den underliggande. Konstruktionen var sådan att denna typ av belastning inte skulle få byggnaden att rasa så länge det var färre än 6 våningsplan ovanför det fallerande planet, men i bägge fallen hade flygplanen träffat lägre (WTC1 hade 12 ovanliggande våningsplan, WTC2 hade 29). Detta initerade en kedjereaktion där våningsplan efter våningsplan krossades av den ovanifrån fallande delen av byggnaden (se figur nedan). Den totala vikten av varje byggnad var cirka 500,000 ton, och när kollapsen väl börjat var den över inom mindre än 10 sekunder. Det har ibland sagts att det i sammanhanget var tur att tornen kollapsade rakt nedåt och inte välte utåt över intilliggande byggnader. Det är dock ett mycket osannolikt scenario att en så

pass tung byggnad skulle tippa över på grund av en flygplanskollision. Försök förklara varför detta inte är sannolikt!



f) En tidsberoende hastighetskomponent i ett turbulent flöde v_x kan delas upp som $v_x = \bar{v_x} + v_x'$ (så kallad Reynoldsdekomponering). Vad representerar v_x'? Hur kan man få tillgång till $\bar{v_x}$ om man har tillgång till v_x?

3. Spännings- och töjningstillstånd (4p)

Töjningstensorn $\mathbf{E}$ i ett (x_1, x_2, x_3)-system har följande utseende:

$$[E] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ mm/mm}$$

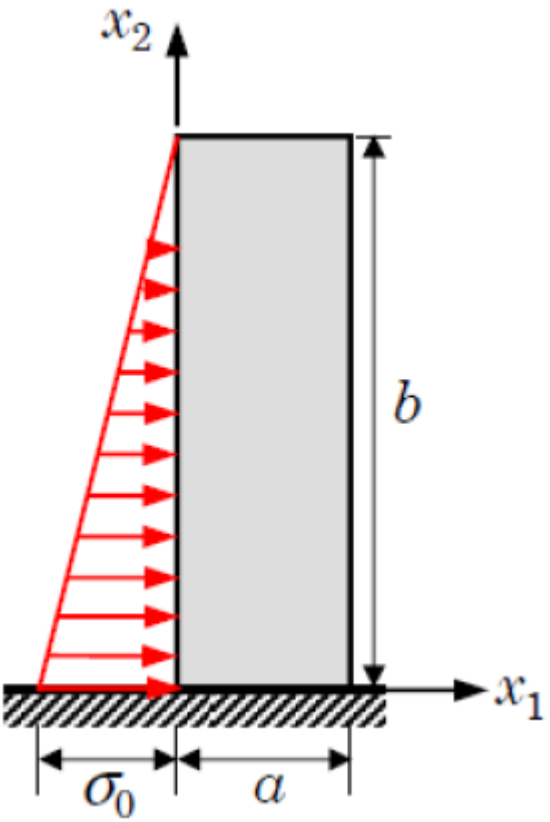
Identifiera de huvudsakliga töjningarna, det plan som är associerat med den maximala huvudsakliga töjningen samt den maximala skjuvtöjningen.

<u>Ledning:</u> För tensorn $\mathbf{E}$ definierad ovan gäller (med godtagbar numerisk noggrannhet) att invarianterna $I_1 = \text{tr } \mathbf{E} = 7$, $I_2 = \frac{1}{2}\left[(\text{tr } \mathbf{E})^2 - \text{tr}\,(\mathbf{E}^2)\right] = -4$, och $I_3 = |\mathbf{E}| = -48$, samt att egenvärdena är $\lambda_1 = 6.47$, $\lambda_2 = -2.47$, $\lambda_3 = 3$ och egenvektorerna $\mathbf{x}^{(1)} = \{0.851, -0.526, 0\}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \{0.526, 0.851, 0\}$, och $\mathbf{x}^{(3)} = \{0, 0, 1\}$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

a) Betrakta en linjär isotrop elastisk solid med förskjutningsfältet $u_1 = u_1(x_1, t)$, $u_2 = u_3 = 0$ och utan några aktiva volymkrafter. Ta fram den partiella differentialekvation som u_1 måste uppfylla för att kunna vara en möjlig lösning till de gällande rörelselagarna. (3p)

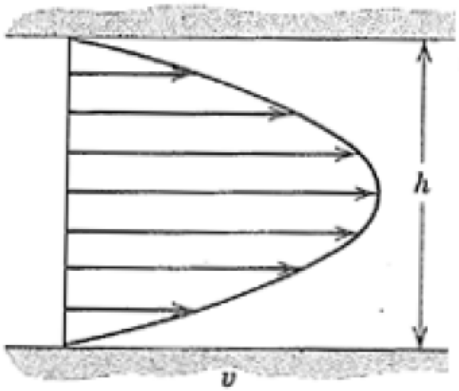
b) Föreslå tillämpliga randvillkor för de fyra sidorna av den gråfärgade kroppen i figuren nedan för ett elasticitetsproblem. (2p)

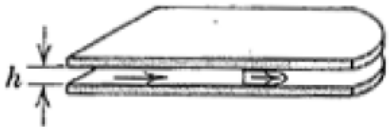


(OBS: Notera att delfråga (a) och (b) inte hänger ihop och därför ej beror av varandra!)

5. Strömningsproblem (7p)

Betrakta strömningen mellan två (mycket stora) parallella plattor med mellanrummet $h = 1$ mm. Om vorticiteten $\boldsymbol{\omega}$ vid övre väggen är $\{0, 0, -10\}$ s^{-1}, vad är då den maximala hastigheten mellan plattorna (i m/s)? Strömningen är laminär och inkompressibel och drivs av en tryckgradient. Fluiden är Newtonsk. Gravitationens inverkan är försumbar. Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du tar fram ditt svar. Använd ett koordinatsystem där x-riktningen är i huvudströmriktningen, y-riktningen är uppåt mellan plattorna och z-riktningen är ut ur papprets plan.





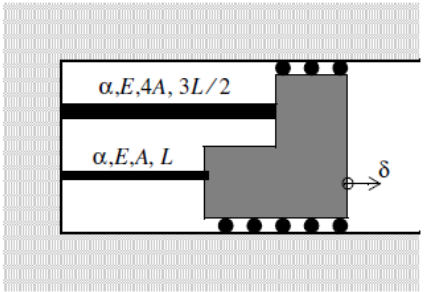
Materialdata:
Vatten 5°C: $\rho = 1000$ kg/m^3, $\mu = 0.001$ Pa,s

För vorticiteten gäller:

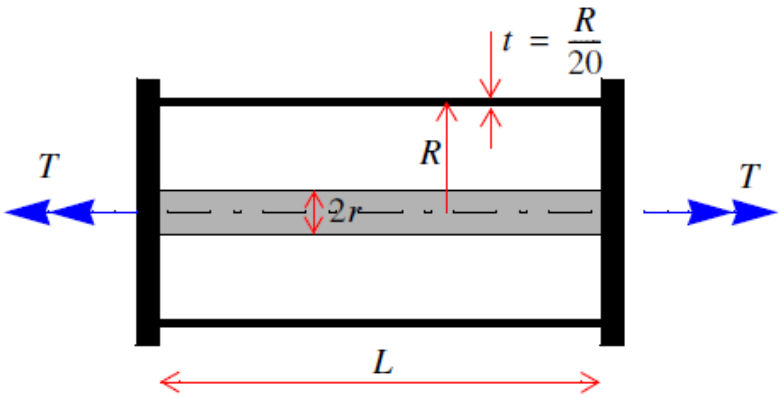
$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

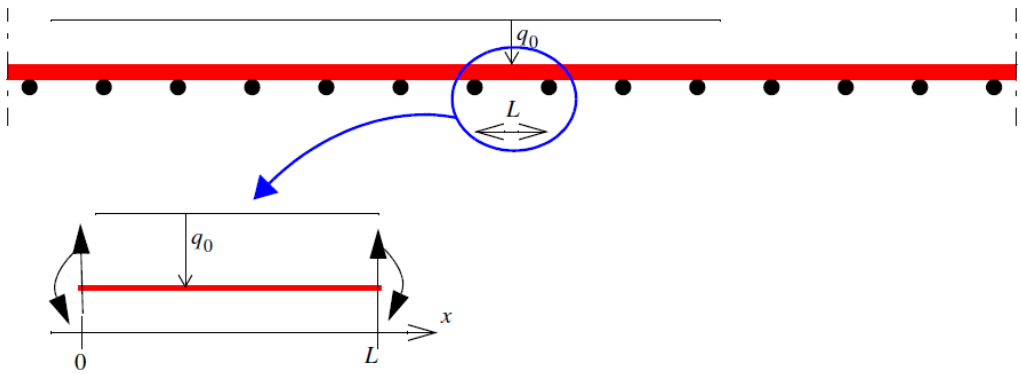
a) En vagn är rullagrad så att den är lättrörlig i horisontalled. Den hålls på plats med två parallella stänger som är tillverkade av ett linjärt termo-elastiskt material; elasticitetsmodulen är E och längdutvidgningskoefficienten α. Ena stången har tvärsnittsarea A och längd L; den andra har tvärsnittsarea $4A$ och längd $3L/2$ (se figur). Vid en temperatur T_0 är hela konstruktionen spänningslös. Stängerna värms sedan till $T_0 + \Delta T$. Deformationer hos vagnen försummas. Bestäm stångkrafterna samt den resulterande horisontalförskjutningen δ av vagnen till följd av temperaturändringen. (5p)



b) Axelkonstruktionen i figuren nedan består av en central massiv axel med radien r och ett omgivande tunnväggigt rör med medelradie R och godstjocklek $t = R/20$. Delarna är tillverkade av ett linjärt elastiskt material med skjuvmodul G, och de är förenade med gavlar som kan betraktas som stela. Bestäm radieförhållandet R/r så att snittmomenten i rör och axel blir lika stora, då konstruktionen belastas med ett vridande moment T. (3p)



c) En lång brobana vilar på ett stort antal stöd så att en serie spann med längden L bildas. Belastningen utgörs av egentyngden som kan antas jämnt fördelad med intesiteten q_0 (kraft/längd) enligt figur nedan. Ovanför varje stöd är $M = q_0 L^2/12$ och $T = 0$. Bestäm snittmomentet $M(x)$ i ett spann och ange speciellt det (till beloppet) största moment. Om $w(x)$ betecknar balkens transversalförskjutning är det här rimligt att göra antagandet att rotationen $\frac{dw}{dx}$ är noll vid stöden. (2p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

a) En fluid strömmar i ett långt rör av konstant diameter. Mitt på röret finns en ventil. Före och efter ventilen är fluidens hastighet densamma. Gäller detsamma för fluidens tryck? Varför/varför inte? Motivera ditt svar. (2p)

b) Betrakta följande experiment: En 0,5L mjuk petflaska fylls med normalt mycket vatten (lite luft kvar längst upp). Därefter placerar man en liten sten inuti en ballong som blåses upp litegrann. Ballongen med stenen förs ned i flaskan och korken skruvas på. Om flaskan lämnas stående flyter ballongen upp till vattenytan längst upp i flaskan. Om man däremot klämmer på flaskan sjunker ballongen nedåt mot botten (se bild härinunder). Ju hårdare man klämmer, desto längre ned i flaskan hamnar ballongen. Förklara detta experiment! (2p)

c) Värmefluxet från en fluid till rörväggen när fluiden strömmar i ett rör (på grund av en pålagd tryckgradient) kan karaktäriseras av en variabel kallad värmeöverföringskoefficienten, h [W/m^2,K]. Experimentellt kan h visas bero på rördiametern D, fluidens materialdata (densiteten ρ, viskositeten μ, värmekapaciteten c_p, och värmekonduktiviteten k) samt medelhastigheten av fluiden i röret U. Dimensionsanalys visar

att det finns tre dimensionslösa tal som tillsammans beskriver denna situation: $Nu = \frac{hD}{k}$, $Re = \frac{\rho DU}{\mu}$ och $Pr = \frac{\mu c_p}{k}$. En ingenjör vill mäta värmeöverföringen från en fluid till ett rör (d v s hen är intresserad av h) och samla data på en form som är användbar också för andra rördimensioner och hastigheter. Ge förslag på hur en sådan undersökning bör genomföras! Ett av de tre dimensionslösa talet beror inte på den aktuella strömningssituationen utan bara på valet av fluid - vilket? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, $\mathbf{v}$ är vektor, $\mathbf{A}$ är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau}\det\,\mathbf{A} = \det\,\mathbf{A}\ \mathrm{tr}\left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau}\mathbf{A}^{-1}\right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{S}} + \mathbf{A}^{\mathrm{A}} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)$$

$\mathbf{A}^{\mathrm{S}}$ symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $A_{ij} = A_{ji}$

$\mathbf{A}^{\mathrm{A}}$ anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \tfrac{1}{3}\ \mathrm{tr}\ (\mathbf{A})\mathbf{I}$$

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{tr}\ \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A}\ dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ da$$

Kinematik

Definitioner

$\mathbf{X} = \boldsymbol{\chi}_0(M)$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(M)$, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$

$\mathbf{v} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(M)}{\partial t}$, $\mathbf{a} = \dfrac{\partial \mathbf{v}(M,t)}{\partial t}$

$\phi = \check{\phi}(M,t) = \hat{\phi}(\mathbf{X},t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x},t)$

Materiederivatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \dfrac{\partial \check{\phi}(M,t)}{\partial t}\Big|_{\mathrm{M\,=\,fix}} \\[2ex] \dfrac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X},t)}{\partial t}\Big|_{\mathbf{x}\,=\,\mathrm{fix}} \\[2ex] \dfrac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla\tilde{\phi}\cdot\mathbf{v} \end{cases}$$

$\mathbf{a} = \dfrac{D\mathbf{v}}{Dt} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L}\cdot\mathbf{v} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

$\mathrm{tr}\ \mathbf{L} = \nabla\cdot\mathbf{v}$

$\mathbf{L} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)$, $\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{\mathrm{T}}\right)$

Förflyttning och deformation

$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$

$\mathbf{F} = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$

$\mathbf{H} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$J = \det\ \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$

$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$

$da\ \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^{\#}\ dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J\ \mathbf{F}^{-\mathrm{T}} \cdot dA\ \hat{\mathbf{N}}$

$dv = JdV$

Töjning

$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$

$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{F}$

$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$

$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{C} - \mathbf{I}\right)$

$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}\right)$

Spänningar

Spänningsvektorer

$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$

$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$

$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}},\ t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$

$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn},\ |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$

$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$

Cauchys lemma

$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$

Cauchys spänningsformel

$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spänningstensor

$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$I_1 = \mathrm{tr}\ [\sigma] = \sigma_{ii}$

$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\ [\sigma])^2 - \mathrm{tr}\ ([\sigma]^2)\right] = \frac{1}{2}(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$

$I_3 = |\sigma|$

Piola-Kirchoffs spänningstensorer

$\mathbf{T}\ dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ dA = \mathbf{t}\ da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}\ da$

$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{1}{J}\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}}$

$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$

$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\sigma} = \dfrac{1}{J}\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}$

Mekaniklagar

Massa

$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt}\int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt}\int_{\kappa} \rho dv = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt}\int_{\kappa} \rho F \; dv = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\kappa} \rho F \; dv + \int_{\partial\kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \; da$$

Rörelsemängd

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{B}} d\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \; dv$$

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\boldsymbol{\mathcal{P}} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} \; dv$$

$$\frac{D\boldsymbol{\mathcal{P}}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\boldsymbol{\mathcal{H}}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \; dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \; da$$

$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}^o_B + \mathbf{M}^o_S = \int_\kappa \mathbf{r}_o \times \rho\mathbf{b}\ dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t}\ da$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b}\ dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}}\ dA$

$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho\mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho\mathbf{b}\ dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t}\ dA$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$\frac{D}{Dt} \int_\kappa \rho\mathbf{v} dv = \int_\kappa \rho\mathbf{b}\ dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t}\ da$

$\frac{D}{Dt} \int_\kappa \mathbf{r}_o \times \rho\mathbf{v} dv = \int_\kappa \mathbf{r}_o \times \rho\mathbf{b}\ dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t}\ da$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$

$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^{\mathrm{T}} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^{\mathrm{T}}$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$

$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\sigma}$

Energi

$\frac{D}{Dt}(K + U) = W + Q_h$

$K = \frac{1}{2} \int_\kappa \rho\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv,\ U = \int_\kappa e\ dv$

$W = \int_\kappa \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da,\ Q_h = -\int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_\kappa \rho r_h dv$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_\kappa \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}]\,\{\epsilon\},\ \{\epsilon\} = [S]\,\{\sigma\},\ \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \text{ tr } (\boldsymbol{\epsilon})\ \mathbf{I} = \kappa \text{ tr } \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)},\ \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},\ 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \tfrac{1}{3}\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^{\mathrm{T}}\right]$

$\tau \propto \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{dv_x}{dy}$, $\tau_{yx} = \mu\dfrac{dv_x}{dy}$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$

Fouriers lag

$\mathbf{q} = -\mathbf{k}\cdot\nabla T$ (anisotropt medium)

$\mathbf{q} = -k\nabla T$ (isotropt medium)

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)$

$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)$

$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\mathrm{T}}\right)$

$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}$, $\rho_0 \approx \rho$

$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$

Töjning-förflyttning

$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}\left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{T}}\right]$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial y} + \dfrac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial x} + \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_x}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_y}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu}\nabla\left[\nabla\left(\mathrm{tr}\ \boldsymbol{\sigma}\right)\right] = -\frac{\nu \rho_0}{1-\nu}\left(\nabla \cdot \mathbf{f}\right)\mathbf{I} - \rho_0\left[\nabla \mathbf{f} + \left(\nabla \mathbf{f}\right)^{\mathrm{T}}\right]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \left[\nabla \left(\text{tr } \boldsymbol{\sigma} \right) \right] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$
$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$
$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho f_y=\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z=\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0$$

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-2\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial p}{\partial r}+\rho f_r$$
$$=\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta)\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}+2\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial p}{\partial \theta}+\rho f_\theta$$
$$=\rho\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_r v_\theta}{r}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

$$\mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho f_z$$
$$=\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1}=\frac{\partial p}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial p}{\partial x_3}=-\rho g$$

Värmetransportproblem

$$\rho c_p\frac{DT}{Dt}=\nabla\cdot(k\nabla T)+\rho r_h$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_x\frac{\partial T}{\partial x}+v_y\frac{\partial T}{\partial y}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\rho r_h$$

1D-problem

$$\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{\alpha v^2}{2}+gz\right)_{\text{out}}(\rho Q)_{\text{out}}-\left(e+\frac{p}{\rho}+\frac{\alpha v^2}{2}+gz\right)_{\text{in}}(\rho Q)_{\text{in}}$$
$$=W_{\text{shaft}}+H_{\text{net}}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$\mathbf{\Phi} = \tau : \mathbf{D}$

$$\Phi = 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right]$$
$$+ \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$N = P$, $\bar{\epsilon} = \delta / L$, $\sigma = E\bar{\epsilon}$, $N = \sigma A$

$$\begin{bmatrix} P_1^{\text{e}} \\ P_2^{\text{e}} \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{\text{e}} \\ u_2^{\text{e}} \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\epsilon = \frac{du}{dx},\ \sigma = E\frac{du}{dx},\ N = EA\frac{du}{dx}$$
$$-\frac{d}{dx}\left(EA\frac{du}{dx} \right) = K_x A$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r,\ \gamma = \frac{r}{L}\left(\varphi(L) - \varphi(0)\right) = \frac{r}{L}\left(\varphi_2^{\text{e}} - \varphi_1^{\text{e}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^{\mathrm{e}} \\ M_2^{\mathrm{e}} \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^{\mathrm{e}} \\ \varphi_2^{\mathrm{e}} \end{bmatrix}$$

$K_v = 2\pi r^3 h$ (tunnväggigt tvärsnitt)

$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2$ (tjockväggigt tvärsnitt)

Axelns differentialekvation

$$\frac{d}{dx}\left(GK_v \frac{d\varphi}{dx}\right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0,\ \frac{dT}{dx} + q = 0,\ \frac{dM}{dx} = T,\ \frac{d^2M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx},\ \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2w}{dx^2}z,\ \sigma_x = E\epsilon_x = -E\frac{d^2w}{dx^2}z,\ M = -EI_y\frac{d^2w}{dx^2}$$

$I_y = \int_A z^2 dA$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y \frac{d^2w(x)}{dx^2}\right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: fluider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalor

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4},\ \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2},\ u_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}',\ p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot \left(-\bar{p}\ \mathbf{I} + 2\mu\bar{\mathbf{D}} - \rho\langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle\right) = \rho\frac{D\bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

Lösningar till exempelproblem i kontinuummekanik (MMS260)
Övning 16: Lösningar modelltenta 2

Johannes Hansson (johanneh@chalmers.se)

22 maj 2023

Allmän information

Detta är mina minnesanteckningar för de uppgifter jag gick igenom på räkneövningen. Om du hittar fel eller har förslag på förbättringar får du gärna mejla mig på johanneh@chalmers.se. Feedback uppskattas.

Fråga 3

- $$[E] = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{mm/mm}$$

- Från ledningen vet vi dessutom att vi har egenvärdena

$$\begin{cases} \lambda_1 = 6.47\,\text{mm/mm} \\ \lambda_2 = -2.47\,\text{mm/mm} \\ \lambda_3 = 3\,\text{mm/mm} \end{cases} \tag{1}$$

  och motsvarande egenvektorer

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.851 \\ -0.526 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.526 \\ 0.851 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Första deluppgiften är att vi ska hitta de huvudsakliga töjningarna. Detta är inget annat än egenvärdena till töjningstensorn. Dessa har vi smidigt nog redan fått från ledningen i uppgiften, och svaret återfinns i ekvation (1)

- Andra deluppgiften går ut på att hitta det plan som är associerat med den maximala huvudsakliga töjningen. Från inspektion i ekvation (1) ser vi att λ_1 representerar den maximala huvudsakliga töjningen. För att hitta det plan som är associerat med denna töjning kollar vi på motsvarande egenvektor $\mathbf{x}^{(1)}$. Vi låter nu denna vektor vara enhetsnormalen till det plan vi letar efter, så vi får

$$\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{x}^{(1)} = 0.851\hat{\mathbf{e}}_1 - 0.526\hat{\mathbf{e}}_2 + 0\hat{\mathbf{e}}_3$$

- Slutligen ska vi beräkna den maximala skjuvtöjningen, vilket vi kan göra med ekvation (3.4.40) i boken

$$(E_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}\left(\mu_{\max} - \mu_{\min}\right) \tag{3.4.40}$$

  där $\mu_{\max}$ och $\mu_{\min}$ representerar de största, respektive minsta huvudsakliga töjningarna. Dessa två är inget annat än våra egenvärden λ.

- Vi har redan identifierat den maximala huvudsakliga töjningen som λ_1, alltså har vi att

$$\mu_{\max} = \lambda_1$$

  På motsvarande sätt kan vi identifiera att den minsta huvudsakliga töjningen är

$$\mu_{\min} = \lambda_2$$

- Insättning i ekvation (3.4.40) ger då

$$(E_{ns})_{\max} = \frac{1}{2}\left(6.47\,\mathrm{mm/mm} - (-2.47\,\mathrm{mm/mm})\right) = 4.47\,\mathrm{mm/mm}$$

  vilket är vårt svar på den maximala skjuvtöjningen.

Fråga 4

a)

- Från uppgiften har vi det givna förskjutningsfältet

$$\begin{cases} u_1 = u_1(x_1, t) \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

- Vi börjar med att ställa upp Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{2}$$

som är jämviktsekvationer för elasticitet i termer av förskjutning $\mathbf{u}$. λ och μ är Lamékonstanterna, ρ_0 är en densitet och $\mathbf{f}$ representerar volymskrafter. I den här uppgiften ska vi nu använda det vi vet om $\mathbf{u}$ för att komma fram till en förenklad version av ekvationen.

- Från uppgiften vet vi att vi inte har några aktiva volymkrafter, så

$$\mathbf{f} = 0 \implies$$

vilket gör att tredje termen i ekvation (2) försvinner och vi har kvar

$$\mu \boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \tag{3}$$

- För att ytterligare förenkla ekvationen ska vi nu utveckla vektoroperationerna, med de u-värden vi fick givna i uppgiften.

- Börja med Laplaceoperatorn, som för en tredimensionell vektorvärd funktion $\mathbf{u}$ i kartesiska koordinater är definierad som

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} = \left(\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_i^2}, \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_i^2} \right)$$

Om vi genomför summan ser vi direkt att de partiella derivatorna med avseende på u_2 och u_3 försvinner direkt. Kvar blir då endast u_1-termerna så att

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}, 0, 0 \right)$$

Vidare kan vi se att de partiella derivatorna med avseende på x_2 och x_3 också försvinner eftersom $u_1(x_1, t)$ inte har något beroende på dessa. Kvar blir då

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \mathbf{u} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, 0, 0 \right)$$

- Vi går nu vidare till divergensen i andra termen. Från definitionen av divergens vet vi att

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

Även här faller u_2- och u_3-termerna bort eftersom de är konstant noll. Kvar blir

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

- För att bli klara med andra termen i ekvationen måste vi nu beräkna gradienten av divergensen. I parentesen i högerledet skriver vi gradientoperatorn, och till höger om den har vi resultatet från vår förra beräkning, divergensen av $\mathbf{u}$.

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$$

  Förenkling av uttrycket, där derivatorna med avseende på x_2 och x_3 försvinner, ger

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u}) = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, 0, 0 \right)$$

- Om vi nu kollar på högerledet i ekvation (2) har vi en tidsderivata. På samma sätt som tidigare är det bara u_1-termen som överlever, så

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, 0, 0 \right)$$

- Vi ser i de förenklade vektoruttrycken ovan att det bara är det första elementet som överlever, resten blir noll. Vi tittar från och med nu bara på den första vektorkomponenten.

- Insättning av de här förenklade vektoruttrycken i ekvation (3) ger

$$\mu \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

  som med förenkling blir

$$(2\mu + \lambda) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

- Detta är alltså den differentialekvation som u_1 måste uppfylla, och därmed vårt svar.

b)

- Från figuren ser vi att vi har tre olika typer av kanter på lådan. Toppen och högersidan är helt fria. Vänstersidan är i princip fri, men med en belastning i x_1-led. Botten på lådan sitter fast i en fix vägg och kan inte röra sig.
- Från avsnitt 7.3.1 i Reddy vet vi att vi kan dela upp randvillkoren i några olika kategorier av problem. Antingen har vi förskjutningen $\mathbf{u}$ beskriven överallt på randen (typ 1), eller så har vi spänningen $\mathbf{t}$ beskriven överallt på randen (typ 2), eller så är det en kombination av de första två (typ 3).
- Från denna kategorisering vet vi att vi ska föreslå antingen förskjutningen $\mathbf{u}$ eller spänningen $\mathbf{t}$ överallt på randen.
- Definition av riktning: i denna uppgift pekar u_1 och t_1 i x_1-riktningen och u_2 och t_2 i x_2-riktningen.
- Vi börjar med att kolla på toppen och botten på lådan. Här kan vi enkelt se att eftersom randen inte är kopplad till något så kan den röra sig fritt (vet inte $\mathbf{u}$), samtidigt som randen inte kan ta upp någon spänning (måste ha $\mathbf{t} = 0$). Alltså måste vi ha randvillkoren

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 0 & \text{vid } x_1 = a \\ t_1 = t_2 = 0 & \text{vid } x_2 = b \end{cases}$$

- Om vi nu kollar på botten på lådan så sitter den fast i någon fix vägg. Vi vet inte om det finns några spänningar här ($\mathbf{t}$ är okänd), men däremot vet vi att väggen inte rör på sig (vet $\mathbf{u}$). Alltså måste vi ha randvillkoret

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{vid } x_2 = 0$$

- Slutligen kollar vi på vänstersidan. Denna sida är fri, men belastningen gör att det blir lite av ett specialfall. Eftersom den är fri kan vi sluta oss till att $\mathbf{u}$ är okänd. Alltså måste vi hitta villkor i termer av $\mathbf{t}$.
- Vi ser på belastningen att den endast agerar i x_1-led, så i x_2-riktningen beter sig randen som om den vore helt fri. Alltså:

$$t_2 = 0 \quad \text{vid } x_1 = 0$$

- Om vi kollar i x_1-riktningen ser vi att belastningen följer en linjär funktion. Alltså har vi

$$t_1 = f(x_2) \quad \text{vid } x_1 = 0$$

  där f är vår linjära funktion.
- Vi söker formen på f genom räta linjens ekvation ($f(x) = kx + m$), med lutningen

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2' - x_1'} \tag{4}$$

  där jag använder prim för att betona skillnad mot koordinataxlarna.

- Vid nedre vänstra hörnet på lådan ($x_1' = x_2 = 0$):

$$y_1 = f(0) = \sigma_0$$

  Vid övre vänstra hörnet på lådan ($x_2' = x_2 = b$):

$$y_2 = f(b) = 0$$

- Insättning i ekvation (4) ger lutningen

$$k = \frac{0 - \sigma_0}{b - 0} = -\frac{\sigma_0}{b}$$

- För konstanten m får vi om vi utvärderar funktionen vid nedre vänstra hörnet ($x_2 = 0$)

$$f(0) = \sigma_0$$

$$-\frac{\sigma_0}{b} \cdot 0 + m = \sigma_0$$

$$\implies m = \sigma_0$$

  Alltså

$$f(x_2) = -\frac{\sigma_0}{b} x_2 + \sigma_0$$

- Sista randvillkoret blir då $t_1 = -\frac{\sigma_0}{b} x_2 + \sigma_0$ vid $x_1 = 0$
- Sammanfattningsvis blir då randvillkoren

$$\begin{cases} t_1 = t_2 = 0 & \text{vid } x_1 = a \\ t_1 = t_2 = 0 & \text{vid } x_2 = b \\ u_1 = u_2 = 0 & \text{vid } x_2 = 0 \\ t_1 = -\frac{\sigma_0}{b} x_2 + \sigma_0, \quad t_2 = 0 & \text{vid } x_1 = 0 \end{cases}$$

Fråga 5

- I denna uppgift ska vi använda ett koordinatsystem där x-riktningen är i huvudströmriktningen, y-riktningen går mellan plattorna i uppåtgående riktning och z-riktningen går ut ur pappret. Vi sätter att $y = 0$ ligger mitt i flödet, mellan de två plattorna. Detta val av y kommer av att jag vill ha symmetri på båda sidor, men andra val är möjliga.

- Har inkompressibel strömning av Newtonsk fluid. Vi skulle i princip kunna påbörja uppgiften med den allmänna, tredimensionella versionen av Navier-Stokes ekvationer. Men vi har lite mer information som gör att vi väntar med att välja ut en ekvation.

- Vi har enligt uppgiften laminär strömning, vilket innebär att vi inte har någon blandning av fluid mellan de olika flödesskikten. Alltså har vi bara strömning i x-riktningen. Dessutom har vi fullt utvecklad strömning. Vi har då ingen effekt av plattornas ändpunkter och flödet blir oberoende av x. Hastigheten i x-riktningen beror då endast på y. Sammanfattningsvis får vi då

$$\mathbf{v} = \begin{cases} v_x = v_x(y) \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$

- Från denna information ovan kan vi sluta oss till att vi inte behöver den kompletta, tredimensionella versionen av Navier-Stokes ekvationer, utan vi kan nöja oss med den endimensionella i x-riktningen. Denna ges enligt formelbladet av

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)$$

- Vi kan redan nu ta bort de två sista termerna i högerledet, eftersom $v_y = v_z = 0$

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$

- Systemet är i steady-state, så vi har inte något tidsberoende. Därmed försvinner tidsderivatan (första termen i parentesen på högra sidan)

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}$$

- I uppgiften antar vi att plattorna är mycket stora och att vi har laminär, fullt utvecklad strömning. Med detta antagande blir hastigheten v_x oberoende av x. Alltså försvinner $\frac{\partial v_x}{\partial x}$-termen i högerledet.

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = 0$$

- Enligt uppgiftsformuleringen är gravitationens inverkan försumbar. Det finns heller inga andra volymskrafter som agerar på vätskan. därför försvinner f_x-termen på vänstra sidan

$$\mu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- Slutligen kan vi se att de partiella derivatorna av v_x med avseende på x och z måste försvinna, eftersom v_x endast beror på y. Vi får då den fullt förenklade ekvationen

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} - \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

- Vi söker nu efter maxvärdet av v_x, så vi löser ut v_x och integrerar två gånger med avseende på y

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \tag{5}$$

$$v_x(y) = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2 \tag{6}$$

  där c_1 och c_2 är okända integrationskonstanter.

- Nu behöver vi några randvillkor för att komma vidare. Vi vet att fluidens hastighet precis vid väggen är noll (ofta kallat no-slip condition på engelska), så vi får villkoren.

$$\begin{cases} v_x(y = h/2) = 0 \\ v_x(y = -h/2) = 0 \end{cases}$$

- Använder nu randvillkoren i ekvation (6) för att bestämma konstanterna c_1 och c_2. Lösning av ekvationssystemet ger

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -\dfrac{h^2}{8\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x} \end{cases}$$

- Insättning tillbaka in i ekvation (6) ger

$$v_x(y) = \frac{h^2}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{1}{4}\right)$$

- Hittar maxpunkten genom att ta derivatan med avseende på y och sätta lika med 0. Resultatet ger att den maximala hastigheten $v_{x,\max}$ ges då $y = 0$. Alltså:

$$v_{x,\max} = v_x(0) = -\frac{h^2}{8\mu}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{7}$$

- Vi har nu nästan allt vi behöver för att beräkna den maximala hastigheten, men vi vet fortfarande inte vad tryckgradienten $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ har för värde. Vi ska nu använda villkoret om vorticitet vid den övre väggen för att ta reda på värdet på tryckgradienten.

- För vorticiteten vet vi från uppgiftsformuleringen att

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \mathrm{s}^{-1}$$

- Av derivatorna i parentesen ovan är det endast $\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$ som är nollskild. Alltså har vi vid övre väggen att

$$-\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=h/2} = -10\,\mathrm{s}^{-1}$$

- Insättning i ekvation (5) ger

$$-\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{h}{2} = -10\,\mathrm{s}^{-1}$$

- Löser ut $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ för att få

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\mu}{h}\cdot 20\,\mathrm{s}^{-1}$$

- Insättning av numeriska värden $h = 1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}$ och $\mu = 0.001\,\mathrm{Pa\,s}$ ger

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{0.001\,\mathrm{Pa\,s}}{1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}}\cdot 20\,\mathrm{s}^{-1} = 20\,\mathrm{Pa/m}$$

- Slutligen kan vi sätta in detta värde i ekvation (7), vilket ger

$$v_{x,\max} = -\frac{\left(1\times 10^{-3}\,\mathrm{m}\right)^2}{8\cdot 0.001\,\mathrm{Pa\,s}}\cdot 20\,\mathrm{Pa/m} = -0.0025\,\mathrm{m/s}$$

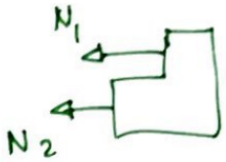
- OBS! Här kan vi notera att maxhastigheten är negativ (flödet går åt vänster), vilket innebär att riktningen på hastighetsprofilen i figuren i uppgiftsformuleringen inte stämmer.

  Vill man göra en extra koll kan man se att $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ är positiv, dvs. trycket ökar ju mer åt höger man går. Flöden som drivs av en tryckgradient går från högt till lågt tryck, alltså måste trycket minska ju längre i flödesriktningen vi går. Att $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ är positiv är då konsekvent med att flödet går i negativ x-riktning.

- Vårt slutgiltiga svar blir då att maximala hastigheten är $0.0025\,\mathrm{m/s}$ åt vänster.

Fråga 6

a)



Figur 1: Figurkälla: Henrik Ström

- I denna uppgift kan vi använda ekvationen i formelsamlingen för termisk expansion.

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T \tag{8}$$

- För att få den totala deformationen δ kan vi använda ekvationen

$$\overline{\epsilon} = \frac{\delta}{L}$$

från formelbladet. $\overline{\epsilon}$ står för medeltöjning, i detta fall vårt ϵ. Löser vi ut δ får vi

$$\delta = \epsilon L \tag{9}$$

- Vi har två olika långa stänger som vill expandera olika mycket när temperaturen ändras. Vi vet dock att vagnen inte deformeras, så stängerna tvingas expandera exakt lika mycket. Priset vi betalar för detta extra krav är att stängerna kommer att börja uppleva viss spänning. Kravet på lika expansion kan vi skriva som

$$\delta_1 = \delta_2 \tag{10}$$

där δ_1 är den övre stångens expansion och δ_2 gäller för den undre stången.

- Om vi sätter in ekvation (9) i ekvation (10) får vi, med respektive längder $\frac{3L}{2}$ och L, att

$$\epsilon_1 \frac{3L}{2} = \epsilon_2 L$$

$$\frac{3}{2}\epsilon_1 = \epsilon_2 \tag{11}$$

- Om vi nu tar hjälp av ekvation (8) får vi

$$\frac{3}{2}\left(\frac{\sigma_1}{E} + \alpha \Delta T\right) = \frac{\sigma_2}{E} + \alpha \Delta T$$

- Spänning σ är kraft delat på tvärsnittsarea, dvs.

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{12}$$

  Även denna ekvation kommer från formelbladet.

  Insättning av det här i ekvation (11) ger

$$\frac{3}{2}\left(\frac{N_1}{4AE} + \alpha\Delta T\right) = \frac{N_2}{AE} + \alpha\Delta T \tag{13}$$

- Från kraftjämvikt på vagnen får vi att

$$N_1 = -N_2 \tag{14}$$

- Vi har nu ett ekvationssystem av ekvationerna (13) och (14), alltså

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\left(\frac{N_1}{4AE} + \alpha\Delta T\right) = \frac{N_2}{AE} + \alpha\Delta T \\ N_1 = -N_2 \end{cases}$$

- Lösning av ekvationssystemet ger stångkrafterna

$$\begin{cases} N_1 = -\frac{4}{11}AE\alpha\Delta T \\ N_2 = \frac{4}{11}AE\alpha\Delta T \end{cases} \tag{15}$$

- Vi kan nu använda ekvation (9) för någon av stängerna för att få fram vårt slutliga δ. Om vi använder värdena för den övre stången får vi att

$$\delta = \epsilon_1 \frac{3L}{2}$$

$$\delta = \left(\frac{\sigma_1}{E} + \alpha\Delta T\right)\frac{3L}{2}$$

  där vi ska sätta in $\sigma_1 = \frac{N_1}{4A}$ från ekvation (12), och $N_1 = -\frac{4}{11}AE\alpha\Delta T$ från lösningen i (15).

- Förenkling av detta uttryck ger då den resulterande horisontalförskjutningen av vagnen

$$\delta = \frac{15L\alpha\Delta T}{11}$$

  vilket är vårt svar.

b)

- Har följande ekvation för vridning av en axel från Physics Handbook

$$\Theta = \frac{M_v L}{G K_v} \tag{16}$$

där Θ är rotationsvinkeln, M_v är vridmoment, L är axelns längd, G är skjuvmodulen och K_v är vridstyvhetens tvärsnittsfaktor.

- Från Physics Handbook får vi även uttrycken för K_v. För den inre solida axeln gäller att

$$K_{v,i} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \tag{17}$$

där D betecknar diameter. För det tunnväggade yttre röret har vi

$$K_{v,y} = 2\pi R^3 t = \frac{\pi R^4}{10} \tag{18}$$

där $t = \dfrac{R}{20}$.

- Eftersom både axeln och röret är fastsatta i samma, solida, väggar har vi att vridningsvinklarna är lika, dvs. $\Theta_i = \Theta_y$, där index i refererar till den inre axeln och y refererar till den yttre. Eftersom båda har samma rotationsvinkel kan vi ställa upp en likhet med hjälp av ekvation (16) så att vi har

$$\frac{M_v L}{G K_{v,i}} = \frac{M_v L}{G K_{v,y}} \tag{19}$$

- Axeln och röret är tillverkade av samma material, så L och G samma för båda. Enligt uppgiften ska vi nu bestämma $\dfrac{R}{r}$ så att de även har samma M_v. Vårt villkor blir då att M_v är samma för båda, och $\dfrac{R}{r}$ blir vår okända variabel.

- Om vi kollar på ekvation (19) kan vi då dividera bort M_v, L och G på båda sidor (eftersom de är lika). Kvar får vi då

$$K_{v,i} = K_{v,y}$$

Insättning av uttryck för dessa variabler (ekvationerna (17) och (18)) ger

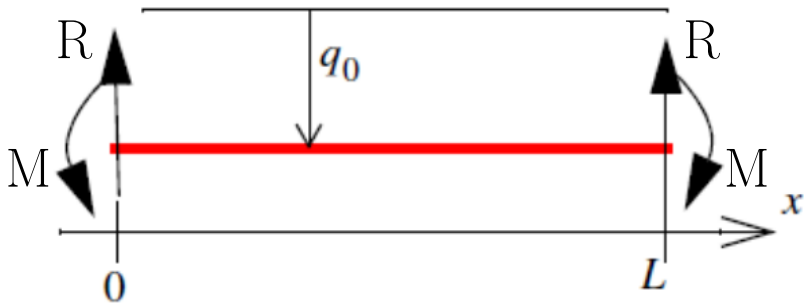
$$\frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi R^4}{10}$$

Löser ut $\dfrac{R}{r}$ och får

$$\frac{R}{r} = 5^{\frac{1}{4}} \approx 1.5$$

vilket blir vårt svar.

c)



Figur 2: Friläggning av ett segment av balken. R betecknar reaktionskraft från stöden, M betecknar böjmomentet, q_0 är en konstant belastning på grund av balkens egna tyngd. Figur från tentatesen.

- Randvillkor för balken precis ovanför stöden:

$$\begin{cases} T_{\text{rand}} = 0 \\ M_{\text{rand}} = \dfrac{q_0 L^2}{12} \end{cases}$$

  där T är skjuvkraft och M är böjmoment.

- På balken har vi den konstanta belastningen

$$q(x) = q_0$$

  som kommer från balkens egna tyngd.

- Enligt uppgiftsformuleringen kan vi göra antagandet att

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = 0$$

  vid balkens stödpunkter. Variabeln $w(x)$ betecknar här balkens transversalförskjutning, så antagandet innebär att balken ligger helt horisontellt utan rotation. Detta kan ses som motsvarigheten till att balken är fast inspänd i en vägg.

- Vi börjar med att använda oss av kraftjämvikt för att bestämma storleken på alla ingående krafter. I figur 2 kan vi identifiera tre olika krafter, två uppåtriktade krafter som kommer från stöttorna, samt en jämnt fördelad nedåtriktad kraft som kommer från balkens egen tyngd. Vi kan med symmetriargument komma fram till att båda stöttorna bidrar med samma reaktionskraft R.

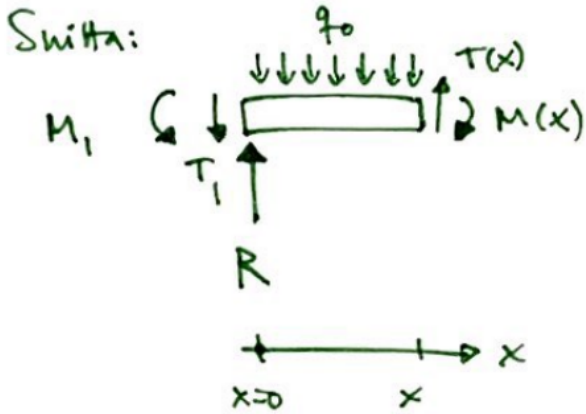
- För att få kraftjämvikt måste de upp- och nedåtriktade krafterna balansera ut varandra, så

$$2R = q_0 L$$

Högerledet kommer från att vi har kraften q_0 per längdenhet, gånger längden L, vilket ger den totala kraften på hela balken. Från denna ekvation kan vi lösa ut R för att få

$$R = \frac{q_0 L}{2}$$

- På motsvarande sätt kan vi använda oss av momentjämvikt kring någon punkt x längs med balken, se figur 3



Figur 3: Friläggning av ett litet segment av balken. Figurkälla: Henrik Ström

- Precis i kanten har vi enligt randvillkoret

$$M_{\text{rand}} = M(0) = \frac{q_0 L^2}{12}.$$

Vi får även momentbidrag från stöttans reaktionskraft

$$M_{\text{stötta}} = -Rx = -\frac{q_0 L x}{2}$$

Slutligen får vi ett momentbidrag från den fördelade belastningen. Eftersom den är utbredd längs med balken blir momentbidraget x-beroende.

$$M_{\text{tyngd}}(x) = q_0 x \frac{x}{2}$$

- Om vi sätter samman de här bidragen får vi

$$M(x) = M_{\text{rand}} + M_{\text{stötta}} + M_{\text{tyngd}} = \frac{q_0 L^2}{12} - \frac{q_0 L x}{2} + q_0 x \frac{x}{2}$$

$$= \frac{q_0 L^2}{12}\left(1 - 6\frac{x}{L} + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

- För att hitta punkten där beloppet av momentet är som störst deriverar vi och hittar extrempunkten till $M(x)$.

$$\frac{\partial M}{\partial x} = q_0 \left(-\frac{L}{2} + x \right) = 0$$

$$\implies x = \frac{L}{2}$$

- Denna extrempunkt ger momentet

$$M\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^2}{12} \left(1 - 3 + \frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{q_0 L^2}{24}$$

- OBS! här måste vi vara försiktiga med att även kolla randpunkterna på intervallet. Det skulle kunna vara så att dessa har ett större moment än extrempunkten till $M(x)$.

  Eftersom vi har en andragradsekvation med extrempunkt i $x = \frac{L}{2}$ vet vi att den är symmetrisk på båda sidor. Alltså måste det gälla för randpunkterna att $M(0) = M(L)$. Det räcker då att kolla en av dem:

$$M(0) = \frac{q_0 L^2}{12}$$

  Detta är till belopp större än vad vi fick från extrempunkten, alltså är böjmomentet störst precis vid stöttorna. Beloppet av vridmomentet blir

$$|M_{\max}| = \frac{q_0 L^2}{12}$$

- Vårt svar blir då att snittmomentet är

$$M(x) = \frac{q_0 L^2}{12} \left(1 - 6\frac{x}{L} + 6\left(\frac{x}{L}\right)^2\right)$$

  och det till belopp största momentet är $|M_{\max}| = \dfrac{q_0 L^2}{12}$