



MODELLTENTA 1

Tentamen MMS260 Kontinuummekanik

Tid: 2 juni 2023 kl 08:30-12:30

Lärare: Henrik Ström (mobil: 070-40 25 119, kontor: 031-772 13 60)

Tillåtna hjälpmedel: Till tentamen får man medföra ett (dubbelssidigt) paper med egna anteckningar. Dessa anteckningar kan vara handskrivna eller datorskrivna, vilket som önskas. I övrigt är följande hjälpmedel tillåtna: penna, radergummi, linjal och ordbok (ej elektroniska ordböcker), samt miniräknare med tömt minne och matematisk handböcker (t ex Physics Handbook och/eller BETA). Räknare som används som hjälpmedel vid tentamen får inte ha trådlös anslutningsmöjlighet till internet. I formelsamlingar får endast indexeringar göras. Om det förekommer tryckfel i de tillåtna i hjälpmedlen får handskrivna rättelser finnas. Mobiltelefoner och elektronisk utrustning, som inte är godkända hjälpmedel, skall vara avstängda och får inte medföras till skrivplatsen.

Lärare besöker salen: ca kl 09:30 och kl 11:30

OBS! Notera att uppgifterna inte är ordnade efter svårighetsgrad.

Rättning: Resultatet anslås senast den 23:e juni 2023 i Canvas. Det kan också ses i Studentportalen och Ladok (eventuellt med viss fördröjning). Instruktioner för tentamensgranskning publiceras tillsammans med tentamensresultatet.

Betygsgränser: Poängantalet för korrekt besvarad/löst uppgift anges inom parentes (p). Betygsgränser för tentamen är:

Betyg U < 20p ; 20p ≤ Betyg 3 < 30p ; 30p ≤ Betyg 4 < 40p ; Betyg 5 ≥ 40p.

LYCKA TILL!

1. Grundläggande begrepp (5p)

Identifiera (namnge) de grundläggande begrepp - ur listan i rutan på nästa sida - som beskrivs nedan i (a)-(g):

- a) Spänningstensor som karakteriseras nuvarande kraft per enhet deformad area
- b) Tensor som karakteriseras töjningen i den linjäriserade beskrivningen av en elastisk solid
- c) Materialegenskap som karakteriseras en fluids förmåga att motstå deformation genom skjutning
- d) Fjärde ordningens tensor som relaterar töjning till spänning i en tredimensionell generalisering av Hookes lag
- e) Skalär variabel som representerar den energimängd (per tid och volym) som omvandlas från kinetisk (mekanisk) energi till inre energi (värme)

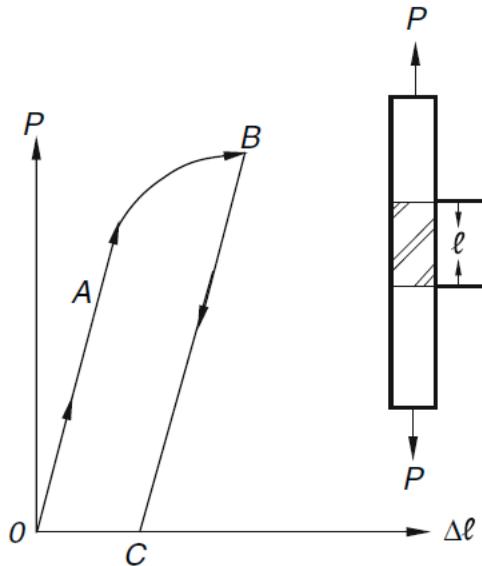
deformationsgradienttensorn, F
förflyttningstensorn, H
vänstra Cauchy-Green deformationstensorn, B
högra Cauchy-Green deformationstensorn, C
styrhetstensorn, C
hastighetsgradienttensorn, L
symmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, D
antisymmetriska delen av hastighetsgradienttensorn, W
materiederivatan, D/Dt
Eulerska töjningstensorn, e
Lagrangeska töjningstensorn, E
infinitesimala töjningstensorn, ϵ
Cauchys spänningstensor, σ
första Piola-Kirchoff spänningstensorn, P
andra Piola-Kirchoff spänningstensorn, S
hastighetsvektorn, v
förflyttningsvektorn, u
värmefluxvektorn, q
spänningstensorn, t
Cauchys högra töjningstensor, U
Cauchys vänstra töjningstensor, V
rotationstensorn, R
deformationsmappningen, χ
temperaturen, T
trycket, p
skjuvspänningstensorn, τ
dissipationsfunktionen, Φ
viskositeten, μ
densiteten, ρ
Youngs modul, E
Poissonration, ν
skjuvmodulen, G
värmekonduktiviteten, k
specifika värmekapaciteten (vid konstant tryck), c_p
bulkmodulen, κ

2. Teori (12p)

- a) Om vi definierar $\lambda^{-1} = \sqrt{\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{m}}$, där \mathbf{B} är den vänstra Cauchy-Green deformationstensorn och \mathbf{m} är en enhetsvektor i den nuvarande konfigurationen, vad representerar då λ ? (\mathbf{m} utgår från samma punkt \mathbf{x} i vilken man bestämt \mathbf{B}^{-1}).
- b) I en generalisering av Newtons andra lag till deformerbara media behöver man bestämma ytkrafternas bidrag till nettokraften. Genom att tillämpa Cauchys spänningsformel erhåller man då ytintegralen $\int_{\partial\kappa} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$. Förklara hur denna ytintegral kan skrivas om till en volymintegral över κ och ange hur denna volymintegral ser ut.
- c) Ange för var och en av följande fyra matematiska operationer huruvida resultatet är en skalär, en vektor eller en andra ordningens tensor! I dessa exempel representerar \mathbf{v} en vektor och \mathbf{S} en andra ordningens tensor.

- $\nabla \cdot \mathbf{v}$
- $\nabla^2 \mathbf{v}$
- $\nabla \cdot \mathbf{S}$
- $\nabla \mathbf{v}$

- d) Figuren nedan illustrerar schematiskt vilken belastning P som krävs för att åstadkomma en förlängning $\Delta\ell$ av en provkropp i ett materialprov. I vilken del av detta diagram gäller den linjära elasticitetsteorin? Om man applicerar en tillräckligt hög belastning (och sedan tar bort den) kan man traversera $OABC$ i figuren; i ett sådant scenario återvänder man inte till O vid $P = 0$ utan hamnar i C . Vad innebär detta?



- e) Fenomenet *drag crisis* karaktäriseras av en kraftig minskning av den dimensionslösa kraften ($C_D = F/\rho U^2 L^2$) vid endast en liten ökning av Reynolds tal ($Re = \rho U L / \mu$), i området kring $Re \approx 3 \cdot 10^5$ för strömning runt en cylinder. Innan detta fenomen inträffar finns ett relativt stort område, $2 \cdot 10^4 \leq Re \leq 1 \cdot 10^5$, där C_D är relativt konstant ($C_D \approx 1.2$) enligt experimentella undersökningar. Om man befinner sig i detta område av konstant C_D och ökar Re i små steg genom att öka hastigheten (övriga parametrar hålls konstanta), hur kommer då den dimensionsbärande kraften (i Newton) förändras?
- f) Hur kan Reynolds-medelvärderade Navier-Stokes (RANS) ekvationer härledas från Navier-Stokes ekvationer? OBS: Du behöver inte utföra härledningen, bara förklara vilka de två viktigaste stegen är.

3. Spänning- och töjningstillstånd (4p)

Spänningstensorn σ i ett (x_1, x_2, x_3) -system har följande utseende:

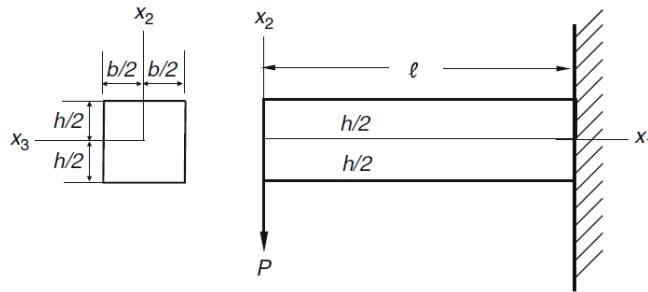
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 9 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Identifiera de huvudsakliga spänningarna, det plan som är associerat med den maximala huvudsakliga spänningen samt den maximala skjuvspänningen.

Ledning: För tensorn σ definierad ovan gäller (med godtagbar numerisk noggrannhet) att invarianterna $I_1 = \text{tr } \sigma = 6$, $I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } \sigma)^2 - \text{tr}(\sigma^2)] = -225$, och $I_3 = |\sigma| = -1350$, samt att egenvärdena är $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = -15$, $\lambda_3 = 6$ och egenvektorerna $\mathbf{x}^{(1)} = \{0.949, 0.316, 0\}$, $\mathbf{x}^{(2)} = \{-0.316, 0.949, 0\}$, och $\mathbf{x}^{(3)} = \{0, 0, 1\}$.

4. Elasticitetsproblem (5p)

Betrakta en balk vars tvärsnitt definieras av $-h/2 \leq x_2 \leq h/2$ och $-b/2 \leq x_3 \leq b/2$ och vars längd definieras av $0 \leq x_1 \leq \ell$ (se figur nedan). Origon för koordinatsystemet är placerat i mitten av det vänstra tvärsnittet vid $x_1 = 0$. På ränderna vid $x_2 = \pm h/2$ är spänningen noll. På randen vid $x_1 = 0$ finns en nedåtriktad pålagd kraft P . Den högra änden är fixerad så att $u_1 = u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0$ vid $(x_1, x_2) = (\ell, 0)$. Plattans böjmotstånd är $I = bh^3/12$.



Om balken är tunn (b liten jämfört med övriga dimensioner) kan den beskrivas som en platta, och situationen kan approximativt beskrivas av:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \frac{P}{I}x_1x_2 & \left(\frac{P}{2I}\right)\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right) & 0 \\ \left(\frac{P}{2I}\right)\left(\frac{h^2}{4} - x_2^2\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) & \frac{1}{E}(1 + \nu)\sigma_{12} & 0 \\ \frac{1}{E}(1 + \nu)\sigma_{12} & \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{bmatrix}$$

Verifiera att nedanstående förflyttningsfält är en lösning till problemet ovan:

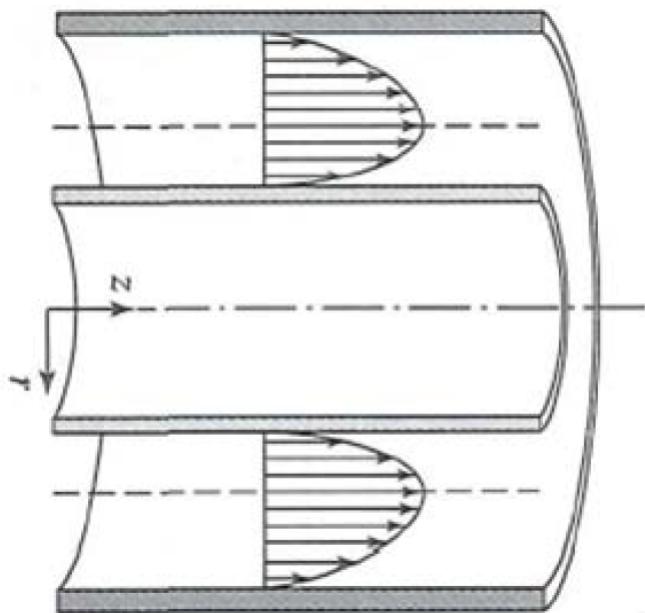
$$u_1 = \frac{Px_1^2x_2}{2EI} + \frac{\nu Px_2^3}{6EI} - \frac{Px_2^3}{6\mu I} + \frac{Px_2}{2\mu I} \left(\frac{h}{2}\right)^2 + b_1x_2 + c_2,$$

$$u_2 = -\frac{\nu Px_1x_2^2}{2EI} - \frac{Px_1^3}{6EI} - b_1x_1 + c_3.$$

(Notera att då plattan är tunn är ϵ_{33} ej av intresse och u_3 kan negligeras).

5. Strömningsproblem (7p)

Ett horisontellt (mycket långt) rör är placerat inuti ett större (likaså långt) rör. I mellanrummet mellan de två rören strömmar vatten som drivs av en konstant tryckgradient (se figur för skiss av strömningsprofilen mellan rören). Temperaturen är 5°C och Reynolds tal är sådant att strömningen är laminär. Bestäm storleken på den kraft som strömningen orsakar på det inre röret (per enhetslängd). Tryckgradienten är -30 Pa/m. Utgå från Navier-Stokes ekvationer när du tar fram ditt svar.



Materialdata:

Vatten 5°C: $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 0.0015 \text{ Pa.s}$

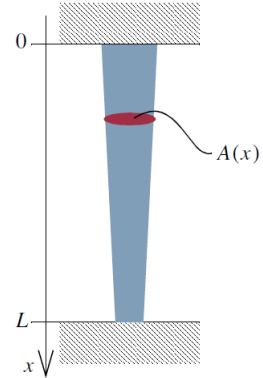
Geometridata:

Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till inre rörets yttersida: 5 mm

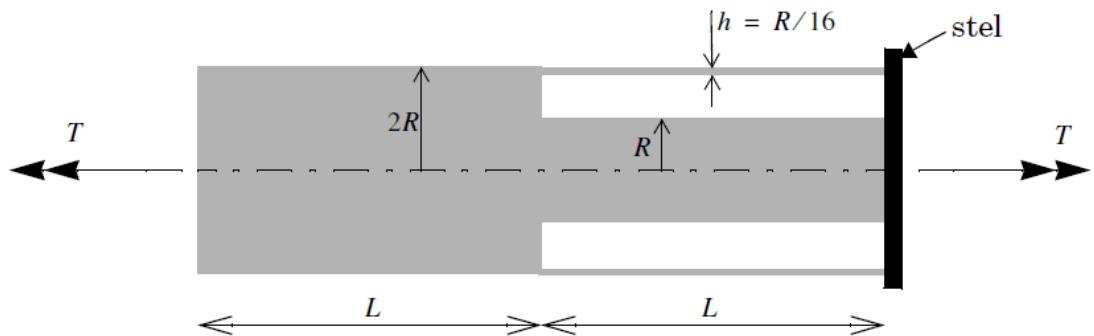
Radiellt avstånd från centrumlinjen (z) till yttre rörets innersida: 7 mm

6. Approximativa lösningar: solider (10p)

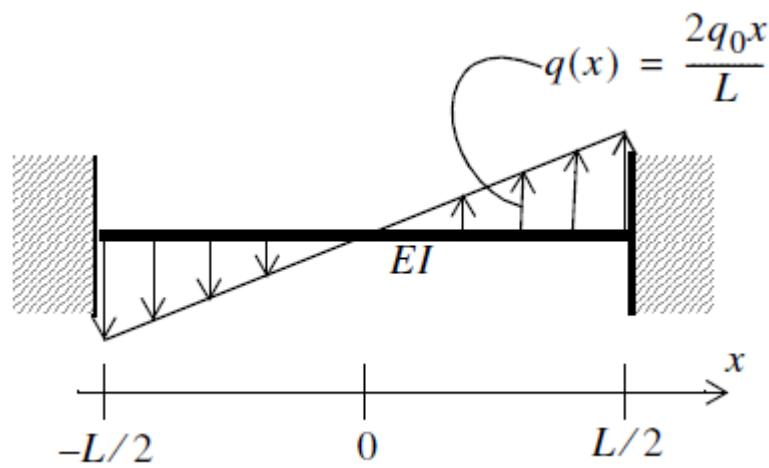
- a) En pelare av ett linjärt elastiskt material, med elasticitetsmodul E och densitet ρ , har längd L i odeformerat tillstånd och en linjärt varierande tvärsnittsyta $A(x) = A_0(2 - x/L)$. Pelaren monteras vertikalt mellan två stela stöd enligt figuren. Bestäm normalkraften $N(x)$ då pelaren belastas av sin egentyngd ρg (kraft/volym). (5p)



- b) En axelkonstruktion består av två delar, vardera med längd L . Den vänstra halvan har ett massivt cirkulärt tvärsnitt med radie $2R$; höger del utgörs av ett tunnväggigt rör, med eleradie $2R$ och godstjocklek $h = R/16$, samt av en centralt placerad cirkulär massiv axel med radie R . De två delarna i den högra halvan är i axeländen sammanfogade med en skiva som kan betraktas som stel. Axelmaterialiet är linjärt elastiskt med skjutmodul G . Bestäm hur det inre vridmomentet M_v i den tunnväggiga rördelen till höger förhåller sig till det pålagda vridmomentet T . (3p)



- c) En dubbelsidigt fast inspänd balk, tillverkad av ett linjärt elastiskt material, har konstant böjstyrhet EI och längd L . Den belastas av en utbredd last med intensitet $q(x) = 2q_0x/L$ (kraft/längd). Bestäm balkens transversalförskjutning $w(x)$. (2p)



7. Approximativa lösningar: fluider (7p)

- a) Kommunalt vatten till villor eller flerfamiljshus levereras normalt vid ett bestämt tryck. Vid val av duschnunstycke finns i detaljhandeln ett stort antal modeller som utlovar en reduktion av vattenflödet på upp till 35-50% i syfte att minska vattenförbrukningen. Förklara hur det är möjligt att designa ett duschnunstycke som utifrån ser likadant ut som ett konventionellt munstycke men som vid användning förbrukar så mycket mindre vatten! (2p)



- b) Två identiska glas står bredvid varandra på ett bord. Ett glas är till hälften fyllt med kvicksilver ($\rho = 13500 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.5 \cdot 10^{-3} \text{ Pa,s}$), till resten med vatten ($\rho = 998 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.0 \cdot 10^{-3} \text{ Pa,s}$). Det andra glaset innehåller hälften vatten och resten matolja ($\rho = 932 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.0 \cdot 10^{-2} \text{ Pa,s}$). I vilket glas är trycket på botten högst? Motivera ditt svar! (2p)
- c) En flygkonstruktion som ska flyga i 60 m/s vid atmosfärtryck och rumstemperatur ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa,s}$) har ett vingspann på 24.38 m. Man vill undersöka en nedskalad modell i en kryogen vindtunnel där fluiden är kvävgas vid ett tryck av 5 atm och en temperatur på 183 K, så att $\mu = 1.2 \cdot 10^{-5} \text{ Pa,s}$ och $\rho = 7.6 \text{ kg/m}^3$. Ingenjörerna har valt att använda hastigheten 48.5 m/s i vindtunneln. Vilket vingspann måste modellen ha för att uppfylla dynamisk likhet? (3p)

Formelsamling

Matematik

s är skalär, \mathbf{v} är vektor, \mathbf{A} är andra ordningens tensor

Jacobis formel

$$\frac{d}{d\tau} \det \mathbf{A} = \det \mathbf{A} \operatorname{tr} \left[\frac{d\mathbf{A}}{d\tau} \mathbf{A}^{-1} \right]$$

Symmetriska och antisymmetriska tensorer

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^S + \mathbf{A}^A = \frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$$

\mathbf{A}^S symmetrisk: $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, $A_{ij} = A_{ji}$

\mathbf{A}^A anti-symmetrisk: $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, $A_{ij} = -A_{ji}$, $A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0$

Deviatorisk (avvikande) tensor

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}' = 0$$

Identitetstensor

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$$

Divergensteoremet

$$\int_{\kappa} \nabla \cdot \mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\kappa} \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Kinematik

Definitioner

$$\mathbf{X} = \chi_0(M), \mathbf{x} = \chi_t(M), \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X})$$

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \chi_t(M)}{\partial t}, \mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{v}(M, t)}{\partial t}$$

$$\phi = \check{\phi}(M, t) = \hat{\phi}(\mathbf{X}, t) = \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)$$

Materiederivatan och hastighetsgradienten

$$\frac{D\phi}{Dt} = \begin{cases} \frac{\partial \check{\phi}(M, t)}{\partial t} |_{M = \text{fix}} \\ \frac{\partial \hat{\phi}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} |_{\mathbf{x} = \text{fix}} \\ \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \cdot \mathbf{v} \end{cases}$$

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\text{tr } \mathbf{L} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

Förflyttning och deformation

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$$

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \chi_t(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$$

Mappning mellan referenskonfigurationen och nuvarande konfigurationen

$$J = \det \mathbf{F} = |\mathbf{F}|$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$$

$$da \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{F}^\# dA \cdot \hat{\mathbf{N}} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot dA \hat{\mathbf{N}}$$

$$dv = JdV$$

Töjning

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I})$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$$

Spänningar

Spänningsvektorer

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(\hat{\mathbf{n}})}{\Delta a}$$

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}_{nn} + \mathbf{t}_{ns} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{t} \times \hat{\mathbf{n}})$$

$$\mathbf{t}_{nn} = (\mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, t_{nn} = \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{n}} = t_i n_i = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\mathbf{t}_{ns} = \mathbf{t} - \mathbf{t}_{nn}, |\mathbf{t}_{ns}| = t_{ns} = \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - t_{nn}^2}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$$

Cauchys lemma

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, -\hat{\mathbf{n}}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}})$$

Cauchys spänningssformel

$$\mathbf{t}(\hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

Cauchys spänningstensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T, \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

$$I_1 = \text{tr } [\sigma] = \sigma_{ii}$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } [\sigma])^2 - \text{tr } ([\sigma]^2)] = \frac{1}{2} (\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ji})$$

$$I_3 = |\sigma|$$

Piola-Kirchoffs spänningstensorer

$$\mathbf{T} dA = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} dA = \mathbf{t} da = \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T$$

$$d\mathcal{F} = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}, \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \mathbf{F}^T$$

Mekaniklagar

Massa

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm = \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = \int_{\kappa} \rho dv$$

$$\frac{Dm}{Dt} = 0$$

$$\rho_0 = \rho J$$

Massbalans - integral form för referenskonfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \rho_0 dV = 0$$

Massbalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho dV = 0$$

Massbalans - lokal form för referenskonfigurationen

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0$$

Massbalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Reynolds transportteorem

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho F \, dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\kappa} \rho F \, dv + \int_{\partial\kappa} \rho F \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$$

Rörelsemängd

$$\mathcal{P} = \int_{\mathcal{B}} d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \, dv$$

$$\mathcal{H}^o = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_o \times d\mathcal{P} = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} \, dv$$

$$\frac{D\mathcal{P}}{Dt} = \mathbf{F}$$

$$\frac{D\mathcal{H}^o}{Dt} = \mathbf{M}^o$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_S = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\mathbf{M}^o = \mathbf{M}_B^o + \mathbf{M}_S^o = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för referenskonfigurationen

$$\int_{\kappa_0} \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_{\kappa_0} \rho_0 \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{N}} \, dA$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dV = \int_{\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dV + \int_{\partial\kappa_0} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \, da$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{v} dv = \int_{\kappa} \mathbf{r}_o \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{r}_o \times \mathbf{t} \, da$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för referenskonfigurationen

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T$$

Rörelsemängdsbalanser - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{D \mathbf{v}}{Dt}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}$$

Energi

$$\frac{D}{Dt} (K + U) = W + Q_h$$

$$K = \frac{1}{2} \int_{\kappa} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} dv, \quad U = \int_{\kappa} e \, dv$$

$$W = \int_{\kappa} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dv + \int_{\partial\kappa} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} da, \quad Q_h = - \int_{\partial\kappa} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{q} da + \int_{\kappa} \rho r_h dv$$

Energibalans - integral form för nuvarande konfigurationen

$$\int_{\kappa} \left(\rho \frac{De}{Dt} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \rho r_h \right) dv = 0$$

Energibalans - lokal form för nuvarande konfigurationen

$$\rho \frac{De}{Dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho r_h$$

Konstitutiva samband

Generalisering av Hookes lag till 3D

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

$$\{\sigma\} = [\mathbb{C}] \{\epsilon\}, \{\epsilon\} = [S] \{\sigma\}, \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{S} = \mathbb{C}^{-1}$$

Isotrop elastisk solid

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = \kappa \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, 2\mu + \lambda = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{Bmatrix}$$

$$\kappa = \lambda + 2\mu/3$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}}$$

Newtonsk fluid, inkompressibel strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\mathbf{D}$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$$

$$\tau \propto \frac{d\theta}{dt} = \frac{dv_x}{dy}, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{dv_x}{dy}$$

Oviskös eller stillastående fluid, alternativt rotationsfri strömning

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$$

Fouriers lag

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla T \text{ (anisotrop medium)}$$

$$\mathbf{q} = -k \nabla T \text{ (isotrop medium)}$$

Linjäriserade elasticitetsproblem

Linjäriserade beskrivningen

$$\mathbf{E} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{e} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

$$\mathbf{x} \approx \mathbf{X}, \rho_0 \approx \rho$$

$$\boldsymbol{\sigma} \approx \mathbf{P} \approx \mathbf{S}$$

Töjning-förflyttning

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T]$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Rörelselagar

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho_0 f_x = \rho_0 \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + \rho_0 f_y = \rho_0 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho_0 f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho_0 f_r = \rho_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\theta r} - \sigma_{r\theta}}{r} + \rho_0 f_\theta = \rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{zr}}{r} + \rho_0 + f_z = \rho_0 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$$

Kompatibilitet

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\epsilon})^T = \mathbf{0}$$

Lamé-Naviers ekvationer

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho_0 \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$$

Michells ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = -\frac{\nu \rho_0}{1-\nu} (\nabla \cdot \mathbf{f}) \mathbf{I} - \rho_0 [\nabla \mathbf{f} + (\nabla \mathbf{f})^T]$$

Beltramis ekvationer

$$\nabla^2 \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} \nabla [\nabla (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})] = \mathbf{0}$$

Plantöjningsproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Planspänningssproblem - jämvikt

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + f_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + f_y = 0$$

Strömningsproblem

Inkompressibel strömning, Newtonsk fluid

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{f} = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho f_x = \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} + \rho f_y = \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\
& \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho f_r \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho f_\theta \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right) \\
& \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho f_z \\
& = \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Hydrostatik

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

Värmtransportproblem

$$\begin{aligned}
\rho c_p \frac{DT}{Dt} &= \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r_h \\
\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \rho r_h
\end{aligned}$$

1D-problem

$$\begin{aligned}
& \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{out}} (\rho Q)_{\text{out}} - \left(e + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha v^2}{2} + gz \right)_{\text{in}} (\rho Q)_{\text{in}} \\
& = W_{\text{shaft}} + H_{\text{net}}
\end{aligned}$$

Dissipation, Newtonsk fluid

$$\Phi = \tau : \mathbf{D}$$

$$\begin{aligned}\Phi &= 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Boussinesq approximation

$$\rho = \rho_0 - \beta \rho_0 (T - T_0)$$

Termisk expansion

$$\epsilon^{\text{term}} = \alpha \Delta T$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{mek}} + \epsilon^{\text{term}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha \Delta T$$

Approximativa lösningar: solider

Stång

$$N = P, \bar{\epsilon} = \delta/L, \sigma = E\bar{\epsilon}, N = \sigma A$$

$$\begin{bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^e \\ u_2^e \end{bmatrix}$$

Stångens differentialekvation

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{du}{dx}, \sigma = E \frac{du}{dx}, N = EA \frac{du}{dx} \\ -\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) &= K_x A\end{aligned}$$

Axel

$$\tau = G\gamma = \frac{M_v}{K_v} r, \gamma = \frac{r}{L} (\varphi(L) - \varphi(0)) = \frac{r}{L} (\varphi_2^e - \varphi_1^e)$$

$$\begin{bmatrix} M_1^e \\ M_2^e \end{bmatrix} = \frac{GK_v}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1^e \\ \varphi_2^e \end{bmatrix}$$

$K_v = 2\pi r^3 h$ (tunnväggigt tvärsnitt)

$K_v = \pi(b^4 - a^4)/2$ (tjockväggigt tvärslott)

Axelns differentialekvation

$$\frac{d}{dx} \left(GK_v \frac{d\varphi}{dx} \right) + q_v = 0$$

Balk

$$\frac{dN}{dx} + K_x A = 0, \frac{dT}{dx} + q = 0, \frac{dM}{dx} = T, \frac{d^2 M}{dx^2} + q = 0$$

$$\alpha = \frac{dw}{dx}, \epsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2} z, \sigma_x = E \epsilon_x = -E \frac{d^2 w}{dx^2} z, M = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

Balkens differentialekvation (Elastiska linjens ekvation)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right) = q(x)$$

Approximativa lösningar: flöider

Bernoullis ekvation

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{constant (utan förluster)}$$

$$\frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_f \text{ (med förluster)}$$

Turbulens

Kolmogorovs skalar

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2}, u_\eta = (\nu \varepsilon)^{1/4}$$

Reynoldsdekomponering

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}', p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} dt = \langle \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{v}' \rangle = \langle \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \rangle = \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{v}} = 0$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) ekvationer

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0$$

$$\nabla \cdot (-\bar{p} \mathbf{I} + 2\mu \bar{\mathbf{D}} - \rho \langle \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \rangle) = \rho \frac{D \bar{\mathbf{v}}}{Dt}$$

Tutorial

Problem 3

$$\sigma = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 0 \\ 9 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Principle stresses occur in plane where shear stress is zero. For such a plane the normal vector to the plane is such that :-

$$\sigma \cdot \hat{n} = \lambda \hat{n}$$

$$(\sigma - \lambda I) \cdot \hat{n} = 0$$

A trivial solution is $\hat{n} = 0$, but to get a non-trivial solution $(\sigma - \lambda I)$ needs to be non-invertible which implies that $\det(\sigma - \lambda I) = 0$

$$\sigma - \lambda I = \begin{bmatrix} 12-\lambda & 9 & 0 \\ 9 & -12-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(\tau - \lambda I) = (12-\lambda)(-12-\lambda)(6-\lambda) - 9 \times 9 (6-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda) [-(12-\lambda)(12+\lambda) - 81] = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda) [-144 + \lambda^2 - 81] = 0$$

$$\Rightarrow (6-\lambda)(\lambda^2 - 225) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 6 \text{ or } \lambda^2 = 225$$

$$\Rightarrow \lambda = 6 \text{ or } \lambda = \pm \underline{\underline{15}}$$

These λ values are known as eigenvalues and the normal vector (\hat{n}) corresponding to each eigenvalue is known as eigenvectors.

The principal stresses are equivalent to the eigenvalues since $\tau \cdot \hat{n} = \lambda \hat{n}$

Principal stresses are

$$\lambda_1 = 6 \text{ MPa}, \quad \lambda_2 = 15 \text{ MPa} \quad \& \quad \lambda_3 = -15 \text{ MPa}$$

Thus the maximum principal stress is $\sigma_2 = \underline{\underline{15 \text{ MPa}}}$

The plane associated with it can be found from the equation

$$\sigma \cdot \hat{n}_\bullet^{(2)} = \sigma_2 \hat{n}_\bullet^{(2)}$$

$$(\sigma - \sigma_2 I) \cdot \hat{n}_\bullet^{(2)} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (\sigma_2 - 15) & 9 & 0 \\ 9 & (-\sigma_2 - 15) & 0 \\ 0 & 0 & (6 - \sigma_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 9 & 0 \\ 9 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -3n_1 + 9n_2 \\ 9n_1 - 27n_2 \\ -9n_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-9n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 0$$

$$-3n_1 + 9n_2 = 0$$

$$\Rightarrow n_1 = 3n_2 = 3k$$

$$\hat{n}^{(2)} = \frac{3k\hat{e}_1 + k\hat{e}_2 + 0\hat{e}_3}{\sqrt{(3k)^2 + k^2 + 0}}$$

$$\hat{n}^{(2)} = \frac{3\hat{e}_1 + \hat{e}_2}{\sqrt{10}}$$

The maximum shear stress

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{1}{2} (\max(\sigma) - \min(\sigma)) \\ &= \frac{1}{2} (15 - (-15)) = \underline{\underline{15 \text{ MPa}}} \end{aligned}$$

The plane normal to $\hat{n}^{(2)}$ has the maximum principal stress of σ_2 .

Problem 4

$$[F] = \begin{bmatrix} \frac{P_{x_1 x_2}}{I} & \frac{P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - x_1^2 \right) & 0 \\ \frac{P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - x_2^2 \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} (\tau_{11} - \nu \tau_{22}) & \frac{1}{E} (1+\nu) \tau_{12} & 0 \\ \frac{1}{E} (1+\nu) \tau_{12} & \frac{1}{E} (\tau_{22} - \nu \tau_{11}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu}{E} (\tau_{11} + \tau_{22}) \end{bmatrix}$$

To verify

$$u_1 = \frac{P x_1^2 x_2}{2EI} + \frac{\nu P x_2^3}{6EI} - \frac{P x_1^3}{6\mu I} + \frac{P x_2}{2\mu I} \left(\frac{h}{2} \right)^2 + b_1 x_2 + c_2$$

$$u_2 = -\frac{\nu P x_1 x_2^2}{2EI} - \frac{P x_1^3}{6EI} - b_1 x_1 + c_3$$

$$I = \frac{b h^3}{12}$$

From given $\{\tau\}$ and $\{\epsilon\}$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} (\tau_{11} - v \tau_{22})$$

$$= \frac{1}{E} \left(\frac{P u_1 n_2}{I} \right) = \underline{\underline{\frac{P u_1 n_2}{EI}}}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} (\tau_{22} - v \tau_{11})$$

$$= \underline{\underline{-v \frac{P u_1 n_2}{EI}}}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{(1+v)}{E} \tau_{12}$$

$$= \frac{(1+v)}{E} \frac{P}{2I} \left(\frac{h^2}{4} - n_2^2 \right)$$

$$= \frac{2(1+v)}{E} \frac{P}{4I} \left(\frac{h^2}{4} - n_2^2 \right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{P}{4EI} \left(\frac{h^2}{4} - n_2^2 \right)}}$$

ϵ_{33} is not of interest and is ignored.

From small strain tensor formula

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Consider u_1 and u_2 forms given in qtn.

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{P n_1 n_2}{EI}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -v \frac{P n_1 n_2}{EI}$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{P n_1^2}{2EI} + \frac{v P n_2^2}{2EI} - \frac{P n_2^2}{2\mu I} + \frac{P}{2\mu I} \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]$$

$$+ b_1 - \frac{v P n_2^2}{2EI} - \frac{P n_1^2}{2EI} - b_1 \right]$$

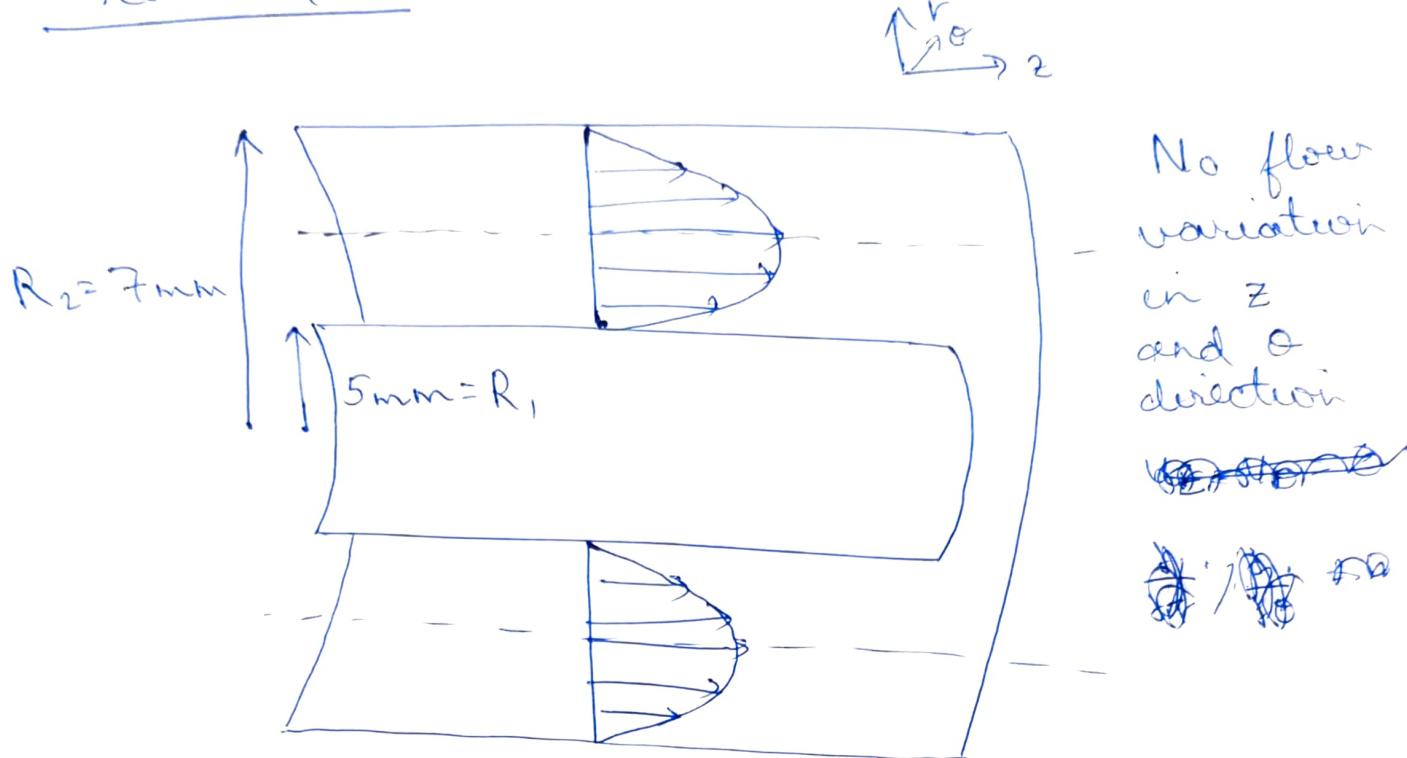
Terms cancel each other

$$\therefore \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{P}{2\mu I} \left(\frac{h^2}{4} - n_2^2 \right) \right]$$

$$= \underline{\underline{\frac{P}{4\mu I} \left(\frac{h^2}{4} - n_2^2 \right)}}$$

ϵ_{11} , ϵ_{22} and ϵ_{12} found from
[σ] and [ϵ] values as well as
from the small strain tensor
formulation using u_1 and u_2
are the same. Hence, the
general form u_1 and u_2 for
this configuration as given in
the question is correct.

Problem 5



$$T = 5^\circ\text{C}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

Flow is laminar

$$\mu = 0.0015 \text{ Pas}$$

$$\frac{\Delta P}{\Delta L} = -30 \text{ Pa/m} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Assume steady, incompressible flow with no gravity effects and that $v_r = v_\theta = 0$ due to flow symmetry.

Navier Stokes equation in cylindrical coordinates

Continuity equation

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Momentum equations in θ

r -direction

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right)$$

$$= - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + f_r \right]$$

Since v_r and v_θ are assumed to be zero

$$\Rightarrow - \frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

$$P = P(z, \theta)$$

θ -direction

$$\rho \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + f_\theta$$

Since v_r and u_θ are assumed to be zero

$$- \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow P = P(z)$$

$$z\text{-direction}$$

$$\rho \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)$$

$$= - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + f_z$$

$\frac{\partial}{\partial z}$ and $\frac{\partial}{\partial \theta}$ of any quantity is 0
since flow doesn't vary in z and θ direction.

$$\mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] = \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r}{\mu}$$

$$r \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{\mu} + C_1$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{1}{2} \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r}{\mu} + \frac{C_1}{r}$$

$$u_z(r) = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{r^2}{4\mu} + C_1 \ln(r) + C_2$$

$$v_z(r=R_1) = v_z(r=R_2) = 0$$

At the walls velocity is zero.

$$\frac{\partial P}{\partial z} \frac{R_1^2}{4\mu} + c_1 \ln(R_1) + c_2 = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \frac{R_2^2}{4\mu} + c_1 \ln(R_2) + c_2 = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} \frac{(R_2^2 - R_1^2)}{4\mu} + c_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0$$

$$c_1 = \frac{\partial P}{\partial z} \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$c_2 = -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{R_2^2}{4\mu} - c_1 \ln(R_2)$$

$$= -\frac{\partial P}{\partial z} \frac{R_2^2}{4\mu} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{(R_1^2 - R_2^2) \ln R_2}{4\mu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

Force along inner wall

$$F = A \tau_{r_2} \Big|_{r=R_1}$$

$$= 2\pi R_1 L \mu \frac{\partial v_z}{\partial r} \Big|_{r=R_1}$$

$$\frac{F}{L} = 2\pi R_1 \mu \left[\frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{2\mu} \frac{R_1}{2\mu} + \frac{C_1}{R_1} \right]$$

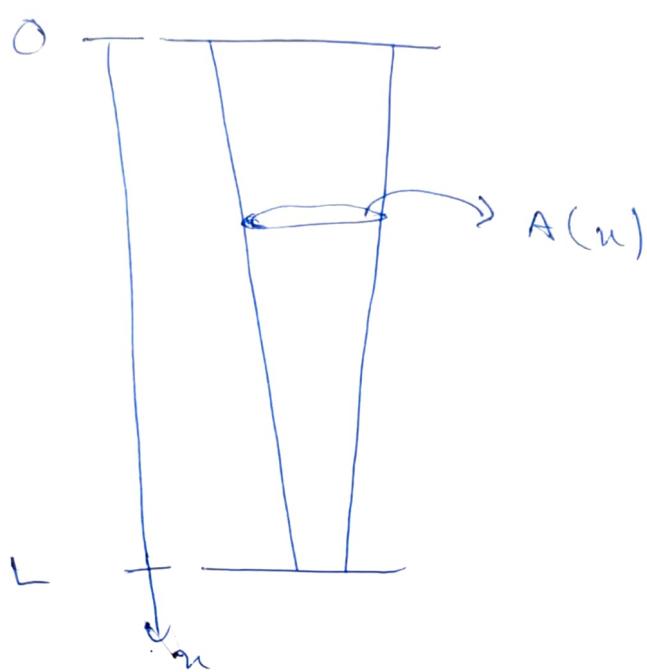
$$= 2\pi R_1 \mu \left[\frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{2\mu} \frac{R_1}{2\mu} + \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{2\mu} \frac{(R_1^2 - R_2^2)}{4\mu \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right]$$

$$= \pi R_1^2 \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{2\mu} + \frac{\pi(R_1^2 - R_2^2)}{2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \frac{\frac{\partial P}{\partial z}}{2\mu}$$

$$= \underline{\underline{1 \text{ m N/m}}}$$

Problem 6

(a)



$$A(u) = A_0 \left(2 - \frac{u}{L}\right)$$

$$-\frac{d}{du} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = k_n A$$

$$k_n = \rho g \quad A = A(u) = A_0 \left(2 - \frac{u}{L}\right)$$

$$\frac{d}{du} \left(EA(u) \frac{du}{dx} \right) = -\rho g A_0 \left(2 - \frac{u}{L}\right)$$

$$\text{Let } y = 2 - \frac{u}{L} \quad \text{then } dy = -\frac{du}{L} \Rightarrow du = -L dy$$

$$-\frac{d}{dy} \left(-\frac{EA(y)}{L} \frac{du}{dy} \right) = -\rho g A_0 y$$

$$-\frac{EA_0 y}{L} \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g A_0 L}{2} y^2 + C_1$$

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\rho g A_0 L y^2}{2 E A_0 y} - \frac{c_1 L}{E A_0 y}$$

$$u(y) = -\frac{\rho g L^2 y^2}{4 E} - \frac{c_1 L}{E A_0} \ln(y) + c_2$$

$$u(x) = -\frac{\rho g L^2}{4 E} \left(2 - \frac{x}{L}\right)^2 - \frac{c_1 L}{E A_0} \ln\left(2 - \frac{x}{L}\right) + c_2$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

$$u(L) = -\frac{\rho g L^2}{4 E} (2-1)^2 - \frac{c_1 L}{E A_0} \ln 1 + c_2$$

$$\Rightarrow c_2 = \underline{\underline{\frac{\rho g L^2}{4 E}}}$$

$$\frac{\rho g L^2}{4 E}$$

$$u(0) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\rho g L^2}{4 E} 4 - \frac{c_1 L}{E A_0} \ln 2 + \frac{\rho g L^2}{4 E} = 0$$

$$-c_1 = -\frac{\rho g L^2}{4E} + \frac{\rho g L^2}{4E} \ln \left(\frac{L \ln 2}{EA_0} \right)$$

$$c_1 = -\frac{3 \rho g L^2}{4E \ln 2} EA_0 = \frac{3 \rho g A_0 L}{4 \ln 2}$$

$$u(x) = \frac{-\rho g L^2}{4E} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{3 \rho g A_0 L \ln(2-x/L)}{4 E A_0 \ln 2}$$

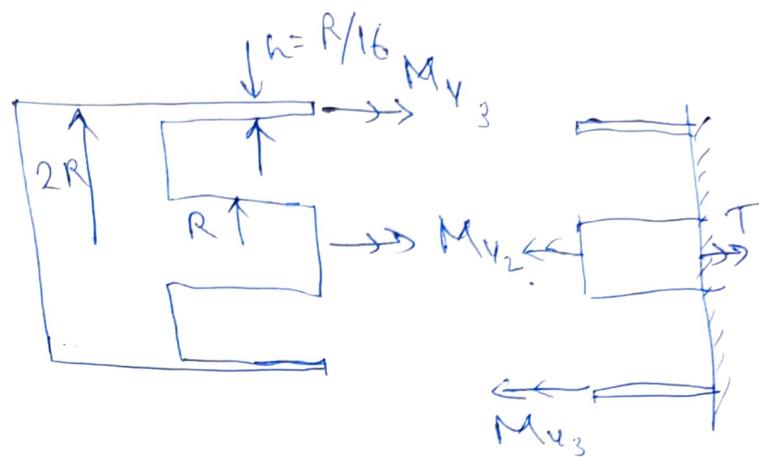
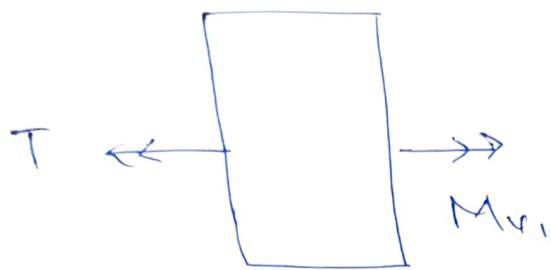
$$N(x) = EA(x) \frac{du}{dx}$$

$$= EA(x) \left[\frac{-\rho g}{2E} \left(2 - \frac{x}{L} \right) + \frac{3 \rho g L}{4 E \ln 2 (2-x/L)} \right]$$

$$= \cancel{\frac{-\rho g}{2E}} \cdot \frac{\rho g A_0}{2} \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{3 \rho g A_0 L}{4 E \ln 2}$$

$$= \frac{\rho g L A_0}{4 \ln 2} \left(2 \left(2 - \frac{x}{L} \right)^2 - 3 \right)$$

(b)



$$T = M_{V1}$$

$$T = M_{V3} + M_{V2}$$

The angles turned by both sections is the same. So

$$\phi_2 = \phi_3$$

$$M_{V2} = \frac{G_I K_V}{L} \phi_2 \quad \text{where } K_V = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$M_{V3} = \frac{G_I K_V}{L} \phi_3, \quad \text{where } \cancel{K_V} \\ K_V = 2 \pi (2R)^3 \left(\frac{R}{16} \right) \\ = \pi R^4 \left(\frac{1}{16} \right)$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \frac{2L M_{V2}}{G_I \pi R^4}$$

$$\Rightarrow \phi_3 = \frac{L M_{V3}}{G_I \pi R^4}$$

$$\frac{2\Delta M_{4_2}}{G\pi R^4} = \frac{\Delta M_{4_3}}{G\pi R^4}$$

$$2M_{4_2} = M_{4_3}$$

$$M_{4_3} = T - M_{4_2} = T - \frac{M_{4_3}}{2}$$

$$M_{4_3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}T}}$$

$$M_{4_2} = \underline{\underline{\frac{T}{3}}}$$

$$(c) q(x) = 2q_0x/L$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI_g \frac{d^2w}{dx^2} \right) = q(x)$$

$$EI \frac{d^4w}{dx^4} = \frac{2q_0x}{L}$$

$$\frac{d^4w}{dx^4} = w'''' = \frac{2q_0x}{EIL}$$

$$w''' = \frac{q_0x^2}{EIL} + A$$

$$w'' = \frac{q_0x^3}{3EIL} + Ax + B$$

$$w^1 = \frac{q_0 x^4}{12 EI L} + \frac{Ax^2}{2} + Bx + C$$

$$w(x) = \frac{q_0 x^5}{60 EI L} + \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + Cx + D$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$w\left(-\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$w^1\left(\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$w^1\left(-\frac{L}{2}\right) = 0$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^5}{60 \times 32 EI L} + \frac{A}{6} \frac{L^3}{8} + \frac{B}{2} \frac{L^2}{4} + \frac{C L}{2} + D$$

~~0~~

$$\Rightarrow \frac{q_0 L^4}{1920 EI} + \frac{A L^3}{48} + \frac{B L^2}{8} + \frac{C L}{2} + D = 0 \quad \textcircled{1}$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{q_0 L^5}{1920 EI} + \frac{A L^3}{48} + \frac{B L^2}{8} - \frac{C L}{2} + D = 0 \quad \textcircled{2}$$

$$w^1\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{q_0 L^3}{192 EI} + \frac{A L^2}{8} + \frac{B L}{2} + C = 0 \quad \textcircled{3}$$

$$w\left(\frac{-L}{2}\right) = \frac{q_0 L^3}{192 EI} + \frac{AL^2}{8} - \frac{BL}{2} + C = 0 \quad (4)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow \frac{BL^2}{4} + 2D = 0$$

$$BL^2 = -8D \quad - \textcircled{5}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4} \Rightarrow BL = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow D = 0$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \frac{q_0 L^4}{1920 EI} + \frac{AL^3}{48} + \frac{CL}{2} = 0$$

~~eq 5~~

$$\textcircled{3} \Rightarrow \frac{q_0 L^3}{192 EI} + \frac{AL^2}{8} + C = 0$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{3} \times \frac{L}{2}$$

$$\frac{q_0 L^4}{EI} \left(\frac{1}{1920} - \frac{1}{192 \times 2} \right) + AL^3 \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{8 \times 2} \right) = 0$$

$$\frac{AL^3}{24} = \frac{q_0 L^4}{192 EI} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2} \right) = \frac{-q_0 L^4 \times \frac{8}{10}}{1920 EI}$$

$\frac{96}{480}$

$$A = -\frac{q_0 L^4}{480EI} \times \frac{24}{L^3} = -\frac{q_0 L}{20EI}$$

$$C = -\frac{q_0 L^3}{192EI} - \frac{AL^2}{8} = -\frac{q_0 L^3}{192EI} + \frac{q_0 L^3}{160EI}$$

$$= \frac{q_0 L^3}{EI} \left[\frac{-5 + 6}{960} \right] = \frac{q_0 L^3}{960EI}$$

$$w(x) = \frac{q_0 x^5}{60EI} - \frac{q_0 L x^3}{120EI} + \frac{q_0 L^3}{960EI} x$$

$$= \frac{q_0}{960EI} \left[16 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 8 \left(\frac{x}{L} \right)^3 + \left(\frac{x}{L} \right) \right]$$